UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Letras e Artes

Programa de Pós-Graduação em Desenho: Mestrado em Desenho, Cultura e Interatividade

JOSÉ CARLOS SANTANA QUEIROZ

DESENHO GEOMÉTRICO E GEOMETRIA

análise dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental II

1970 - 2000

AGOSTO - 2010

FEIRA DE SANTANA – BA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Letras e Artes

Programa de Pós-Graduação em Desenho: Mestrado em Desenho, Cultura e Interatividade

JOSÉ CARLOS SANTANA QUEIROZ

DESENHO GEOMÉTRICO E GEOMETRIA

análise dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental II

1970 - 2000

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Desenho, Cultura e Interatividade. Área de concentração em Desenho, Registro e Memória Visual como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Orientadora Profª Drª Gláucia C. Trinchão

AGOSTO - 2010

FEIRA DE SANTANA – BA

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Queiroz, José Carlos Santana

Q44d Desenho geométrico e geometria: análise dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental II 1970 - 2000/ José Carlos Santana Queiroz. – Feira de Santana, 2010.

170 f.: il.

Orientadora: Gláucia C. Trinchão

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Desenho, Cultura e Interatividade. Universidade Estadual de Feira de Santana, 2010.

1.Desenho geométrico. 2.Geometria. 3.Livros didáticos de matemática. 4.Educação matemática. I.Trinchão, Gláucia. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51: 37

JOSÉ CARLOS SANTANA QUEIROZ

DESENHO GEOMÉTRICO E GEOMETRIA

análise dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental II

1970 - 2000

Dissertação apresentada ao Mestrado em Desenho, Cultura e Interatividade como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

____

Profª. Drª. Gláucia C. Trinchão
Drª em Educação

____

Prof. Dr. José Mário A. Oliveira
Dr. em Educação

____

Prof. Dr. José Carlos A. Silva
Dr. em História

Aprovada em ____/_____/____

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos, Carla e Enzo, pessoas que fazem a maior alegria da minha vida, pelo amor incondicional, as desculpas por minhas ausências. Vocês são a esperança e o estímulo para um mundo melhor e de paz.

À minha esposa Meg, pela compreensão e incentivo sempre. Também pelo que construímos e pelo que ainda podemos construir.

Aos meus pais José Queiroz e Zenildes Queiroz que certamente o que tenho de melhor foi de vocês.

Aos meus irmãos Gilton e Getúlio pela convivência e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me conceder a convivência com pessoas que me entusiasmam e incentivam ir à busca do que considero importante.

Gostaria de registrar um agradecimento especial à professora e orientadora Glaúcia C. Trinchão, pela paciência, confiança e as orientações dispensadas, sendo gentil mesmo ao mostrar meus equívocos, apontando novas possibilidades e caminhos a serem percorridos.

Aos professores do mestrado pelas discussões proporcionadas e empenho nas suas atividades.

Aos professores José Mário Aleluia e José Carlos A. Silva pelas sugestões e colaborações no exame de qualificação.

Ao Professor Edson Dias Ferreira, coordenador do curso, pelo incentivo e a forma elegante educada de atender as minhas solicitações.

Aos meus colegas e amigos do Mestrado, em especial à Carla Juliano pela leitura e correção deste trabalho, Juliane Panozzo, Sidney Oliveira, Daniela Ribeiro e Mônica.

À Universidade do Estado da Bahia, UNEB, pela dispensa para que eu pudesse realizar este trabalho.

RESUMO

Este trabalho realiza um estudo mostrando a intrínseca relação que existe entre o desenho geométrico e a geometria na história da humanidade e, como eles foram de fundamental importância para o desenvolvimento das ciências, influenciando diversos setores da sociedade. Devido ao prestigio alcançado por estas áreas do conhecimento, houve a necessidade de se estudar nas instituições de ensino e para alcançar tal objetivo o livro didático foi o seu instrumento. No Brasil, os primeiros estudos de geometria e desenho geométrico foram relacionados à construção de fortes e armamentos para a defesa da colônia. Ao atingir as escolas, devido às influências européias, a abordagem que era dada à geometria nos livros didáticos incluía o desenho geométrico. Com a reforma da educação de 1930, a geometria se aproxima de uma apresentação dedutiva e o desenho geométrico se tornara uma disciplina independente e obrigatória. Com o movimento da Matemática Moderna em 1960 e a LDB de 1971, a geometria passou a ser considerada uma disciplina irrelevante, portanto a sua inserção nos livros didáticos de matemática destinava-se as últimas paginas com uma apresentação compactada e o desenho geométrico se tornou uma disciplina optativa. Porém, a LDB de 1996 e o PCN de matemática (1997), enfatizaram a necessidade e a importância de se estudar a geometria e que em tal abordagem o desenho geométrico fosse incluído. Assim, esta pesquisa examinou como o desenho geométrico foi incluído na abordagem dada à geometria em dois livros didáticos de matemática utilizados na 8ª série do ensino fundamental II, sendo um editado na metade da dedada de 1970, a *MATEMÁTICA* de Orlando Antonio Zambuzzi e outro no final da década de 1990, *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA* de José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Júnior. Os resultados indicam que o livro didático de matemática editado na década de 1970 incorporou as tendências de ensino propostas pelos modernos e pela LDB de 1971 e o outro livro agregou algumas indicações da nova LDB e as sugestões do PCN de matemática, porém ainda de forma camuflada o desenho geométrico começa a fazer parte dos exercícios da abordagem.

Palavras-chave: Geometria, desenho geométrico, livros didáticos de matemática e educação matemática.

ABSTRACT

This work makes a study showing the intrinsic relationship between the geometric design and geometry in the history of humanity and as they were of fundamental importance for the development of science, influencing various sectors of society. Because of the prestige achieved by these areas of study, there was a need to study in educational institutions and to achieve this goal, the textbook was his instrument. In Brazil, the first studies of geometry and geometric design were related to the construction of forts and weapons to defend the colony. Upon reaching the schools, due to European influences, the approach that was given to geometry in the textbooks included the geometric design. With the education reform of 1930, the geometry approaches a deductive presentation and geometric design became an independent discipline and binding. With the movement of Modern Mathematics in 1960 and the LDB of 1971, the geometry has been considered an irrelevant subject, so its inclusion in mathematics textbooks intended the last pages with a packed presentation and geometric design has become a discipline. However, the LDB of 1996 and the NCP in mathematics (1997), emphasized the necessity and importance of studying the geometry and that such an approach in the geometric design were included. This research examined how the geometric design was included in the approach given the geometry of two mathematics textbooks used in the 8th grade II, and an edited half of dedada 1970, MATHEMATIC Orlando Antonio Zambuzzi and another in the late 1990s, THE CONQUEST OF MATHEMATIC Ruy José Giovanni, Benedito Ruy José Giovanni Castrucci and Junior. The results indicate that the math textbook published in the 1970s incorporated the trends of the modern education proposals and the LDB of 1971 and the other book has added some indication of the new LDB and the suggestions of the NCP in math, but even so the camouflaged geometric design is becoming part of the exercises of the approach.

Keywords: Geometry, geometric design, mathematics textbooks and mathematics education.

Lista de figuras

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este estudo nasceu das inquietações deste pesquisador enquanto professor de matemática da rede pública e privada, ao ministrar aulas de geometria para os ensinos básico e superior. Sendo professor do ensino fundamental e médio, há mais de 19 anos; e no superior, nos últimos 9 anos. Estas atividades proporcionaram contato com alunos de diversos níveis de conhecimento e, a partir dessa relação, foi possível perceber que havia algum problema durante as aulas quando abordava qualquer questão cujo foco de resolução fosse a geometria. Exercícios que envolviam áreas, perímetros, diagonais, enfim, diversas situações geométricas. Esse fato se constituiu num fator determinante na decisão de ir em busca de explicações para tais dificuldades em cursos de pós-graduação que permitissem estudar temas vinculados à geometria e à educação. Ao fazer a especialização Lato-Sensu, na Faculdade de Ciências e Letras Plínio Augusto do Amaral, em Amparo-SP, como trabalho de conclusão do curso fora desenvolvida uma pesquisa que resultou na monografia *O Ensino de Geometria no Contexto Educacional*, a qual aguçou a curiosidade em relação a diversos aspectos sobre o ensino de geometria, como a não abordagem na sala de aula e a inclusão nos últimos capítulos dos livros didáticos de matemática.

Entretanto, como professor do ensino superior, percebeu-se a dimensão das dificuldades que existiam na compreensão da geometria escolar e a falta de sua relação com o desenho geométrico, dificultando o processo ensino-aprendizagem nas aulas de geometria: questões como o não entendimento das alturas de um triângulo escaleno, um segmento tangente, uma corda e os exercícios que para serem resolvidos necessitam do auxílio do desenho geométrico foram fundamentais para que surgissem algumas inquietações sobre questões envolvidas no processo do ensinar e aprender geometria devido à importância que desempenha esta ciência na vida prática das pessoas, por se constituir num conhecimento fundamental no desenvolvimento do raciocínio lógico formal. Assim, dentre estes questionamentos, destacam-se: quais os fatores que acabaram contribuindo para que o ensino da geometria não fosse privilegiado pelas escolas de ensino fundamental e médio? Por que os professores não a ensinam?

Portanto, ao pensar em fazer a pós-graduação Stricto-Sensu, diante das dificuldades encontradas na prática profissional, procurou-se investigar o que estava acontecendo com o ensino desta parte da matemática - a geometria - que, enquanto educador matemático, considera-se de extrema importância devido à sua presença constante no quotidiano. Por isso, passou-se a observar alguns livros didáticos de matemática utilizados no ensino público e particular nas décadas de 1980 e 1990, e percebeu-se a desqualificação que é atribuída à geometria, sendo incluída no final do livro, além do distanciamento que há entre a geometria e o desenho geométrico, dois campos do conhecimento que têm uma relação intrínseca, desde a antiguidade grega, segundo Wagner (1993). Nestes livros, não é apresentado o desenho geométrico; porém, em alguns exercícios de geometria, solicita-se a resolução pelos alunos, exigindo tal conhecimento.

Na leitura de artigos, livros e periódicos, nas áreas de Educação e Educação Matemática, de autores como Ubiratan D'Ambrósio (1998), Sérgio Lorenzato (1995), Vagner Valente (1999), Antonio Miguel (2004) e Maria Ângela Miorim (1998), entre outros, constatou-se que o ensino da geometria deixou de ser abordado nas salas de aula a partir dos anos 60 do século XX e, quando acontecia, indicava uma série de distorções inclusive na forma como era seu conteúdo apresentado pelos livros didáticos de matemática, além do currículo que acabava excluindo-a, e da má formação dos docentes.

Segundo Célia Maria Carolino Pires (2000), isso ocorreu a partir da influência de um movimento internacional de renovação do ensino da matemática, caracterizado como Matemática Moderna, que foi implantado no Brasil, gradativamente, em meados da década de 1960. Devido às influências desse movimento, a preparação para a formação de técnicos para a crescente industrialização e a formação de um modelo de sociedade almejada pelo regime ditatorial de 1964, elaborou-se a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) nº 5692/71 que para o ensino de matemática, considerou a geometria uma área do conhecimento de menor prestígio para se estudar nas escolas e sugeriu que o desenho geométrico constasse como disciplina optativa da parte diversificada do currículo, alinhando-se aos ideais de ensino da época. Assim, verifica-se um esforço para retirar da escola assuntos que possibilitassem uma compreensão do espaço métrico, mas tal fato não ocorreu nas escolas que serviam às elites.

A Matemática Moderna recomendava nos seus princípios uma nova forma de ensinar matemática, aproximando-a da matemática abstrata, com uma abordagem dedutiva e formalizada fundamentada na simbologia da teoria dos conjuntos, não considerando questões intuitivas que envolvessem o contexto dos alunos, e excluindo a geometria por considerar uma área do conhecimento que não influenciava na matemática científica. Isso acabou contribuindo para excluir o desenho geométrico - que apresentava a construção das formas geométricas através de uma representação gráfica - da geometria, ciência responsável pela compreensão da métrica do espaço.

Este modelo permaneceu por 25 anos, até a publicação de uma nova LDB, em 1996, de nº 9394/96 e, posteriormente, a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática, em 1997. Com esses fatos o ensino de matemática foi submetido a alterações significativas, passando a atribuir grande relevância à aprendizagem da geometria e às construções geométricas como um meio para uma melhor formação intelectual das pessoas.

Este trabalho, portanto, representa uma oportunidade para repensar a respeito da inter-relação do desenho geométrico com a geometria - campos do conhecimento entrelaçados e que fazem parte do quotidiano de todas as pessoas, desde o momento em que elas passam a ter uma interação com o mundo que as cerca. Portanto, essa investigação busca chamar atenção para a ausência do desenho geométrico na abordagem que é dada à geometria nos espaços escolares entre 1970 e 2000, principalmente, no ensino fundamental II.

Diante disso, questionaram-se os caminhos que foram percorridos pela geometria nas escolas públicas de ensino fundamental II no Brasil, tendo como objeto da pesquisa os livros didáticos de matemática e, por meio deles, o objetivo de desenvolver uma análise da apresentação da geometria considerando como o desenho geométrico está associado na abordagem dos conteúdos, dos exemplos resolvidos e dos exercícios propostos aos alunos. Conforme afirma D`Ambrósio (2001), o desenho geométrico constitui-se em um elemento de extrema relevância para o ensino de geometria. Para ele, a ausência do desenho geométrico ou as construções geométricas, impossibilita uma melhor compreensão da geometria escolar.

Por isso, para atingir o objetivo proposto, realizou-se uma pesquisa na linha da História da Educação e da Educação Matemática visando a algumas considerações em relação ao ensino da geometria no período delimitado. Assim, buscou-se identificar como o desenho geométrico está inserido nos tópicos de geometria dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental II, utilizados em escolas públicas, considerando quais as mudanças e permanências entre estes tópicos e, como são apresentados os conteúdos e os exercícios.

Portanto, um dos meios encontrados para compreender parte da trajetória desse ensino foi, primeiramente, identificar os livros didáticos de matemática que foram mais utilizados naquele período, por acreditar que o livro é um dos importantes componentes do cotidiano escolar em todos os níveis de ensino, e que pode revelar a proposta de ensino de uma determinada ciência, num determinado período (CHERVEL, 1990). Ainda este autor afirma que a pesquisa de livros didáticos poderá contribuir para a compreensão de uma parte do complexo sistema escolar.

Para a realização desse trabalho, portanto, foi feito um levantamento dos livros, no qual foram identificadas 10 coleções de livros didáticos de matemática do antigo 1º grau, hoje ensino fundamental II, que foram adotados pelas escolas brasileiras entre 1970 e 2000. Após o levantamento, destacou-se para fonte de pesquisa empírica desta investigação duas obras, a saber, Orlando A. Zambuzzi com a *Matemática*, editada em 1976 pela editora ática e José Rui Giovanni, Benedito Castrucci e José Rui Giovanni Jr com *A Conquista da Matemática*, editada em 1998 pela editora FTD. Ambas destinadas à oitava série do ensino fundamental. Conforme Damázio (2006), estes foram os autores que mais conseguiram editar coleções de matemática para o 1º grau, hoje Ensino Fundamental, nas três últimas décadas do século XX. De acordo com Chervel (1990), a amplitude das obras de um autor constitui-se numa amostra para o desenvolvimento de uma pesquisa com livros didáticos.

A partir da decisão de analisar os livros citados acima, fez-se necessário, também, para o desenvolvimento dessa pesquisa, o delineamento dos critérios de análise:

1º. Separação dos capítulos que enfocam geometria nos livros didáticos.

2º. Análise da organização do conteúdo verificando a relação entre o desenho geométrico incluído na geometria.

3º. A abordagem que é apresentada para os conteúdos de geometria nos diferentes capítulos.

4º. Os exercícios de geometria que são propostos aos alunos fazem alguma referência ao desenho geométrico.

5º. As mudanças e permanências nos conteúdos de geometria e sua relação com o desenho geométrico.

6º. Alguns deslizes em relação ao conceito e argumentação entre outros aspectos.

Além disso, a pesquisa se apoiou numa bibliografia específica, com foco para o desenho, desenho geométrico, geometria, história da educação e história da Educação

Matemática e na própria experiência do pesquisador como professor de matemática e geometria há quase 20 anos.

Não se tem a intenção nesse trabalho de valorizar ou não o uso do desenho geométrico na aprendizagem da geometria. O que se pretende é caracterizá-los como objetos de pesquisa para que, ao se dialogar com eles, seja possível compreender melhor as suas marcas, seus usos e suas relações ontem e hoje, trazendo à tona elementos que podem contribuir para novos posicionamentos diante dos livros didáticos de matemática e também do ensino-aprendizagem de geometria, no sentido de se proporcionar a formação de cidadãos competentes e conscientes. Assim, a formação para a cidadania por meio de uma educação pela matemática prescinde que se considere o ensino desta disciplina como um condicionante à escrita e memorização de fórmulas, cálculos desprovidos de significado e isentos de contexto e história (PCN, 1997).

Visando a atender ao objetivo proposto, o estudo foi organizado em quatro capítulos. No primeiro, é apresentada uma abordagem histórica da geometria e do desenho geométrico, mostrando a intrínseca relação que tiveram estas áreas do conhecimento na história e como contribuíram para o avanço das ciências da humanidade. A geometria e o desenho geométrico surgiram a partir de necessidades práticas do homem e influenciaram no avanço de todas as civilizações, em especial a grega que, ao se apropriar destes conhecimentos, sistematizou a obra os *Elementos* que se tornou o parâmetro do que o conhecimento científico deveria seguir e conseguiu se estabelecer sem questionamentos por mais de vinte séculos. Porém, com a geometria não-euclidiana, um novo rumo foi dado ao conhecimento e surgiu uma nova forma de se interpretar o desenho geométrico e a geometria.

O segundo capítulo traz considerações sobre o ensino da geometria no Brasil, mostrando que as primeiras abordagens da geometria escolar eram associadas ao desenho geométrico; porém, a partir das reformas educacionais que começam em 1930, o desenho geométrico passa a ser uma disciplina independente e a geometria é incluída na matemática. Com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, LDB de 1971, o desenho geométrico passa a ser uma disciplina optativa, e à geometria recomendava-se uma abordagem superficial e compactada, com os conteúdos nos capítulos finais dos livros didáticos de matemática. Com a nova LDB, em 1996, a publicação do Parâmetro Curricular Nacional de Matemática (PCN, 1997) e as influências da Educação Matemática, enfatizam-se a urgência de se ensinar geometria e aparecem sugestões para tal ensino. Assim, dentre as sugestões, uma abordagem associada ao desenho geométrico é recomendada como um meio de contribuir na eficiência deste ensino e de uma melhor aprendizagem.

O terceiro capítulo faz considerações sobre a história do livro didático de matemática no Brasil, discutindo as alterações a que o livro foi submetido pelas reformas educacionais do século XX como: a Francisco Campos, a Gustavo Capanema, a LDB de 1971, e a de 1996. Também, faz uma referência ao impacto da Matemática Moderna na produção didática e as alterações propostas pelas LDB de 1971 e a de 1996, considerando como o desenho geométrico foi incluído na abordagem dada à geometria nestes livros. E ainda apresenta considerações sobre um livro didático de matemática, enfatizando a geometria e as construções geométricas numa proposta interdisciplinar marcada pelas tecnologias digitais.

O quarto capítulo apresenta a investigação, considerando o livro didático como fonte de pesquisa, examinando inicialmente o modo pelo qual os autores dos livros didáticos de matemática apresentam em suas obras os tópicos de geometria e como o desenho geométrico está incluído na abordagem que é dada à geometria, a partir dos critérios estabelecidos para a pesquisa, já mencionados anteriormente. Considerou-se também como o desenho geométrico está presente na abordagem dos conteúdos e dos exercícios, as permanências e alterações a que este ensino fora submetido nas três últimas décadas do século XX, e a concepção matemática defendida pelos autores.

O ensino da geometria no ensino fundamental que não se utiliza dos recursos que o desenho geométrico proporciona para tal atividade constitui assim, um obstáculo à aprendizagem desta ciência criando assim um obstáculo à oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico e espacial do aluno, no período que ele se encontra em pleno desenvolvimento.

Portanto, fazer um estudo sobre a relação do desenho geométrico incluído na geometria dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental, poderá contribuir para o entendimento do intrincado ensino de geometria no Brasil.

CAPÍTULO I
1.A GEOMETRIA E O DESENHO GEOMÉTRICO

Este capítulo faz uma abordagem da geometria, do desenho e do desenho geométrico enquanto conhecimentos que surgiram a partir das necessidades práticas da humanidade, como as figuras nas paredes das cavernas, delimitar áreas, construções de utensílios e de monumentos até os dias de hoje. Apresenta uma discussão histórica mostrando a relação de proximidade entre estas áreas do conhecimento, desde a mais remota antiguidade até a atualidade. Também relaciona a influência que estes elementos tiveram para o avanço do conhecimento da sociedade, no sentido de atingir a estrutura social e científica com as alterações de seus conceitos dando suporte para o surgimento de uma nova geometria, a não-euclidiana, fundamental a estrutura da teoria da relatividade que revolucionou e influenciou todas as ciências do século XX.

1.1 O desenho, o desenho geométrico e a geometria

Com o avançar dos séculos, o homem se deu conta dos poderes expressivos da linha para manifestar suas ansiedades e descobertas e, em todas as épocas, demonstrou possuir acuidade visual e aptidão para registrar graficamente a vida através do traço, do risco, do contorno, do ver nascer a forma, seja ela bi ou tridimensional. Segundo Antonio Pedro Carvalho (2001, p. 19) “o mundo é construído pelo desenho, dando ao homem um poder nunca experimentado”. Através do desenho transmite suas ideias, manifestando seus deuses, medos, prazeres, conhecimentos, valores, tudo é apresentado num simples olhar, de modo direto e intuitivo em sua forma mais completa (CARVALHO, 2001). É importante perceber que o desenho expressa a competência pictórica e pode se adaptar a qualquer natureza do conhecimento. Assim, “o desenho é linguagem tanto para a arte quanto para a ciência” (SMOLE, 2000, p.86). Para Luiz Vidal Gomes (1996, p.13), “o desenho é uma das formas de expressão humana que melhor permite a representação das coisas concretas e abstratas que compõem o mundo natural e artificial em que vivemos”. Como ciência, o desenho, devido à sua amplitude, destaca aqui as construções geométricas, que foram muito utilizadas na antiguidade grega, principalmente associadas à geometria, e contribuíram muito para o aperfeiçoamento da matemática.

De acordo com Nascimento (1994), o desenho geométrico pode ser entendido como uma maneira de tornar visível as interpretações esquematizadas dos modelos, elaborados pela mente humana. Estruturado sobre a geometria, ele é visto como um instrumento capaz visibilizar essas elaborações da mente, por meio do traçado com rigor e precisão das propriedades da matemática.

A geometria é a parte da matemática que busca compreender o espaço a partir de propriedades, definições, postulados e conceitos. De acordo com o educador matemático Ubiratan D'Ambrósio (2001), a geometria é uma ciência oriunda da matemática que estuda as propriedades do espaço e trata de problemas métricos, como o comprimento de distâncias, o cálculo das áreas de figuras planas e da superfície e volume de corpos sólidos. Expressa grandezas que podem ser representadas com exatidão, conduzidas por quantidades e posições proporcionadas pelo desenho geométrico. Sua origem, segundo Carl Boyer, não tem uma opinião única, pois,

> o historiador Heródoto afirmava que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido de necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria (BOYER, 1996, p. 4).

Aristóteles e Heródoto apresentaram concepções distintas sobre a origem da geometria, entretanto, se convergem na indicação da sua origem. Naquela época, ainda não se tinha conhecimento e nem estudos sobre a pré-história por isso, estes filósofos atribuem ao Egito a origem da geometria. Segundo BOYER (1996, p. 4), "o homem do neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém, seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriram caminho para a geometria".

Para Maria Ângela Miorim (1998), os primeiros conhecimentos sobre geometria foram elaborados a partir das necessidades do homem em compreender e entender melhor o espaço onde ele se encontrava, o que talvez justifique a origem de sua palavra. No sentido etimológico da palavra, a geometria deriva do grego "geometrein" e significa medição de terras - geo: terra, metrein: medir- surgindo como ciência empírica para resolver problemas práticos do homem. Assim, de acordo com Nilson José Machado (2000, p.48),

> parece não haver dúvida quanto ao fato de que os primeiros conhecimentos de natureza geométrica derivam de resultados empíricos relacionados com medições de terras, construções arquitetônicas, determinações de áreas ou volumes, como no antigo Egito.

Boyer (1996) afirma que essa geometria tinha explicações intuitivas; porém, a partir das abstrações percebidas pelos filósofos gregos em sua busca da racionalidade do universo, de explicações e definições rigorosas dos conceitos e postulados, as construções geométricas, neste contexto, foram fundamentais na apresentação formal da nascente geometria dedutiva, como útil instrumento na concretização de suas relações em representações visuais.

Além disso, é importante ressaltar que muitas teorias da matemática têm sua origem na abstração de modelos geométricos. Porém, a construção destes modelos só se realiza mediante ao desenho geométrico ou às construções geométricas. A geometria e o desenho geométrico se completam e se reforçam, sendo aplicados em inúmeras situações práticas.

As construções geométricas foram a base para o avanço da geometria dedutiva, ou seja, a geometria euclidiana, e esse modelo foi fundamental para o avanço da ciência moderna, sendo usado até hoje em todos os países nas engenharias e nas indústrias (MIORIM, 1998).

A construção de uma teoria geométrica, inicialmente, fundamenta-se em certos conceitos, aos quais se acrescentam postulados e definições, a fim de deduzir teoremas e propriedades. Assim, a linguagem gráfica configura-se como um meio universal de se propagar a compreensão imediata e a interpretação exata dos símbolos usados através de desenhos. Portanto, o desenho geométrico, através do seu rigor e precisão, aliado às possibilidades de representar os elementos abstratos como o ponto, a reta e o plano, torna-se um instrumento útil e adequado à descrição dos elementos revelados pela geometria. Portanto, esses conhecimentos, ambos de origem prática, apresentaram uma relação de interdependência em toda a história e tornaram-se conhecimentos científicos ao demonstrarem possuir método, rigor, precisão e dedução.

1.2 História do desenho, da geometria e do desenho geométrico: uma intrínseca relação de cumplicidade

O desenho é uma ciência cuja origem coincide com a do homem, a partir da urgência em satisfazer as suas necessidades, tais como: projetar moradias, demarcar áreas ou confeccionar potes e cestas, em que se revelam exemplos de congruência, simetria e segmentos de retas, que são elementos básicos da geometria elementar. Nos primórdios da humanidade, segundo Boyer (1996), não havia documentos, nem uma preocupação em registrar os fatos; portanto, era impossível acompanhar a evolução da matemática, principalmente, a geometria e sua relação com o desenho geométrico, desde um desenho específico até um teorema conhecido. Assim, o que se tem de concreto para se escrever a história da matemática são os registros que os homens fizeram e chegaram até nós através de pinturas, desenhos, construções e instrumentos de várias espécies.

Uma das características do homem é a interação com os seus semelhantes, e isso gera a necessidade de se estabelecer um canal de comunicação entre eles. Neste contexto, o desenho aparece como linguagem e expressão antecedente à escrita, e assume um papel fundamental no desenvolvimento das civilizações, desde a mais remota antiguidade, dentre outras formas, pelo grafismo paleolítico (BOYER, 1996). Assim, segundo Frederic Barbier (2008, p.27), “nas civilizações do norte (Escandinávia), os petroglifos geométricos do paleolítico se multiplicam no neolítico 10000 a.C., até se construírem um sistema coerente de símbolos” que acabou por influenciar a escrita pictórica que, para este autor, surgiu por volta de 3300 a.C., na Mesopotâmia, representando objetos concretos com ajuda do desenho.

Certamente, ali está registrada a primeira manifestação do desenho como forma de expressão e de comunicação deixada pelo homem, à qual se tem acesso na contemporaneidade. Através desses desenhos, segundo Smole (2000, p.87), “manifestam-se operações mentais como imaginação, lembrança, sonho, observação, relação, simbolização, estando por isso implícita ao desenho uma conversa entre o pensar e o fazer”. Assim, por meio desses desenhos, o homem revelava a visão que tinha do mundo e como percebia os fatos, os animais e as pessoas do seu meio e, principalmente, como ele se percebia neste mundo. Essa manifestação pode ser constatada a partir de representações com um caráter realístico e naturalista, como no caso do desenho do bisão da caverna em Altamira, na Espanha.

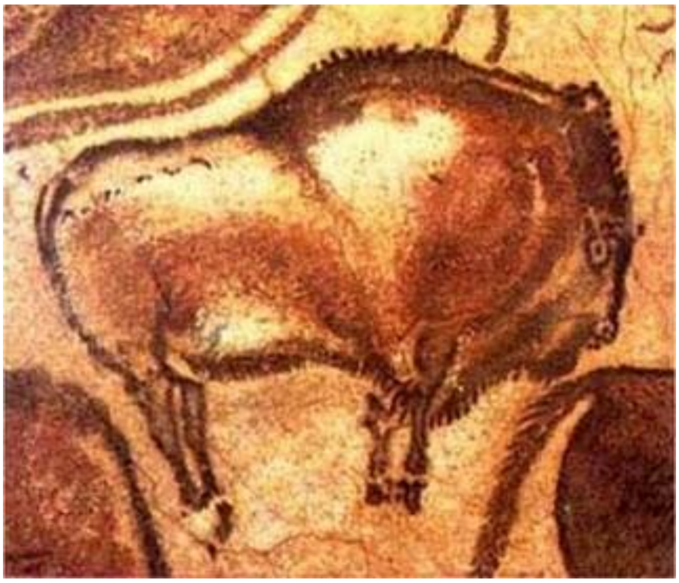


Figura 01. Bisão da caverna – Espanha
Fonte:http//sobrearteeimagens.blogspot.com

Através dos desenhos paleolíticos brasileiros, na serra da Capivara, no Piauí, entretanto, pode-se observar que os homens dessa época demonstravam, intencionalmente ou não, certa compreensão de parâmetros geométricos, delimitando traços com outro rigor na representação geométrica, diferentemente dos desenhos realísticos naturalistas. Como exemplo, neste caso, pode-se verificar um triângulo no centro da figura 02. Esta representação se diferencia dos padrões naturalistas e realistas seguindo para um abstracionismo na visualização e na representação das formas geométricas, que é a compreensão de polígonos.

Afirma D'Ambrósio (1996) que, em diversos outros momentos em que a geometria fora empregada pelos povos considerados primitivos na construção de objetos de decoração, utensílios, enfeites e na criação de desenhos para a pintura, formas geométricas como triângulos, quadrados e círculos, além de outras mais complexas envolvendo simetrias com grande riqueza e variedade, aparecem em cerâmicas, cestarias e pinturas de diversas culturas.

Para este autor, portanto, quando o homem usava as formas, mesmo que empiricamente, ele estava fazendo matemática, a qual tem grande importância e utilidade para a sua sobrevivência, pela praticidade em resolver situações e problemas quotidianos.

Figura 02. Arte Rupestre - Piauí - Brasil
Fonte:
http://www.google.com.br/images?q=serra+da+capivara+neolitico+brasileiro+piaui&tbnid=SS7BcLHYT1132M

Em suas palavras, a matemática é "uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural" (1996, p. 7).

Figura 03. Pote neolítico
Fonte: http://prehistoriadaarte.blogspot.com/2009/07/2-arte-na-pre-historia-neolitico.html

Essa matemática é produto de suas atividades quotidianas, como na construção do pote, figura 03, que manifesta compreensão de forma, volume e da geometria e, no seu imaginário, de um desenho. Na decoração, mediante desenhos, constata-se a presença de polígonos, paralelismo, perpendicularismo, ângulos e simetria, demonstrando compreensão da geometria empírica.

A geometria e o desenho geométrico, enquanto ramos da matemática foram utilizados nas atividades empíricas dos povos que viveram na antiguidade. Os registros deixados pelos homens são os indícios de que estes conhecimentos foram desenvolvidos a partir de necessidades práticas da humanidade e chegaram até nós por meio de registros em livros e pergaminhos manuscritos, gravuras, desenhos, instrumentos utilitários e rabiscos traçados nas paredes das cavernas (D'AMBRÓSIO, 1997).

À medida que o desenho e a geometria foram se aprimorando, as civilizações que atribuíram uma maior importância a estes conhecimentos foram as que tiveram maior destaque em relação às outras. Como exemplos, podem ser citados os babilônios, os hindus e os egípcios (BOYER, 1996). É importante perceber que a geometria e o desenho estão presentes em todas as civilizações, independentemente de cultura, credo ou espaço geográfico, e exerceram uma influência muito grande no desenvolvimento de todos os setores da sociedade.

A geometria desenvolvida pelos povos babilônios, hindus e egípcios, de acordo com Boyer (1996), era empírica e, em geral, estava relacionada à mensuração prática de utensílios, terras e construções de monumentos e aquedutos. Para que isso se concretizasse, o desenho era um meio de se planejar a situação que depois seria executada e, portanto, a partir dos desenhos e da geometria, esses povos conseguiram realizar progressos nos campos das engenharias e matemáticas, da educação, das artes e das ciências em geral.

O avanço desses povos pode ser constatado através das pirâmides que foram construídas no Egito, que revelaram o conhecimento de geometria prática e de desenho que aquela civilização já detinha.

Figura 04. Pirâmides do Egito
Fonte: http://setimoportal.wordpress.com/2009/04/page/3/

Os povos antigos mais desenvolvidos, como os egípcios, chineses, romanos e gregos, dentre outros, usavam a geometria e o desenho, principalmente, para a topografia, a navegação, a astronomia e a construção de templos. Uma atividade importante nas civilizações antigas, particularmente no Egito, consistia em medir as terras para fixar os limites das propriedades apropriadas para a agricultura, prática que era peculiar aqueles povos. Naquela região, as enchentes anuais do rio Nilo acabavam por inundar as áreas próprias para o cultivo e derrubavam os marcos fixados no ano anterior obrigando os sacerdotes a refazerem os limites de suas áreas e redistribuírem as terras.

> Disseram-me ainda os sacerdotes que Sesóstris realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos certo tributo. Se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à posição restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia (HERÓDOTO, 2001, p. 116).

Com a necessidade de refazer os limites das propriedades, os sacerdotes faziam um planejamento através de um desenho da área e, em seguida, efetuavam a divisão e apresentavam outro desenho com os lotes e as dimensões de cada um. Essa divisão era baseada em informações parciais, e era feita quando as fronteiras eram destruídas por completo. Assim, tratava-se de refazê-las de modo a demarcar o desejado número de propriedades, conservando as áreas relativas que possuíam no passado (EVES, 2002). Tudo isso só se tornou possível porque esta civilização teve como instrumento auxiliar o desenho que, afirma-se, eram as construções geométricas ou o desenho geométrico no seu estado de latência.

Os egípcios tornaram-se hábeis delimitadores de terras e devem ter inventado e utilizado inúmeros princípios úteis relativos às características de linhas, ângulos e figuras, como por exemplo, o de que a soma dos três ângulos de um triângulo é igual à de dois ângulos retos, e de que a área de um paralelogramo é igual à do retângulo que tenha a mesma base e a mesma altura (EVES, 2002). Com a apropriação das técnicas do desenho, esses povos acumularam um campo de conhecimento que os habilitava a resolver problemas de traçado de limites, de comparação de áreas, de projetos arquitetônicos e engenharias de construção, estratégias de guerras, dentre outros. Esta visão pragmática desses povos fez com que eles, por intermédio da observação, da experimentação e dos desenhos, obtivessem resultados geométricos através do raciocínio indutivo que veio influenciar as bases do pensamento grego.

Os egípcios, babilônios, fenícios e outras civilizações da antiguidade já desenvolviam uma geometria que tinha como fundamento as suas necessidades práticas, e não apresentava nenhuma preocupação com a organização e sistematização desse conhecimento. Diversos documentos históricos mostram que os egípcios e os babilônios já conheciam muitas características do desenho e da geometria que, nos seus vestígios, apresentavam casos particulares dos teoremas de Tales, envolvendo proporcionalidade geométrica, e de Pitágoras, expressos em relações como $3^2 + 4^2 = 5^2$ (BOYER, 1996). Estes documentos influenciaram muito na forma de pensar dos gregos, pois a geometria grega, de caráter formal, foi um avanço da geometria prática desenvolvida por outras civilizações anteriores, a que eles tiveram acesso.

De acordo com Eves (2002), apesar de todo o material algébrico e geométrico que os egípcios, os babilônios e os fenícios possuíam, eles não tiveram condição de apresentar a matemática como uma ciência sistematizada com teoremas, definições e demonstrações. Apenas a partir dos séculos V e IV a. C., na Grécia floresceram diversos ramos do conhecimento como a física e das artes, atribuindo à matemática características de uma ciência dedutiva, voltada para o intelecto. Com isso, a geometria e o desenho geométrico deixam de lado o caráter essencialmente prático e intuitivo que lhes sustentava, e passam a necessitar de uma compreensão abstrata.

Por volta do século V a.C, segundo Eduardo Wagner (1993), os antigos matemáticos gregos compreendiam a geometria vinculando-a às construções geométricas, e se preocupavam apenas com as relações que podiam obter geometricamente. Assim, a matemática grega, com as características que lhe são peculiares (dedução e abstração), distingue-se da babilônica e da egípcia pela forma como era entendida e interpretada (apenas prática). Contrariamente a estes últimos, os gregos fizeram-na uma ciência propriamente dita, em que a verdade, para ser considerada, necessitava não apenas de aplicação intuitiva, mas de provas, mediante uma demonstração dedutiva. Os gregos não se preocupavam com as aplicabilidades práticas da geometria. Para eles, esta era uma ciência de caráter abstrato.

Os matemáticos gregos perceberam o que os egípcios compreendiam: a geometria e o desenho geométrico como conhecimentos de base empírica, em que a observação direta seria capaz de revelar a realidade. Porém, os gregos, diferentes dos egípcios, apreciavam a geometria não apenas em virtude de suas aplicações práticas, mas em virtude de seus interesses teóricos, desejando compreender a matéria por ela mesma e não em termos de sua utilidade. Para os gregos, apenas o critério empírico não revelava a estrutura íntima da geometria. Assim, procuraram encontrar demonstrações dedutivas e rigorosas das leis acerca do espaço no campo das aplicações práticas da geometria euclidiana. Afirma Wagner (1993, p.1) que:

> as construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos pitágoricos e tiveram enorme importância no desenvolvimento da geometria grega. Na Grécia antiga, a palavra número era usada só para os inteiros e uma fração era considerada apenas razão entre números. Estes conceitos, naturalmente, causavam dificuldades nas medidas das grandezas. A noção de número real estava ainda muito longe de ser concebida, mas na época de Euclides, século III a.C, uma nova idéia apareceu. As grandezas, no lugar de serem associadas a números, passaram a ser associadas a segmentos de reta. Assim, o conjunto dos números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos.

A partir do desenvolvimento do desenho geométrico, interpretado como construções geométricas, os gregos marcaram a história da geometria dando a ela um modelo científico. Esta geometria está sistematizada há 300 a.C na obra de Euclides, os *Elementos*, constituído de 11 volumes, que agregou todos os conhecimentos desenvolvidos pelos matemáticos anteriores.

Nesta obra a geometria é apresentada com uma abordagem que prioriza o rigor em todos os aspectos e se tornou o parâmetro para o desenvolvimento das ciências clássicas e modernas. De acordo com Machado (2000, p.48), "é apenas na Grécia, por volta do século III a.C., com os trabalhos de Euclides, que a geometria logrou uma notável sistematização, tornando-se modelo de organização do conhecimento em quase todas as áreas".

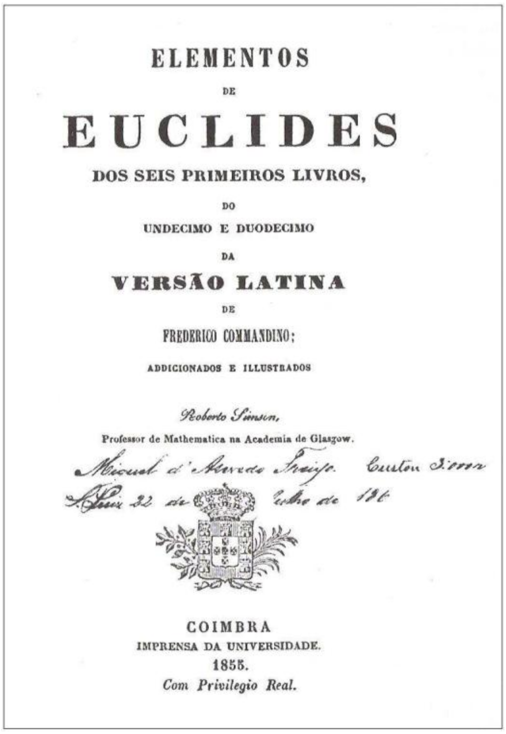

ELEMENTOS
DE
EUCLIDES
DOS SEIS PRIMEIROS LIVROS,
DO
UNDECIMO E DUODECIMO
DA
VERSÃO LATINA
DE
FREDERICO COMMANDINO;
ADDICIONADOS E ILLUSTRADOS
Roberto Simson,
Professor de Mathematica na Academia de Glasgow.
COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.
1855.
Com Privilegio Real.

Figura 05. Capa do livro "Elementos de Euclides"
Fonte: http://www.livrosgratis.net/download/1799/elementos-de-geometria-euclides.html

Os *Elementos* não foi apenas o livro texto de geometria, mas o modelo daquilo que o pensamento científico deveria ser (D'AMBROSIO, 1997).

Nesta obra, Euclides deu um tratamento diferenciado à geometria, apresentando-a um molde dedutivo e às construções geométricas, e recomendando utilizar apenas instrumentos como a régua não graduada e o compasso. Esses fatos representaram um avanço fundamental na capacidade de raciocínio abstrato da humanidade. Para ele, não havia diferenciação entre o desenho geométrico e a geometria (BOYER, 1986). Assim, era apenas geometria.

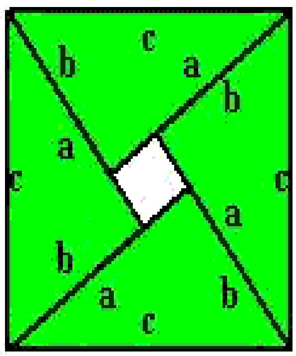
Com o avanço da racionalidade entre os povos e a interação entre as culturas, houve a necessidade dessas ciências se propagarem, isso fomentou a multiplicação desses conhecimentos por meio de apenas uma obra, Os *Elementos* que abordava a geometria e o desenho geométrico. De acordo com Machado (2000, p.54)

> não sabemos se Euclides escreveu os *Elementos* para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época(...), naquele tempo não havia a preocupação pedagógica dos dias de hoje, de sorte que Euclides alcançou os dois objetivos; e os *Elementos* foram muito usados no aprendizado da matemática por mais de dois milênios.

Contribuíram na formação dos princípios que levaram à elaboração da geometria euclidiana os conhecimentos de matemáticos anteriores, como Tales e seu discípulo Pitágoras que, ao se apropriarem de todo o conhecimento de geometria e construções geométricas das civilizações egípcia, babilônica e da hindu, desenvolveram-nos e os aplicaram às construções, à navegação e à religião de uma forma mais sofisticada. Por meio dessas aplicações, Euclides entendeu que a origem desses conhecimentos estava baseada no estudo do ponto, da reta e do plano e, a partir desses entes primitivos, isto é, que não têm definição, estabeleceu axiomas, postulados, definições e teoremas que estruturam a construção de variadas figuras planas e espaciais (EVES, 2002).

Nesta época havia uma grande preocupação com o ensino da geometria, pois esta era ensinada no centro de ciência mais avançado da época, a escola pitagórica, e não era permitido que ninguém a frequentasse sem conhecer a geometria. Esse conhecimento era de fundamental importância para a formação dos filósofos e dos futuros governantes. Seu ensino se caracterizava pela exclusão de todo “vestígio da experiência sensível” e teria o papel de definir os “espíritos mais talentosos” (MIORIM, 1998, p.19). Assim, buscava-se uma abordagem abstrata da geometria não a relacionando com situações que envolvessem o quotidiano, mas com a finalidade de dificultar a aprendizagem, como meio de selecionar os mais competentes. Porém, as construções geométricas eram articuladas à geometria.

De acordo com Eves (2002), naquela época, devido à necessidade das civilizações avançarem, cresciam e se multiplicavam os escritos sobre construções geométricas e geometria, bem como o interesse pelas mesmas. O compasso logo substituiu a corda e a estaca para traçar círculos e o novo instrumento foi incorporado ao arsenal dos geômetras. Neste período, o desenho geométrico foi um conhecimento de fundamental importância para o avanço das demonstrações da matemática grega. As primeiras demonstrações do teorema de Pitágoras foram apresentadas por meio do desenho. Assim, o matemático hindu “Bhaskara desenhou a figura e não ofereceu nenhuma explicação, mas tão somente a palavra ‘veja’” (EVES, 2002, p. 258).



$$c^2 = 4\frac{1}{2}ab + (a-b)^2 = a^2 + b^2$$

Figura 06 Demostração de Bhaskara
Fonte:http://www.dm.ufscar.br/hp/hp0/hp0.html

Posteriormente, Arquimedes (séc. III a.C.), segundo Boyer (1996), com as suas construções geométricas tendo com referencial a obra de Euclides, antecipou Newton ao calcular a área delimitada por uma curva entre dois eixos orientados e, assim, estabelecera o conceito de limite, desenvolvendo fundamentos indispensáveis ao cálculo diferencial e integral, que só veio a ser sistematizado no século XVII e foi um dos pilares da ciência moderna.

Para Machado (2000, p. 49),

> os trabalhos de Euclides influenciaram do ponto de vista da forma praticamente todas as empreitadas de sistematização do conhecimento que lhe sucederam por mais de dois mil anos, como por exemplo, em meados do século XVII, a que Newton levou a efeito a Mecânica, ou a que Spinoza pretendeu realizar no campo da ética.

A abordagem da geometria apresentada nos escritos de Euclides causou grande impacto nas ciências e na filosofia e se tornou o modelo para a produção e o desenvolvimento da matemática por mais de vinte séculos, sendo o método axiomático por ele empregado a base do que hoje se chama matemática pura. Assim, constata-se que o conhecimento do desenho geométrico e da geometria é construído em diferentes culturas, e isso deve levar em consideração, como parte integrante da história da matemática, a história das práticas e dos conhecimentos matemáticos únicos, particulares, existentes em diferentes culturas.

1.2.1 Surgem outras geometrias

Na Europa, do século X ao XVIII, o intercâmbio entre diversas culturas criou, a necessidade de tradução de diversas obras para o latim, a partir de fontes árabes. Isto criou uma atmosfera de ideias que alteraram as ciências e as artes, configurando o renascimento que se culminou com o iluminismo, que contribuíram para o homem se libertar dos dogmas da Igreja que propagou a sua ideologia por onde foi possível. Destas traduções, a obra mais notável foi os *Elementos* de Euclides, que incluía uma abordagem abstrata tendo como suporte, ou elemento de visualização, as construções geométricas.

Com a recuperação das obras científicas da antiguidade, nas universidades européias criou-se uma estrutura para o surgimento de uma nova fase da matemática, da geometria, do desenho geométrico e das ciências em geral. Com a releitura e outras interpretações destas obras, de acordo com Miorim (1998), passaram a surgir duas concepções para o entendimento da geometria: os não realistas, que apóiam o enfoque platônico, compreendendo-a como produto do pensamento humano que existe independente dos homens; e os realistas que adotam a visão aristotélica, ou seja, interpretando-a como uma ciência intuitiva de características práticas. Nesta, o desenho geométrico é um elemento fundamental por representar situações práticas do quotidiano. Essas formas distintas de interpretar e conceber a geometria criaram condições para que os estudiosos do assunto, na época, procurassem outras formas de reestruturar essa área da matemática a partir dos princípios euclidianos.

Ainda no século XVI, coube a René Descartes (1596 – 1650) a fusão entre a geometria euclidiana e a álgebra, estruturando assim mais um campo da geometria, a analítica. Nesta geometria o desenho geométrico teve uma importância secundária. Para Eves (2002, p. 383), “a essência real dessa geometria reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente”. Posteriormente, Ponclet (1788-1867) concebeu a geometria projetiva a que estuda o mundo da forma que o vemos, enquanto a geometria euclidiana, vai além e, se preocupa em compreender o mundo em sua essência. Como por exemplo, ao observar os trilhos de uma ferrovia retilínea, tem-se a impressão de que os trilhos vão se encontrar num ponto distante, apesar de eles serem paralelos.

Figura 07. Trilhos de uma via férrea
Fonte: http://www.publicdomainpictures.net/view-image.php?picture=railway-track&image=2859&jazyk=PT

Esta geometria é fundamentada na concepção dos realistas, baseada em regras empíricas, negligenciando, então, o rigor das propriedades euclidianas e direcionando o interesse sobre as propriedades visuais da figura, através do desenho geométrico.

Ainda para Eves (2002), o desenho geométrico no século XVIII foi fundamental nas obras de matemáticos como Maclaurin (1698 – 1746) que, em 1719, publicou trabalhos de grande importância na área de geometria orgânica e de propriedades da geometria linear, ao investigar a atração mútua de dois elipsóides de revolução, ambos usados na composição química, nos quais mostrou uma extensão dos resultados dos estudos que Newton desenvolveu sobre cônicas, cúbicas e curvas algébricas de grau superior a três. Esta geometria aprece nos arranjos de átomos de carbono que se enrolam para formar tubos longos, cujo diâmetro mede entre 1 e 2 nanômetros.

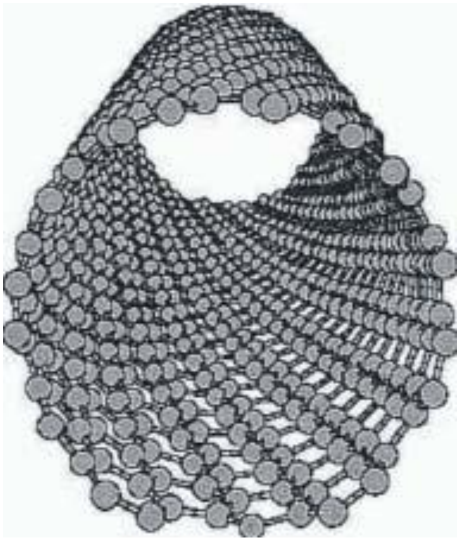


Figura 08. Geometria orgânica. arranjos de átomos de carbono
Fonte:http://www.eca.usp.br/caligrama/n_4/10_ReginaKopke_COMP.pdf

Neste mesmo século, o matemático francês Gaspar Monge (1746 – 1818) desenvolveu uma técnica sofisticada de desenhar, aprimorando a perspectiva desenvolvida pelos gregos antigos, chamando atenção da comunidade científica da época e estabelecendo os pilares da geometria descritiva, também chamada de geometria mongeana, cujo objetivo consiste em representar objetos de três dimensões num plano bidimensional. Essa geometria ganhava uma sistematização rigorosa, que hoje é aplicada não apenas na geometria e nos desenhos e projetos técnicos, mas também nas artes e na fotografia (EVES, 2002). Esta nova área da geometria caracterizou-se como uma parte da matemática que tem por fim representar sobre um plano as figuras do espaço, de modo que possam ser visualizadas com o auxílio do desenho geométrico e da geometria plana.

Monge, ao aprimorar a geometria descritiva, acabou por renovar a geometria analítica e a geometria infinitesimal do espaço. Seus numerosos discípulos estão na origem do movimento geométrico do século XIX. De acordo com Eves (2002, p.489), Monge "contornou o tedioso procedimento aritmético da época substituindo-o por outro geométrico mais rápido", qual seja, colocar os objetos geométricos em perspectiva para uma maior visualização e, consequentemente, um maior entendimento dos conceitos e propriedades.

O desenvolvimento da perspectiva permitiu um grande avanço na visualização dos sólidos. Assim, é possível verificar abaixo alguns paralelepípedos em perspectiva, que passa a imagem tridimensional de um sólido construído num plano. Convém pontuar que a perspectiva só foi possível com as técnicas aprimoradas do desenho geométrico e “possui postulados relacionados ao comportamento da visão humana” (CARVALHO, 2001, p.41).

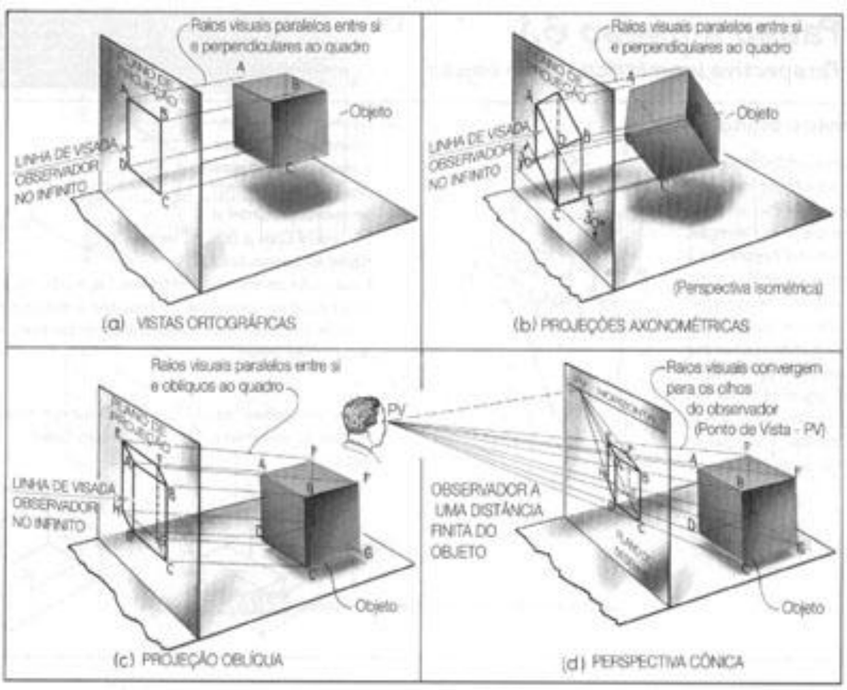


Figura 09. Cubos em perspectiva
Fonte: http://www.cce.ufsc.br/~scheidt/perspectiva.html

A perspectiva, para Arnheim (2007, p.273), “mostrou a preferência cientificamente orientada pela reprodução mecânica das construções geométricas” originada das percepções visuais e susceptível a uma explicação rigorosa, não contrariando os princípios da geometria euclidiana.

No questionamento das provas consistentes apresentadas por Euclides na sua geometria, surgem novas interpretações a partir do quinto postulado, que consiste em: “por um ponto fora de uma reta é possível traçar uma única reta paralela à reta dada” (MACHADO & CUNHA, 2007, p.231). Segundo Eves (2002), diversos matemáticos se empenharam em tal desafio que consistia em apresentar uma demonstração consistente para o referido teorema, mas nestas tentativas, perceberam a existência de uma nova forma de entender e explicar o universo a partir da negação desse postulado.

Este novo entendimento da geometria se deu a partir de estudos desenvolvidos pelos matemáticos Gauss (1777 – 1855), Lobatchevsky (1792 – 1856) e Riemman (1826 -1866), que propuseram uma geometria não-euclidiana, ou seja, com postulados diferentes dos da geometria euclidiana. Essa nova geometria, segundo Boyer (1996), foi o pilar de todo o desenvolvimento científico e tecnológico que atingiu o século XX, sendo utilizada na interpretação do universo dada pela teoria da relatividade de Einstein, em 1905. Esse avanço da geometria é veiculado pelas linguagens do desenho geométrico e pela simbólica matemática.

Figura 10. Circle limit III
Fonte: http://artperceptions.blogspot.com/2010/02/m-c-escher.html

Nesta nova geometria, os postulados e teoremas da geometria euclidiana são superados. Como exemplo, na figura 10, a soma dos ângulos internos de um triângulo é diferente de 180º. Esse entendimento foi fundamental para a superação dos postulados inquestionáveis da geometria euclidiana que, por mais de vinte séculos, permaneceram intactos. Assim, surgem referenciais teóricos para uma nova abordagem nas ciências com um novo modelo de compreensão do universo. Essas mudanças conceituais

> estão associadas ao aparecimento da Física relativística, de Einstein, em que o tempo e o espaço são concebidos de modo distinto de newtoniano, deixando de serem considerados de modo absoluto, e passando a depender de velocidades envolvidas, o que conduziu a resultados estranhos, mas de maneira alguma ilógicos (MACHADO & CUNHA, 2007, p.236).

Desde as primeiras manifestações da geometria demonstrativa inaugurada na antiguidade pelos gregos e que culminou com os *Elementos* de Euclides até a sua superação pelas geometrias não-euclidianas no século XIX, as construções geométricas foram elementos que contribuíram em todos os avanços dessas geometrias, assim como para a compreensão dos conjuntos numéricos. O conjunto dos números reais, para o qual os gregos apresentaram um caminho para o seu entendimento só veio a ser desvendado no final do século XIX com o matemático alemão George Cantor (1845 -1918), em cujos estudos estabelecera a axiomática dos números reais, dando uma grande contribuição para os fundamentos da matemática (WAGNER, 1993).

De acordo com Carvalho (2001), tão variadas quanto os modos de expressão gráfica são as geometrias, que se classificam em diversas. Todas dão apoio às aplicações essenciais para o progresso material e intelectual da atual sociedade. De cada uma delas se ramificam outros tantos tipos de desenhos para usos especializados, englobando o conjunto das diversas funções exercidas pelos homens.

Portanto, a geometria e o desenho geométrico, sempre caminharam juntos e devido às suas universalidades, contribuíram em toda a história do conhecimento da humanidade auxiliando diversas áreas, tais como: engenharia, química, física e educação, entre outras.

CAPÍTULO II

2. PERSPECTIVAS DA GEOMETRIA E DO DESENHO GEOMÉTRICO NA EDUCAÇÃO

Neste capítulo, busca-se demonstrar como a geometria e o desenho geométrico enquanto conhecimentos intrínsecos passaram para o interior dos espaços escolares públicos brasileiros. O ensino da geometria e do desenho geométrico no Brasil colônia estava relacionado às aplicações militares, como a construção de fortes e artilharias para a defesa dos novos domínios portugueses. No Brasil império, devido às influências européias, e com a necessidade do país avançar nas ciências e na tecnologia, estes conhecimentos foram considerados de suma importância, por isso, passaram a ser difundido pelas instituições de ensino, principalmente a partir de 1836, com a implantação dos primeiros liceus e escolas normais. A abordagem da geometria escolar era associada ao desenho geométrico nesses espaços e durou mais de um século. No século XX, com a reforma educacional de 1930, houve a unificação da matemática com geometria, álgebra, aritmética e trigonometria; o desenho geométrico transformou-se numa disciplina independente. Com as influências da Matemática Moderna e da Lei de Diretrizes e Bases (LDB) de 1971, (nº 5692/71), que não priorizou a geometria e o desenho geométrico transformando-o em uma disciplina optativa. Apenas em 1996, com a nova LDB, (nº 9394/96), e o Parâmetro Curricular Nacional de Matemática - (PCN) em 1997, enfatiza a urgência de se ensinar geometria com uma abordagem associada ao desenho geométrico.

2.1 Um breve histórico do ensino da geometria e o desenho geométrico na matemática escolar no Brasil

Em relação à história do ensino da matemática escolar no Brasil durante os três primeiros séculos de existência pouco se sabe, principalmente sobre a geometria e sua relação com o desenho geométrico no ensino primário e secundário, pois a educação estava a cargo dos colégios jesuítas e, nestes a matemática não fazia parte do elenco das disciplinas (VALENTE 1999; MIORIM, 1998). Conforme afirma Miorim (1998), apenas no final do século XVIII, as escolas jesuítas passaram a ensinar matemática, incluindo aritmética, desenho geométrico e geometria, como no caso do colégio jesuítico da Bahia.

Entretanto, no final do século XVI e início do século XVII, já se ensinava a matemática – geometria – nas escolas militares portuguesas que não eram de nível superior. Portugal, ainda metrópole do Brasil, avançava nas conquistas de terras e era preciso defender seus domínios ultramarinos. Por isso, a corte investiu no ensino militar, porque era preciso formar mão de obra capaz de proteger e administrar as terras sob seu domínio. Aqui no Brasil, instituíram e organizaram conteúdos para estudo nos centros militares, cujo foco eram os conhecimentos úteis como a matemática, a geometria, o desenho e a construção de fortes para a formação de profissionais que, de acordo com Valente (1999, p.46), tivessem "competência técnica para levar a cabo o levantamento de mapas com latitudes com os novos métodos empregados na Inglaterra e na França e habilitava engenheiros a construir fortificações para a defesa dos domínios ultramarinos".

De acordo com D'Ambrosio (1999), a maior evidência do surgimento da matemática escolar no Brasil vem exatamente destes esforços para constituir um quadro administrativo e técnico para a defesa da nova conquista.

A matemática que era estudada e ensinada no Brasil nestes primeiros duzentos anos tinha objetivos práticos voltados para as atividades militares. Até então nas escolas ainda não se lecionava matemática, porém em algumas escolas elementares foram ensinadas as quatro operações aritméticas e nos cursos de arte foram ministrados tópicos mais adiantados, como por exemplo, geometria elementar (SILVA, 2003).

Em 1759, a reforma pombalina, influenciada pelos princípios iluministas, que trazia o discurso de espalhar luzes a todos os segmentos sociais, instituiu-se as aulas régias em Portugal e, no Brasil, com o objetivo de preencher a lacuna deixada após a expulsão dos jesuítas. No entanto, Miorim (1998) considera essas aulas como um retrocesso, pois eram oferecidas em locais diferentes, de forma avulsa, sem nenhuma organização oficial, ficando por conta dos professores determinarem os conteúdos e horários das aulas, enquanto que os alunos se matriculavam ou se afastavam das aulas quando desejavam. A autora atribui à criação das aulas régias às modificações dos conteúdos escolares desse período, a exemplo da introdução de novas disciplinas como álgebra, aritmética e geometria. Nas aulas de geometria, abordavam-se tópicos de áreas de figuras e volume de sólidos. Segundo Miorim (1998), as aulas de geometria eram consideradas obrigatórias, pois num edital em 1772, do então governador de São Paulo ordenava-se que todos os estudantes e pessoas conhecidamente curiosas se matriculassem na aula que se havia de abrir para o ensino de geometria. Aqueles que, infringindo o determinado nesse edital, se não se apresentassem a alistar perante o professor, seria submetido a uma pena.

Com a vinda da Família Real de Portugal para o Brasil, em 1808, houve a necessidade de se criar uma infra-estrutura que possibilitasse a permanência desta família e também da aristocracia na colônia por um período que poderia se prolongar. Este fato contribuiu para o desenvolvimento do ensino da matemática (D'AMBROSIO, 1999; VALENTE, 1999). Com isso, foram então criadas, de imediato, as primeiras escolas superiores: as de medicina na Bahia e no Rio de janeiro, e a Academia Real Militar no Rio de Janeiro. Na Academia Real Militar criou-se o curso de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com a duração de quatro anos, sob fortes influências francesas, marcando, assim, o início de um novo momento na matemática escolar brasileira, visto que os manuais escolares passaram a conter elementos de aritmética, álgebra e geometria, "como novas alternativas para apresentar os elementos das matemáticas", (VALENTE, 1999, p.195), visando elementarizar as matemáticas.

A fundação do Imperial Colégio Pedro II, em 1837, inspirada na organização seriada dos colégios franceses e com a "predominância das disciplinas clássico-humanistas, garantiu a presença das matemáticas, ou seja, aritmética, geometria e álgebra e, mais tarde, trigonometria, em todas as oito séries do ensino secundário da época" (MIORIN, 1998, p.87). Ainda para esta autora, neste colégio, o desenho geométrico fazia parte da abordagem que era dada à geometria plana.

Para Miorim (1998), devido às influências exercidas pelo então colégio, o tratamento aos conteúdos matemáticos na escola secundária era feito também com disciplinas isoladas e, na abordagem que era dada ao ensino da geometria, havia uma certa preocupação com as construções geométricas.

Devido às características teórica e abstrata da geometria, ela começa a se estruturar como uma disciplina dedutiva a partir das influências dos docentes do Colégio Pedro II, referência para a educação nacional, não só para os estudos de matemática da escola secundária, mas também para outras áreas do conhecimento. Era também um modelo de ensino para ser copiado pelos liceus que estavam em fase de implantação e para as reformas no âmbito da educação.

2.1.1 O ensino da geometria e o desenho geométrico na educação brasileira do século XIX

Na segunda metade do século XIX, o Brasil viveu um período de efervescência de novas idéias e propostas pedagógicas para a organização da estrutura educacional. O aparecimento de traduções de livros sobre ideias e práticas pedagógicas de outros países, principalmente da França, modificou os princípios do ensino e configurou uma nova forma de ensinar e aprender.

Nesse período, os intelectuais brasileiros interessados na educação nacional e influenciados pelos ideais cientificistas e positivistas, propuseram o ensino da geometria por meio das construções geométricas, já que, em outros países passara a ser mais valorizado por serem necessárias pessoas habilitadas com domínio desses conhecimentos para atenderem a áreas específicas dentro de uma nova concepção de economia, estruturada na crescente industrialização e na modernização dos meios e vias de transportes (RUI BARBOSA, 1947 apud NEVES, 1993).

Os mestres que orientavam pedagogicamente o tal ensino, na época, centravam-se em Rosseau (1712-1778), Pestalozzi (1741-1827), Froebel (1782-1752) e Montessori (1870-1952), que fizeram recomendações para que fossem construídos modelos para ensinar geometria e, dentre estes modelos, o desenho deve ser incluído. De acordo com Miorim (1998), Rousseau revolucionou a pedagogia da época ao sugerir que no processo educativo, uma atenção com a aprendizagem da criança ao valorizar a educação um processo que partia dos objetos sensíveis em direção aos objetos intelectuais contribuindo para uma mudança na concepção pedagógica que se tinha em relação aos métodos educativos. Recomendou questões inerentes à vida dos alunos para o ensino da aritmética e da geometria e do desenho. Este modelo de educação influenciou Pestalozzi, que aprimorou as idéias de Rousseau e incluiu o caráter psicológico para o ensino.

No Brasil, nas últimas décadas do século XIX, a importância de se ensinar desenho nas escolas foi recomendada por Rui Barbosa, devido à grande valorização que era atribuída ao mesmo na Europa.

Rui Barbosa (1947) apud Aniceh Neves (1993), ao reconhecer o caráter multidisciplinar do desenho, definiu-o como um ato fundamental à sobrevivência do homem e ao desenvolvimento do conhecimento da humanidade, diversificando-se e especializando-se de acordo com suas aplicações, exercendo uma grande influência no desenvolvimento da geometria e da matemática e de outras áreas do conhecimento. É importante salientar que o desenho geométrico contribuiu para o progresso das disciplinas relacionadas com a matemática, como a geometria e a topologia. Também, é um código que permite que se efetive a construção e a translação das figuras geométricas, e auxilia no desenvolvimento da percepção espacial constituindo a representação da imagem mental da forma geométrica que está se buscando compreender, pois, de acordo com Arnhein (2007, p. 155), o "desenho é um símbolo da coisa real". Daí, a sua importância para a compreensão da geometria, principalmente, no processo ensino-aprendizagem, como facilitador da compreensão abstrata tanto para o professor quanto para o aluno.

Para Neves (1993), o desenho geométrico é uma modalidade de representação gráfica vinculada à geometria que, ao possibilitar a visualização das abstrações geométricas, requer uma atividade eminentemente racional nas soluções de problemas geométricos, os quais, sem o apoio dessas construções, não apresentam sentido. Ainda para esta autora, o desenho geométrico é um auxiliar na visualização plana e espacial, pois, além de facilitar constatações de teorias matemáticas, pode-se afirmar, é uma maneira de concretizar as abstrações da geometria que contribui no raciocínio humano para a resolução de problemas que exigem visualização e entendimento das propriedades geométricas. Essa visualização por meio do desenho geométrico se transforma, portanto, em elemento fundamental para as questões abstratas que envolvem o ensino da geometria, principalmente, para os alunos do ensino fundamental e médio devido à faixa etária.

De acordo José Carlos Puntoki (1998), no desenho geométrico entra o fator grandeza: há uma representação rigorosa da figura, atendendo às propriedades matemáticas e geométricas; envolve uma situação problema-reflexão; exige um traçado preciso e rigoroso conseguido com auxílio de instrumental específico.

Assim, elabora-se um projeto de implantação do desenho nos cursos da escola primária e no ginásio, e o desenho geométrico é proposto para o curso normal. Apesar das discussões no âmbito da educação não incorporarem as concepções de Rui Barbosa, estudos indicam que as construções geométricas e a geometria euclidiana plana foram valorizadas de forma crescente no Brasil (NEVES, 1993). De acordo com Valente (1999), buscava-se a valorização do ensino da geometria e do desenho geométrico calcada na resolução gráfica, com instrumentos e resolução de problemas, passando a ser oficialmente recomendado para as escolas públicas.

Nesse período, o ensino de geometria e desenho no Brasil sofreu as influências de duas grandes correntes pedagógicas: A naturalista, fundamentada em princípios empíricos, anunciada por J. J. Rousseau; e outra de inspiração mais racionalista, de caráter dedutivo, tendo por base o desenho geométrico, primeiramente exposta por Pestalozzi e, depois, continuada por Froebel e J. Guillaume na França, no final do século XIX, mas também defendida por H. Spencer (1820-1903), sendo precursora das correntes modernas da didática do desenho que se fundamentam na psicologia e nas novas teorias do conhecimento (ZUIN, 2004). Isso implica novas abordagens para o ensino da geometria. O caráter puramente empírico que marcou o ensino na tendência naturalista acabou contribuindo para que, a partir da experimentação se chegasse a uma geometria dedutiva e abstrata através de modelos traçados pelas construções geométricas.

Rui Barbosa (1947) apud Neves (1993), enfatiza a importância do ensino do desenho nas escolas brasileiras, ao propor mudanças através da "Reforma do Ensino Secundário e Superior", em 1882, e da "Reforma do Ensino Primário e várias Instituições Complementares da Instrução Pública", elaborado em 1883, apresentando um projeto substitutivo para o currículo escolar, sendo que o desenho comparece nos cursos da escola primária média e primária superior, e o desenho geométrico é proposto para o curso normal.

Em 1891, a reforma da educação promovida pelo ministro e secretário de estado dos negócios e da instrução pública Benjamin Constant, proporcionou adaptações no sentido de dar uma característica prática ao ensino, visando torná-lo científico e ativo. Esta reforma foi fundamentada no sistema filosófico de Augusto Comte, o Positivismo, rompendo com a tradição clássico-humanista que estruturava a escola secundária e tentando impor-lhe um caráter mais científico. As idéias positivistas que direcionavam tal filosofia colocaram a matemática e as disciplinas como geometria, desenho e física como conhecimentos fundamentais para o bom desenvolvimento das ciências. Como o sistema comteano estava apoiado em dois pilares, tendo o método de um lado e a enciclopédia dos conhecimentos do outro, a matemática se subdividia em duas áreas: a abstrata, com a álgebra; e a concreta, com a geometria e a mecânica (SILVA, 2003).

No ensino primário, havia desenho, que era uma parte da geometria prática, assim, seria o desenho geométrico (NEVES, 1993). No secundário o programa de geometria era amplo, abrangendo geometria descritiva, teoria das sombras, perspectivas, álgebra e cálculo diferencial e integral. A relevância à geometria era tão expressiva que seus conhecimentos eram exigidos nos cursos jurídicos, nas escolas de Belas Artes e nos cursos de cirurgias (VIEIRA, 2005).

As indicações do Colégio Pedro II, no final do século XIX, para o ensino de geometria nas escolas secundárias era de uma apresentação dedutiva, não mais associando o desenho geométrico ou as construções geométricas em tal ensino, fato que também contribuiu para que, no século seguinte, o desenho geométrico se tornasse uma disciplina independente, com programa e carga horária definidos.

No final do século XIX, a influência da concepção francesa positivista do ensino da geometria predominava nas instituições de ensino no Brasil. Tal modelo instituía que a construção do conhecimento se dava a partir do reducionismo cartesiano, ou seja, do particular para o geral com grande abstração dos processos matemáticos. E a geometria se constituía como uma disciplina isolada, com uma abordagem não relacionada aos fatos do quotidiano, porém associadas às construções geométricas. Apesar disso, naquele momento, o ensino da matemática no Brasil ainda não apresentava bases sólidas, pois não havia unificado as idéias dos campos inerentes à matemática como a álgebra, aritmética e geometria.

2.2 A geometria incluída na matemática e o desenho geométrico como disciplina independente no século XX

No final do século XIX, o Brasil sofreu profundas mudanças em todos os setores com o fim da monarquia e a implantação da república, o desenvolvimento da atividade industrial e a urbanização de algumas capitais. Estas mudanças políticas e econômicas, de caráter positivista, acabaram por influenciar a estrutura educacional do início do século XX, refletindo no modo de ensinar, nos conteúdos a serem ministrados, na relação entre professor e aluno e na influência da psicologia no ensino.

Segundo Manacorda (1999), neste início de século, vários movimentos sociais atingiram o Brasil, como Semana de Arte Moderna, a fundação do partido comunista, o grande avanço do setor industrial, o desenvolvimento da agricultura e sua modernização. Simultaneamente a esses e outros movimentos que colocavam em confronto o velho e o novo, a área educacional refletia sobre os anseios de uma parcela da sociedade. Ainda para este autor, alguns segmentos exigiam mão-de-obra especializada para o setor industrial que estava em desenvolvimento, e, em outros, havia a expectativa da manutenção de um sistema educacional que preconizava uma formação clássica. Nesse cenário, uma nova proposta de educação estava sendo cogitada para o Brasil, a Escola Nova, a partir das idéias de Dewey.

Assim, a partir de 1906, observa-se que o ensino do desenho e da geometria se fez presente nos regulamentos aprovados para os ensinos normal e primário em diversos estados devido ao movimento da Escola Nova que preconizava estas áreas do conhecimento como fundamental para o desenvolvimento intelectual das pessoas (ZUIN, 2004). Porém, Pavanello (1993), assinala que nesse período o ensino da geometria tinha um forte enfoque lógico-dedutivo e isto acabava causando distorções nas salas de aulas, provocando a não aprendizagem porque nas abordagens não incluía aspectos práticos desta disciplina.

Durante mais de um século, o desenho geométrico foi lecionado e confundido com a disciplina geometria. Assim, não havia uma compreensão por parte dos professores em relação aos conceitos e objetivos de cada uma dessas disciplinas, e isto contribuía para que a ênfase fosse dada, então, para os seus aspectos mais elementares, sem maiores vinculações com finalidades teóricas ou práticas (VALENTE, 1999).

Nas três primeiras décadas do século XX devido à industrialização crescente e a crise econômica que atingiu o mundo em 1929, havia urgência do país se industrializar para ficar menos dependente das importações. Tal fato contribuiu para que o desenho, que era considerado um instrumento da técnica, passasse a ter suma importância como disciplina nos currículos escolares. Nessa época, outras formas de representação gráfica começaram a ser consideradas, na tentativa de dar uma maior abrangência aos diversos ramos aplicados ao desenho, como o seu entendimento enquanto arte e enquanto ciência, e aí se incluem o geométrico, o industrial e o técnico, entre outros (GOMES, 1996). De acordo com Ana Mae Barbosa (1978, p. 103), "isso levou a uma nova forma de interpretar o desenho como um instrumento didático, técnico e um elemento informativo de natureza psicológica", com grande importância na formação das pessoas. Portanto, a psicologia e a industrialização exerceram grande influência nos programas escolares elaborados a partir de 1930.

Com a ascensão de Getúlio Vargas ao poder, em 1931, houve a necessidade de alterar o modelo de educação, pois, segundo D'Ambrósio (1999), nessa época, o ensino marcado pelo Positivismo não mais se adaptava à realidade emergente. Assim, organiza-se, através do então Ministro da Educação e Saúde Pública, Francisco Campos, uma nova reforma na educação brasileira que tinha como objetivo a formação do homem para todos os setores da atividade nacional e tirar o caráter exclusivamente propedêutico dos cursos preparatórios existentes para adequar o sistema às novas exigências econômicas e sociais do Brasil. Essa reforma foi regulamentada pelo decreto nº 19.890 de 18/04/1931.

Neste período, o ensino do desenho geométrico, de acordo com Gomes (1996), havia se tornado uma disciplina obrigatória nos currículos das escolas secundárias, e acabava por contribuir diretamente com o ensino da geometria, prestando grande auxílio à visualização espacial, além de facilitar constatações de conceitos geométricos, podendo-se afirmar que é uma maneira de concretização de abstrações destes conceitos. Ainda para este autor, a imagem por meio do desenho geométrico desempenha uma função importante na aprendizagem, pois facilita a interpretação dos conceitos da geometria.

Assim, a abordagem proposta para o ensino do desenho parece refletir a preocupação com uma formação mais ampla, sendo incluído nas cinco séries do primário. Então, surgiram os programas de ensino. Segundo Miorim (1998), foi atribuída ao professor de matemática Euclides Roxo a tarefa de reestruturar o ensino de matemática do país, que acabou por unificar geometria, álgebra e aritmética, interligando-as em torno de uma única disciplina. Porém, o desenho geométrico que era atrelado à geometria passou a ser uma disciplina independente, e uma portaria que foi expedida em 1931 considerou-o como elemento fundamental para a cultura de um povo. Numa outra portaria, publicada no mesmo ano regulamentou-se o ensino do desenho, cujo objetivo geral era habilitar o aluno a utilizar-se da construção e da representação gráfica como um meio de aquisição de conhecimento e de expressão da cultura (GOMES, 1996).

De acordo com Valente (1999), no período que antecedeu esta reforma, o ensino da matemática apresentava-se fragmentado. Não existia a disciplina de matemática; os alunos cursavam aritmética, álgebra, geometria e trigonometria separadamente na escola. Para Machado (2000), com a chegada da reforma, houve a unificação dos campos de conhecimento da matemática que se tornava interessante do ponto de vista matemático, pois todas as áreas deste conhecimento se complementam e mantêm relações intrínsecas entre si.

Ainda no governo de Getúlio Vargas, o Estado Novo, o então ministro da educação e da saúde, Gustavo Capanema, promove uma nova reforma da educação, que leva o seu nome. Essa reforma fora instituída em 1942, através da Lei Orgânica do

Ensino Secundário, a fim de dar novas bases ao ensino. Nela, o decreto nº 4.244 de 09/04/1942 favoreceu a retomada dos ideais escolanovistas, que acabavam aproximando a geometria e o desenho geométrico com as artes, crescendo a preocupação com a psicologia e evidenciando o valor educativo do desenho. Esse período, Saviani (1993) caracterizou como psicologismo pedagógico, reforçando a concepção do desenho como auxiliar didático.

Já na década de 1950, a educação básica brasileira foi atingida pela portaria de 1951, regulamentada como Portaria Ministerial nº 966, cujo objetivo era estabelecer um programa de matemática mínimo a ser desenvolvido nas escolas, diante da expansão do ensino básico no Brasil e da impossibilidade de se manter o controle acerca de que tipo de geometria se estava abordando nas salas de aulas. Nesta reforma, a portaria nº 1045 atribui ao desenho geométrico a função de traçar segmentos, figuras planas, espaciais e em perspectiva, sendo assim um suporte para o ensino da geometria. Porém, a concepção de ensino que permeava as escolas, segundo Fiorentini (2004), era a de uma geometria inatista, a-histórica, pronta e dogmática, fundamentada em fórmulas sem maiores explicações. Didaticamente, o aprendizado possuía o caráter livresco, sendo que os livros didáticos reproduziam conteúdos estáticos, com uma abordagem baseada em definições e teoremas sem preocupação com as aplicações práticas, e o aprendizado consistia em memorização.

De acordo com Zuin (2002), o ensino do desenho abrangia desde a representação do natural, passando por exercícios de colagens, estudo da cor e composição decorativa, além dos traçados que, partindo da geometria ofereciam ao estudante aplicação de seus princípios na concretização plena da expressão gráfica de uma ideia ou conceito sem relacioná-la com o contexto. Essa desvinculação do desenho geométrico com a geometria acabou prejudicando a aprendizagem das duas disciplinas, comprovando assim a concepção de um modelo de educação fragmentado revelando descaso para estas áreas do conhecimento.

Assim, constata-se que estas reformas buscaram a superação do velho pelo novo, resultando num certo equilíbrio que, apesar das modificações importantes no ensino da geometria e do desenho geométrico, determinadas concepções e procedimentos didáticos continuaram presos a padrões estabelecidos no início do século, como uma retomada dos ideais da Escola Nova.

Segundo Ubiratan D’Ambrósio (2005), grande mudança no ensino da matemática se iniciou no final do século XIX e continuou por todo o século XX, tendo por ideal a pesquisa no sentido de colocar a matemática num contexto formal, lógico e dedutivo. Os estudos da obra do grupo Bourbaki, um grupo de matemáticos franceses, que se expandiram tanto na Europa quanto nos Estados Unidos, já atingiam o ensino da matemática superior por meio das estruturas matemáticas e de novas simbologias. O objetivo destes matemáticos era levar esta concepção de ensino-aprendizagem da matemática para todos os níveis de escolaridade.

Essas informações aparecem diversas vezes em trabalhos que tratam da história do ensino de matemática. Os estudos desenvolvidos por Miorim (1998), Valente (2004) e Werneck (1996) e Miorim & Miguel (2004) são alguns dos exemplos. Outra característica de grande parte desses trabalhos é que as informações, sobre as reformas realizadas nos Estados Unidos, na Europa e em outros países são mobilizadas para, de alguma forma, buscar a “influência” dessas reformas no Brasil.

2.3 O ensino da geometria e o do desenho geométrico na Matemática Moderna

A crescente industrialização e urbanização, a ditadura militar de 1964, e as influências da Matemática Moderna, entre outros fatos, uma nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação, (LDB), é instituída em 1971. Nesta, o desenho geométrico que era uma disciplina independente passa a ser uma disciplina optativa, e à geometria, que já refletia resultados insatisfatórios devido ao caráter abstrato que lhe fora imposta pelas últimas duas reformas, recomendava-se uma abordagem de caráter fundamentada na simbologia da teoria dos conjuntos com aspectos dedutivos. Esta nova concepção de ensino da matemática foi de grande importância para o desenvolvimento da Educação Matemática no Brasil, ao fomentar diversas pesquisas em que educadores matemáticos como D’Ambrósio (1997), Lorenzato (1995), Fiorentini (2004) e Miorim (1998) constataram o prejuízo que a ausência desses conhecimentos causa formação intelectual das pessoas. As discussões realizadas pelos educadores matemáticos acabaram contribuindo para o surgimento de uma nova LDB, em 1996, e do Parâmetro Curricular Nacional de Matemática, (PCN, 1997), que enfatiza a urgência de se ensinar geometria e, com uma abordagem associada ao desenho geométrico.

Com as influências de diversos fatores políticos e econômicos que marcaram o século XX, como já foram citados anteriormente, a partir de 1960 acrescenta-se a internacionalização do capitalismo e o lançamento de um satélite russo, o Sputinick, em 1957, e a considerável defasagem tecnológica e científica da sociedade industrial, pós segunda guerra mundial. Segundo D'Ambrósio (1997), a matemática é a responsável por todo o conhecimento científico e tecnológico que a sociedade conseguiu alcançar.

O lançamento do Sputinick pela Rússia, um país não alinhado com o bloco capitalista, chamou atenção para o avanço tecnológico que imperava nesse país, assim inicia-se na Europa e nos Estados Unidos um movimento de renovação do currículo escolar da matemática que foi proposto por diversos grupos de estudos e pesquisas que visavam a atender esta perspectiva de ensino que resultou na Matemática Moderna.

A denominada Matemática Moderna deveria priorizar nos seus programas uma abordagem com ênfase nos aspectos estruturais e lógicos da matemática com a introdução da teoria dos conjuntos, estruturas algébricas, relações e funções, atribuindo pouca importância ao estudo dos conteúdos de geometria e desenho geométrico na escola em todos os níveis. De acordo com Célia Maria Carolino Pires (2000), os currículos para a matemática escolar apresentavam ainda uma proposta explícita de seus compromissos com o progresso técnico e científico, assumindo a matemática como base de uma cultura voltada para a ciência e a tecnologia, tendo como meta ensinar ao aluno mais a abstrair do que a se preocupar com aplicações diretas voltadas para o seu meio, a sua vida no dia-a-dia. Neste movimento, segundo Pires (2000), os conteúdos foram alterados no sentido de tornar o ensino de matemática mais voltado para o formalismo por meio de uma pedagogia ativa, sem dogmas, que trabalhasse de forma enfática a imaginação dos alunos a partir de uma concepção piagetiana do ensino.

O ensino de matemática no Brasil sofreu fortemente as influências desse movimento. No que se refere aos conteúdos de matemática, costuma-se dizer que havia consenso entre os especialistas quanto aos tópicos da teoria dos conjuntos, da álgebra, da análise, do cálculo de probabilidades e estatística; porém, havia divergências, relativas ao ensino da geometria, embora com uma inclinação comum no sentido de rejeitar esta área da matemática durante os ensinos de 1º e 2º graus (PIRES, 2000). Segundo Zuin (2002) para a geometria, era indicada uma abordagem superficial, não a relacionando com o desenho geométrico que é de suma importância quanto ao aspecto instrumental e para a organização do pensamento lógico-dedutivo.

A LDB de 1971 atribuiu à geometria pouca importância, passando a ser considerado um conteúdo de pouca relevância para a formação cidadã, e o desenho geométrico, antes conhecimento obrigatório nos currículos, se tornou uma disciplina optativa na grade curricular.

O ensino do desenho geométrico nas escolas brasileiras permaneceu nos currículos oficialmente por 40 anos consecutivos, compreendendo um período de 1931 a 1971. Essa situação se manteve apesar da LDB de 1971 estabelecer opções de currículo em que o desenho geométrico não era disciplina obrigatória, acabando por permanecer nos cursos técnicos de segundo grau que ofereciam uma formação tecnológica e nas escolas que serviam às elites (ZUIN, 2002). E a geometria que constava nos programas escolares foi reduzida, e seria incluída como tópicos restritos no final dos livros didáticos de matemática (LORENZATO, 1995). Isso caracterizava uma forma de mostrar que esses conhecimentos não seriam importantes para a compreensão do mundo e, por isso, não seria incluído de forma ampla nos currículos de matemática. Neste período, o desenho geométrico se tornou uma disciplina optativa não tendo carga horária definida e, não mais trabalhado com uma abordagem geométrica, como era anteriormente, que servia de suporte para a aprendizagem da geometria. No Brasil, essa nova forma de conceber estes dois campos do conhecimento aconteceu em virtude da influência dos pressupostos da Matemática Moderna, que visava distanciar estes conhecimentos das escolas. Pois, no entendimento dos modernos, estas disciplinas não contribuíam com o avanço científico que eles pretendiam, por ter relações diretas com atividades práticas.

Essa reforma, principalmente no que tange à reestruturação a que o ensino da matemática fora submetido, fez com que o estudo de geometria e do desenho geométrico ficasse em segundo plano, "ignorando a grande contribuição na formação intelectual das pessoas e a sua importância nos diversos campos do conhecimento" (GOMES 1996, p.67).

Com essa reestruturação, o desenho geométrico fora inserido na educação artística, saindo assim da área das ciências exatas; e a geometria sofreu cortes significativos em diversos tópicos, passando a ser uma área do conhecimento que, até nas graduações, havia certo descaso, segundo Lorenzato (1995).

Isto acabou influenciando diversos setores responsáveis pelo ensino de geometria como os cursos de formação de professores e as licenciaturas em matemática que focariam apenas conteúdos que estivessem em consonância com a proposta de ensino veiculada pela Matemática Moderna e, por isso, acabavam-se formando professores que não dispunham de habilidades para trabalhar com geometria.

Essa forma de entender e trabalhar a matemática escolar, fundamentada numa concepção abstrata e dedutiva tem o objetivo de formar especialistas matemáticos, não havendo a preocupação com o caráter pragmático e nem com as relações histórico-culturais dessa ciência. Este modelo de ensino acabou formando pessoas com uma concepção acrítica da matemática, não percebendo a sua integração com os fatos da vida quotidiana, como a política, a produção de bens de consumo, a construção civil, a indústria automobilística entre outros.

2.4 O ensino de geometria e desenho geométrico sob a influência da LDB de 1996 e do Parâmetro Curricular Nacional de Matemática

Na década de 1970, com o apogeu da Matemática Moderna no Brasil e as novas propostas de conteúdos e abordagem para a matemática escolar, a geometria revestiu-se de uma concepção superficial, não sendo privilegiada nos currículos, nem nos livros didáticos de matemática (PIRES, 2000). De acordo com Lorenzato (1995), esses fatos contribuíram para o abandono dessa área do conhecimento na escola básica. O desenho geométrico, como já foi citado, passou a ser uma disciplina optativa na escola, depois de permanecer por mais de 40 anos como uma disciplina fundamental para o desenvolvimento da percepção das pessoas e também um suporte indispensável ao ensino da geometria (ZUIN, 2002).

Estes fatos causaram distorções no ensino da matemática, gerando reflexões e análises que contribuíram para o desenvolvimento de pesquisas no campo da Educação Matemática. A Educação Matemática para pesquisadores como Fiorentini & Lorenzato (2006, p.5), é:

> uma área do conhecimento das ciências sociais ou humanas que estuda o ensino e a aprendizagem da matemática e caracteriza-se como uma práxis que envolve o domínio do conteúdo específico (a matemática) e o domínio de ideias e processos pedagógicos à transmissão/assimilação e/ou à apropriação/construção do saber matemático escolar.

Entretanto, sendo a prática educativa determinada por uma prática social mais ampla, pode-se conceber a Educação Matemática, de acordo com Fiorentini (2004), como resultante que se estabelece entre o específico e o pedagógico num contexto constituído de dimensões histórico-epistemológicos, psicognitivas, históricos, culturais e sociopolíticas.

Assim, vários pesquisadores da Educação Matemática, como Lorenzato (1995) e Pavanello (1993), afirmaram que nas últimas três décadas do século XX houve certa preocupação por parte dos professores, da comunidade científica que pesquisa o assunto e da sociedade de um modo geral, pelo resgate do ensino da geometria nas escolas, tendo em vista a importância que esta ciência desempenha no desenvolvimento de um tipo de raciocínio que ajuda a pessoa a “compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (PCN, 1997, p. 55).

Neste período, segundo Miorim (1998), o ensino da geometria passou por um processo de abandono progressivo, tanto nas escolas de ensinos fundamental e médio, antigo primeiro e segundo graus, respectivamente, e também nas graduações. Assim, nas escolas, segundo Elizabete Z. Burigo (1989), as aulas de geometria eram expositivas, apresentando aos alunos exercícios padronizados, que deveriam ser resolvidos da mesma maneira que um “problema modelo”, com ênfase nos cálculos por meio de fórmulas e a não apresentação das construções geométricas. As demonstrações dos teoremas eram expostas pelo professor e decoradas pelos alunos para apresentação nas provas. Os recursos utilizados não iam além do giz, quadro-negro e livro-texto, se houvesse.

Também acabaram contribuindo para que não se ensinasse geometria nas escolas, a perda de objetividade no ensino; a massificação do ensino; as fortes influências da Matemática Moderna; a maneira como a geometria era apresentada nos livros didáticos de matemática com uma abordagem superficial e sem nenhuma relação com as construções geométricas e nem com o contexto. Com isso, acabavam contribuindo para que ela não fosse abordada nas escolas e, quando era ensinada, apresentava-se fundamentada em fórmulas sem aplicações práticas causando, assim, um obstáculo a sua aprendizagem. De acordo com Fiorentinni & Lorenzato (2006, p. 137)

> essa geometria fora apresentada de forma elementar, estanque, não considerando os conceitos, as particularidades das construções geométricas, e também desligadas da realidade, não se integrado às outras disciplinas do currículo ou mesmo com os outros conteúdos matemáticos. Dessa forma, ela se tornava mais vulnerável à descartabilidade pelo professor, quando ocorriam dificuldades nos conteúdos que a precediam.

A falta de relação da geometria com o contexto e as construções geométricas cria um ambiente que mostra que não há relevância para que se estude tal assunto, e isto prevaleceu por um longo período em tal ensino no Brasil. Afirma Lorenzato (1995, p.5) que, "sem conhecer geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão matemática torna-se destorcida".

Neste período, o sistema escolar brasileiro se afirmava, sendo uma escola para a classe trabalhadora e outra para as elites. De acordo com (ZUIN,2002), os conhecimentos inerentes à geometria, como as construções geométricas e a ênfase aos aspectos dedutivos e práticos dessa ciência, faziam parte do elenco dos conteúdos a que os alunos oriundos das elites tinham acesso. Ainda para esta autora, apesar das propostas vigentes da exclusão da geometria e das construções geométricas, elas continuaram nas escolas que serviam às elites.

Isto permite afirmar que, neste período, o ensino da geometria e as construções geométricas com régua e compasso permaneceram em determinadas escolas que serviam a grupos específicos da sociedade, como um conhecimento importante para o avanço das capacidades intelectuais das pessoas, enquanto que, nas escolas das classes trabalhadoras, em sua grande maioria, não havia preocupação com esta área do conhecimento.

Porém, no início da década de 1980, as propostas da Matemática Moderna começaram a receber críticas consistentes de educadores matemáticos de todo o mundo, devido aos resultados insatisfatórios deste tipo de ensino (D'AMBRÓSIO, 2001), que resultou na publicação da obra *O Fracasso da Matemática Moderna*, do matemático americano Morris Kline, no final dos anos 70. Estes fatos contribuíram para o recuo desse movimento no Brasil.

Segundo D'Ambrósio (1997), este livro tece críticas contundentes ao exagero da forma dedutiva de tratar os conteúdos matemáticos, também ao formalismo e à linguagem utilizada pela Matemática Moderna, empobrecendo a vida e o espírito da matemática. Ainda para este autor, os conceitos abstratos não deveriam ser explorados no nível elementar, pois defendia que o princípio para um ensino de geometria bem fundamentado consiste em criar situações através dos livros didáticos e outros aparatos metodológicos, para que a abordagem tome como ponto de partida o que o aluno traz do seu cotidiano.

De acordo com Flávia Soares (2001, p. 116),

> o livro de Kline, apesar de publicado no Brasil três anos após sua divulgação, nos Estados Unidos, foi um marco decisivo para o esgotamento do Movimento em nosso país. As críticas não vinham apenas dos meios acadêmicos; pais de alunos e, também, a imprensa denunciavam as superficialidades da simbologia da matemática moderna e o tempo "perdido" com o ensino da teoria dos conjuntos. Admitindo a confusão que a linguagem dos conjuntos provocava nos alunos e o

> baixo rendimento por eles demonstrado, os professores mostravam sua insatisfação com a proposta.

Ainda em 1980, *O National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM - dos Estados Unidos, preocupados com a baixa aprendizagem da matemática pelos alunos de todo o mundo, apresentou algumas recomendações para o ensino da matemática no documento “Agenda para Ação” (D’AMBRÓSIO, 1997). Nele o ensino e a resolução de problemas e a geometria eram destacados como um dos focos do ensino da matemática. Também abordava a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da matemática, e imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas idéias influenciaram as reformas que ocorreram em todo o mundo e, a partir do final da década de 1980, foram discutidas no Brasil, e algumas foram incorporadas pelas propostas curriculares de Secretarias de Estado e Secretarias Municipais de Educação, havendo experiências bem sucedidas.

Com esse fato, inicia-se um processo de busca por uma reconfiguração do ensino da matemática procurando uma metodologia mais adequada. Segundo Lorenzato & Fiorentinni (2006), um fato que contribuiu muito para o Movimento da Educação Matemática foi de professores de matemática de todo o planeta organizados em grupos de estudos e pesquisas visando a compreender como se constrói o conhecimento da criança sob diversas perspectivas, estudar as formas de avaliação e sugerir alterações nas abordagens dos conteúdos (DAMÁZIO, 2006).

Com uma nova LDB (9394/96), houve um maior empenho de vários educadores no sentido de reestruturar de forma concreta o ensino da matemática para uma nova sociedade marcada pela globalização e pela revolução causada pelas tecnologias digitais. Várias discussões foram feitas e uma delas se focou o ensino de geometria devido a não existência dele nas escolas como afirma Lorenzato (1995). Porém com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, PCN (1997), influenciados pelas reflexões e sugestões de educadores matemáticos brasileiros e estrangeiros, a geometria e o desenho geométrico voltaram à pauta e recomendados como conhecimentos que contribuem para uma melhor formação intelectual das pessoas. Assim, as sugestões oficiais para o ensino de geometria afirmam que os alunos devem compreender os conceitos geométricos necessários para trabalharem eficazmente com espaços bidimensionais e tridimensionais e também devem ter conhecimentos de retas, paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria, conhecer propriedades das figuras planas e dos sólidos geométricos. Cabe ainda aos alunos visualizarem como os objetos se movem no mundo, usando translações, simetrias e rotações. Assim, para uma melhor compreensão destes conceitos geométricos, indicam o ensino das construções geométricas associados com a geometria, neste nível de ensino (PCN, 1997).

Além disso, o PCN (1997) enfatiza a importância da geometria no ensino fundamental por meio da construção de situações-problemas que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas. De acordo com esses documentos, os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso, no entanto, não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria.

Com as orientações nacionais para o ensino da geometria, destaca-se a dedicação de vários educadores matemáticos brasileiros empenhados em desenvolver pesquisas e publicar livros e artigos com o objetivo de tornar viável o ensino de geometria nas escolas básicas. Dentre estes educadores estão Pavanello & Andrade (2002), Lorenzato (1995) e Fiorentini (2004), que afirmaram que dentre os diferentes ramos da matemática, a geometria favorece o desenvolvimento de habilidades de interpretação do mundo e a criação modelos abstratos. Portanto, é necessário que o seu ensino seja fundamentado em objetos concretos, aplicações do quotidiano, construções geométricas e reflexões.

As construções geométricas são reconhecidas por Pais (2006) como um importante suporte didático, devido ao caráter interdisciplinar que possuem. Ele ainda afirma que os objetos e os desenhos são suportes para promover a compreensão de conceitos e propriedades que têm um nível de maior complexidade e para garantir aos alunos habilidades na resolução de problemas. Para ele,

> no ensino da geometria, a utilização integrada de objetos e desenhos contribui na expansão da formação de boas imagens mentais e, assim, elas passam pouco a pouco a se constituir um terceiro suporte de elaboração do conhecimento. A natureza dessa forma interna de compreender a geometria, por um lado, é bem mais complexa do que o uso de um objeto material ou de um desenho; por outro lado, permite maior operacionalidade na solução de problemas (PAIS, 2006, p. 99).

O referido autor enfatiza também que a aprendizagem da geometria é influenciada por três aspectos: intuição, experiência e teoria, que devem ser considerados com certa dosagem pelo professor nas práticas educativas. Assim, o saber quotidiano, a linguagem, os objetos e os desenhos se constituem em articuladores para a construção de tal conhecimento.

Para D'Ambrosio (1983), o uso do desenho geométrico como um recurso no ensino de geometria consiste, sobretudo, na interpretação dos argumentos matemáticos que são inseridos nos problemas geométricos. Assim, por exemplo, ao apresentar a construção geométrica do problema, facilita-se o entendimento para que o aluno crie suas estratégias para resolvê-lo.

Para Fiorentini (1995), na concepção empírico-ativista, o aluno passa a ser considerado o centro do processo, e os métodos de ensino, tendo como pressupostos a descoberta e o princípio de que "se aprende a fazer fazendo" (1995, p.52). Pautavam-se em atividades, valorizando a ação, a manipulação e a experimentação. Portanto, é fundamental considerar a utilização de materiais manipulativos. Porém estes sozinhos não garantem uma aprendizagem eficaz e significativa da geometria, destaca Lorenzato (1995). Entretanto, além da manipulação, é preciso refletir sobre os processos e produtos, pois o mais importante no ensino-aprendizagem desta disciplina é a atividade mental crítica e a reflexão a ser desenvolvida pelos alunos.

Os objetos, portanto, por pertencerem ao mundo material, são importantes na geometria do ensino fundamental, pois, nesta fase nos alunos ainda não predomina o raciocínio dedutivo. Porém, Pais (2006) alerta para a necessidade de que o professor não coloque todas as suas expectativas na manipulação, para que o trabalho com geometria não fique restrito somente aos saberes do quotidiano. E recomenda, ainda, que a interação com o desenho geométrico deve ser aliada à orientação pedagógica, pois não se pode atribuir ao desenho o papel de auto-instrução. Ele não se opõe ao uso de materiais didáticos nessa fase inicial, mas o desafio é superar a materialidade rumo à elaboração de conceitos.

No entanto, o referido autor destaca que se faz necessária uma reflexão mais aprofundada sobre o uso dos materiais no ensino da geometria, uma vez que isso, adicionado ao problema da formação do professor, pode desencadear duas direções opostas: "recair na vertente do empirismo, caracterizado somente pela manipulação, ou refugiar-se em um reduto racionalista, onde os conceitos geométricos são vistos simplesmente como ideias perfeitas e abstratas” (PAIS, 2000, p. 2).

Mas, de acordo com Valente (2001), as construções geométricas no ensino de geometria foram uma prática recomendada em quase toda a história da educação no Brasil. Portanto, a exclusão destas construções pode causar prejuízos à aprendizagem dos alunos. Assim, há necessidade de se resgatar este conhecimento junto ao ensino de geometria, posto que, conforme afirma Zuin (2002), o ensino destas construções é essencial para que não haja o bloqueio das capacidades de planejar, projetar ou abstrair, desenvolver a percepção visual e o raciocínio-lógico espacial. De acordo com Marmo & Marmo (1994, p.12), “há uma relação perfeita entre o desenho geométrico e a geometria, pois ambos estudam as figuras geométricas com seus conceitos e suas propriedades. O desenho geométrico é a geometria gráfica”.

A respeito do ensino do desenho geométrico junto à geometria, D’Ambrosio (1983) afirma que a experiência geométrica é dada pelo desenho geométrico e, sendo este um conjunto de construções geométricas, perspectiva e geometria descritiva, ele ficará bem situado na matemática e, assim, atribui-se aos professores de matemática a responsabilidade para ensinar desenho geométrico.

Ainda para este autor, no entanto, o licenciado em matemática, pela própria formação, tende a não depender do traçado; é levado a subordinar o concreto ao abstrato, isto é, o artefato ao mentefato. Assim, a construção de um triângulo será perfeitamente satisfeita se seus elementos – lados e ângulos – forem matematicamente bem definidos. Entretanto, a criança ou adolescente, procurando desenvolver uma intuição geométrica sem o suporte visual, sentir-se-á perdido. Dificilmente o professor de matemática se liberará desse seu quase desprezo pela exatidão das figuras. O professor de desenho, pela sua formação mais aberta – na qual se inclui um componente de arte – depende mais do manejo das formas e de como essas formas são em si objetos finais de sua ação. Em essência, a ação do matemático resulta da produção de artefatos. O desenho geométrico seria, então, aquela disciplina intelectual, ou manifestação da ação que se situa privilegiadamente entre o artefato e o mentefato (D’AMBROSIO, 1983).

Portanto, essas discussões evidenciam que o ensino da geometria tenha como um dos componentes pedagógicos o desenho geométrico como um elemento que poderá possibilitar uma maior apropriação dos conceitos e propriedades desta ciência pelos alunos. Evidenciam também que, em quase todas as tendências de ensino, o conteúdo deva ser apresentado a partir de uma abordagem prática para uma abstrata, merecendo maiores investigações para que as concepções pedagógicas possam indicar caminhos mais bem fundamentados para o ensino da geometria nas escolas de ensino fundamental.

CAPITULO III

3. CONSIDERAÇÕES SOBRE O DESENHO GEOMÉTRICO NA GEOMETRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA BRASILEIROS

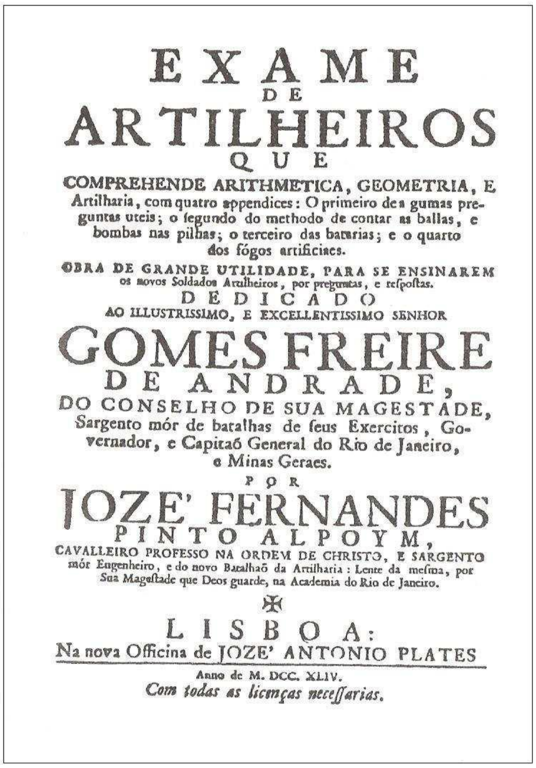
Este capítulo faz considerações históricas sobre como o livro didático de matemática chegou ao Brasil e a seguir, discute as alterações a que os conteúdos foram submetidos pelas reformas educacionais que atravessaram o século XX. O eixo dessa discussão é conduzido pela geometria e as construções geométricas que foram consideradas nestes livros didáticos após as indicações preconizadas pelas reformas Francisco Campos, Gustavo Capanema, e pelas LDB de 1971 (nº. 5692/71) e de 1996 (nº. 9394/96). Também faz uma referência ao impacto da Matemática Moderna na produção didática e as alterações propostas pelas LDB de 1971 e de 1996. E ainda uma discussão sobre as possibilidades de um livro didático de matemática enfatizando a geometria e o desenho geométrico considerando a interdisciplinaridade e a nova concepção de entender uma sociedade marcada pelas tecnologias digitais, redes e hipertextos.

3.1 O livro didático de matemática: o desenho geométrico incluído na geometria

O livro de matemática se constituiu como um elemento importante na realidade escolar brasileira, mesmo precariamente, já no Brasil Colônia, por volta de 1700, quando o ensino como um todo estava a cargo da igreja católica, por meio dos padres jesuítas. Esses, pela tradição clássico-humanista, não se dedicavam muito ao ensino da matemática. De acordo com Valente (1999), é possível perceber essa posição no documento *Organização e Plano de Estudos da Companhia de Jesus* – um manual de matemática compilado do padre Leonel de Franca – que mesclava regras de ordem administrativa, disciplinar e pedagógica, referindo-se aos estudos inferiores ou ginasiais. Nele eram recomendados, dentro da física e por dois meses, três quartos de hora dedicados a os *Elementos*, para depois acrescentar "cousas de geometria, da esfera, do desenho de figuras planas e espaciais ou de outros assuntos que eles (alunos) gostavam de ouvir, e isto simultaneamente com os *Elementos* de Euclides" (VALENTE, 1999, p. 164), que era uma tradução francesa.

De acordo com Castro (1999), em 1744, tem-se o primeiro livro de matemática escrito no Brasil; do engenheiro militar português que aqui veio trabalhar, José Fernandes

Pinto Alpoim (1700-1765), o *Exame de Artilheiro*, que compreende aritmética, geometria e artilharia. Em 1748, este mesmo autor apresenta outra obra, *Exame de Bombeiro*, com dez tratados, sendo o primeiro de geometria com uma abordagem associada às construções geométricas. Mas a impressão destes livros foi em Portugal. São livros elementares e metodologicamente inovadores, com o objetivo de preparar para os exames de admissão à carreira militar, como os próprios títulos sugerem. Afirma Valente (1999) que a geometria que é apresentada nestas obras inclui tópicos de desenho geométrico como ponto, linha, perpendicular, paralelas, circunferências e construções de polígonos com aplicações para a artilharia.



EXAME
DE
ARTILHEIROS
QUE
COMPREHENDE ARITHMETICA, GEOMETRIA, E
Artilharia, com quatro appendices: O primeiro de algumas preguntas uteis; o segundo do methodo de contar as ballas, e bombas nas pilhas; o terceiro das batarias; e o quarto dos fógos artificiaes.
OBRA DE GRANDE UTILIDADE, PARA SE ENSINAREM os novos Soldados Artilheiros, por preguntas, e respostas.
DEDICADO
AO ILLUSTRISSIMO, E EXCELLENTISSIMO SENHOR
GOMES FREIRE
DE ANDRADE,
DO CONSELHO DE SUA MAGESTADE,
Sargento mór de batalhas de seus Exercitos, Governador, e Capitaõ General do Rio de Janeiro, e Minas Geraes.
POR
JOZE' FERNANDES
PINTO ALPOYM,
CAVALLEIRO PROFESSO NA ORDEM DE CHRISTO, E SARGENTO mór Engenheiro, e do novo Batalhaõ da Artilharia: Lente da mesma, por Sua Magestade que Deos guarde, na Academia do Rio de Janeiro.
LISBOA:
Na nova Officina de JOZE' ANTONIO PLATES
Anno de M. DCC. XLIV.
Com todas as licenças necessarias.

Figura 11. Exame de Artilheiros
Fonte:
http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0100404220080004000036&script=sci_arttext

Estes livros eram direcionados para a construção de fortes e artilharias e eram para serem estudados nas escolas militares. Mas, devido ao seu uso prático, acabou influenciando a produção didática da matemática escolar (VALENTE, 1999).

Os livros didáticos passaram a ser traduzidos e impressos aqui no Brasil com a chegada, em 1808, da primeira máquina de impressão, graças à vinda da Família Real.

Até então, segundo D'Ambrósio (1999), os livros de matemática e de outras ciências que eram produzidos aqui, seriam impressos na Europa, respectivamente em Lisboa e Madrid.

De acordo com Valente (1999), no Brasil, o livro didático de matemática começou a surgir a partir de 1830 na forma de compêndios e manuais escolares com vistas às escolas, preparatórios para o ingresso nas Academias Militares e, posteriormente para os liceus e colégios. Neste período, o ensino do Brasil sofreu as influências européias por meio de livros, inicialmente, resultados de traduções, especialmente da França. Segundo Bittencourt (2004, p. 482), "as marcas editoriais francesas, em especial, foram se consolidando em razão de nossa dependência das técnicas de produção e das políticas de importação".

Valente (1999, p.122) afirma também que destes livros, destaca-se a "obra francesa de Legendre que representou uma interferência acadêmica no ensino da geometria elementar", estruturando os pilares da axiomática moderna. Também, a obra *Elementos de Geometria* de Lacroix, traduzida por Manuel Ferreira Guimarães, foi o primeiro compêndio de geometria adotado no colégio Pedro II e, em 1892 é traduzida para o português a *Geometria* de Clairaut (VALENTE, 1999). Ainda afirma Valente (1999) que nestes livros, as construções geométricas se constituíram num elemento norteador para o ensino de geometria, principalmente na obra de Clairaut, que não tinha uma grande preocupação com o rigor excessivo.

A obra *Elementos de geometria*, escrita por Francisco Vilela Barbosa em 1845, inspirou trabalhos ou compêndios de aritmética, álgebra e geometria (VALENTE, 1999). Nesta obra a geometria vem associada às construções geométricas com tópicos de retas, ângulos, paralelismo, proporcionalidade geométrica e polígonos.

A obra de Pedro Bellegarde, inspirada na de Barbosa, reúne aritmética, álgebra, geometria, geometria analítica, desenho geométrico e metrologia. No tópico de geometria, aborda a plana e a espacial por meio de tópicos, sem uma divisão didática. E entre os temas, incluía o desenho geométrico. Já na geometria analítica, apresenta rudimentos de trigonometria plana (VALENTE, 1999).

Assim, a partir da primeira metade do século XIX, os livros de matemática e os manuais escolares dos cursos de preparação para ingresso nas Academias Militares passaram a ser impressos no Brasil, o que contribuiu muito para o avanço das ciências em todas as áreas e a difusão do conhecimento.

Afirma Valente (2004) que, nos livros de geometria que eram utilizados no colégio Pedro II, incluía-se uma abordagem das construções geométricas, traçando linhas retas, paralelas, polígonos, ângulos e circunferências com material adequado, como régua e compasso. Ainda para este autor, tal conteúdo foi estruturado pelo então professor desta instituição, Cristiano Benedito Otoni (1811 – 1896), um professor e crítico do ensino de geometria da época, que apresentou uma compilação da obra *Curso de Geometria Elementar*, de Vicent com o título *Elementos de geometria* (CASTRO, 1999).

Na segunda metade do século XIX, já no final do Império, o Rio de Janeiro, então capital do País, ainda continuava a ser o foco da produção de livros didáticos de matemática, com destaque para o livreiro e editor Serafim (VALENTE, 1999). Porém, outras regiões do país começaram a despontar nesse setor e fomentar produções de autodidatas ou profissionais com formações variadas, visando a obras destinadas ao ensino da matemática elementar, devido à não existência de cursos de formação de professores na área, como a Licenciatura em Matemática.

Figura 12. ARITMÉTICA ELEMENTAR ILUSTRADA
FONTE: http://br.gojaba.com/book/5108216/Aritm%C3%A9tica-Elementar-Ilustrada-Ant%C3%B4nio-Trajano

No início da República, em 1891, foi promovida a reforma Benjamin Constant, visando unir a racionalidade dos métodos científicos ao papel social que uma ciência deveria desempenhar. Com os pressupostos da reforma para o ensino de matemática, estavam as obras de Antonio Trajano, no início do século XX, cuja *Aritmética Elementar Ilustrada* superou várias tentativas de reforma na abordagem, alcançando a aceitação de professores e alunos, comprovada pela marca de 118 edições até a década de 1940 (PROFMM, NETTO et tal., 1974, p.77) .

Segundo Valente (1999, p. 165), "o grande diferencial na obra de Trajano situa-se na forma didática do texto. A teoria é sempre posta por meio de exemplos numéricos seguidos de exemplos resolvidos, com explicação passo a passo do que o aluno deverá realizar". Ainda para este autor, a visão de Trajano era a de que um livro adequadamente escrito poderia tanto substituir o professor quanto capacitar uma pessoa para ensinar a álgebra, ou até mesmo servir de incentivador aos interessados por esse campo de conhecimento. Outra obra de grande destaque nessa época foi a *Geometria* de Timotheo Pereira que segundo Valente (1999, p. 166), "atingiu a 11ª edição em 1927" pela forma que foi escrita, sobretudo nos aspectos didáticos pedagógicos incluindo demonstrações e construções geométricas.

Com o movimento de renovação escolar, caracterizado como Movimento da Escola Nova, reflexo do que já vinha ocorrendo na Europa e nos Estados Unidos, que levava em conta os aspectos psicológicos da criança (MANACORDA, 1999). As diversas correntes pedagógicas que fundamentavam este movimento tinham como meta para aprendizagem o "princípio da atividade" e o "princípio de introduzir na escola situações da vida real" e o "aprender a fazer fazendo" (MIORIM, 1998, p. 90).

Este movimento repercutiu muito no ensino primário brasileiro porque foi amplamente difundido pelos livros didáticos. Porém, o ensino renovado da geometria não chegou a atingir as escolas secundárias. No ensino secundário, que agregava cursos técnicos como as escolas agrícolas e as industriais, o ensino da matemática era definido por uma área onde constava geometria, desenho, álgebra e aritmética cujos livros didáticos eram baseados na estrutura do ensino do Colégio Pedro II, com algumas alterações direcionadas para o objetivo do curso, conforme afirma Valente (2004).

É importante pontuar que no final do século XIX, encontram-se textos didáticos onde as construções geométricas são apresentadas, estando a teoria da geometria incluída (ZUIN, 2001). Este fato indica que a modalidade do desenho presente nas escolas poderia ser a do desenho geométrico e, confirmando isso, Valente (2002) afirma que, nos livros de geometria, as construções geométricas estavam associadas aos conteúdos.

Até este momento, verifica-se que os livros didáticos de geometria eram separados e traziam nas suas páginas as construções geométricas ou o desenho geométrico relacionados com os conteúdos. Esta forma de apresentar a geometria nos livros didáticos fora influência das obras que foram traduzidas e serviram de inspiração para os autores brasileiros, além de ser uma prática comum desde a Grécia antiga, em que as construções geométricas eram associadas ao ensino da geometria.

3.1.1 A Reforma Francisco Campos – o desenho geométrico é separado da geometria dos livros didáticos

A primeira lei nacional de ensino foi criada 1931, com a reforma Francisco Campos que padroniza um currículo para todo o Brasil. Realizou-se então a unificação das matemáticas "rompendo com a apresentação separada dos conteúdos de álgebra, geometria e aritmética" (VALENTE, 2004, p. 109). Ficaram estabelecidos os conteúdos e indicou-se, além disso, o modo segundo o qual esses conteúdos deveriam ser tratados didaticamente. Através de suas "Instruções Metodológicas", a Reforma deixou explícito que a proposta não se resumia apenas a um reordenamento dos conteúdos de ensino. Tratava-se, também, de indicar uma mudança radical em termos didático-metodológicos (VALENTE, 2004). Assim, estas foram as indicações para o ensino de matemática realizadas pelo professor Euclides Roxo, docente do Colégio Pedro II, o responsável pelo ensino de matemática nesta Reforma (MIORIM, 1998; VALENTE, 2004).

Com a participação em diversos congressos internacionais que abordavam a matemática sob uma nova perspectiva moderna de ensino, Euclides Roxo acatou estas idéias e, em 1931, propôs alterações significativas para o referido ensino, cujo modelo foi amplamente defendido pelo matemático alemão Félix Klein e publicado pelos livros didáticos de matemática em diversas partes do mundo, inclusive no Brasil, onde fora contemplado parcialmente por esta reforma (D'AMBRÓSIO, 1997).

Nesta época, Euclides Roxo publicou a série didática *Curso de Matemática*, destinada ao ginásio, com uma diversidade de inovações na literatura didática. Segundo Pfromm Netto *et al*. (1974, p. 80), esta obra continha grande quantidade de ilustrações, não somente de figuras geométricas, como também de gravuras e documentos importantes à história da matemática, (o papiro Rind, retratos de matemáticos famosos, ornamentos geométricos de antigo vaso egípcio, as gravuras italianas entalhadas em madeira no século XV que representavam Pitágoras realizando a experiência das cordas tensionadas e dos tubos de vários comprimentos, o uso de teorema de congruência na medição, segundo uma gravura de 1569, uma reprodução de primeira página dos "Elementos" de Euclides, etc). Segundo Silva (2003), nesta obra, as construções geométricas continuariam sendo apresentadas nos tópicos da geometria incluídos nos livros didáticos de matemática. Nesta nova proposta, este ensino deveria ser articulado de tal forma que favorecesse ao aluno atividades para que ele se tornasse um descobridor (método heurístico) e não um receptor de conhecimentos.

Ainda nesta obra, segundo Miorim & Miguel (2004), havia preocupação do autor de levar em conta o interesse dos alunos e seu estágio de desenvolvimento intelectual, e enfatizava a praticidade além de contextualizar a matemática, deixando a apresentação de demonstrações para níveis mais avançados. Além disso, os textos eram apresentados em linguagem acessível e clara como apreciações e problemas históricos. Posteriormente, em 1937, Euclides Roxo publicou o livro didático *A Matemática na Educação Secundária*, assumindo a modernização do ensino secundário de matemática que se contrapunha à forma abstrata de apresentar esta ciência e seguindo as normas pedagógicas internacionais, que propunham uma abordagem vinculada à realidade dos alunos. Porém, as construções geométricas passaram por um processo de redução nos tópicos de geometria (VALENTE, 2004).

O decreto lei de 1938, por meio do Instituto Nacional do Livro (INL), que criou a Comissão Nacional do Livro Didático, trazia em suas páginas que os livros didáticos em nível de escolas pré-primárias, primárias, normais, profissionais ou secundárias de todo o território nacional deveriam ter a autorização prévia do Ministério da Educação para serem editados, e estabelecia critérios de escolha por parte das escolas. Segundo Valente (2004), tal decreto vinha carregado da ideologia presente no Estado Novo, a qual era marcada pela consciência nacional e construção da nacionalidade, e preocupada em punir tudo que ameaçasse a estrutura do ideal da classe governamental. Porém, estas determinações não atingiram o ensino de matemática devido ao seu caráter enciclopédico, que se arrastava há muito tempo, apesar das propostas significativas de alterações.

Assim ficou posta a questão de como abordar a metodologia dos livros didáticos de matemática criados para atender à Reforma Francisco Campos. Uma análise das

“Instruções Metodológicas” revelou que as recomendações didático-pedagógicas estavam alicerçadas em quatro categorias:

- a introdução do conceito de função desde a primeira série do curso fundamental, e o seu desenvolvimento como conceito unificador dos ramos matemáticos (aritmética álgebra e geometria).
- um curso de geometria intuitiva que, inicialmente associado a elementos concretos e articulado à aritmética e à álgebra, caminharia para a geometria lógico-dedutiva.
- o uso do método heurístico para a introdução e desenvolvimento dos conteúdos de ensino.
- a utilização de questões práticas, definidas nas instruções, como as aplicações no domínio das ciências físicas e naturais, bem como no campo da técnica, preferindo-se exemplos e problemas que interessem às cogitações dos alunos.

Estas foram as recomendações que os autores de livros didáticos de matemática deveriam tomar como parâmetros ao escreverem as suas obras. Entre outros livros didáticos de matemática editados neste período, estão as obras de alguns dos mais importantes autores como Cecil Thiré e Mello e Souza, Jacomo Stávale, Algacyr Maeder, Agricola Bethlem. Todos escreveram livros didáticos que tinham como parâmetros as sugestões indicadas pela reforma.

É importante pontuar que, nestes livros, a abordagem que foi indicada para a geometria, as construções geométricas não foram referenciadas. Neste momento, o desenho geométrico se tornou uma disciplina independente, com livro didático específico e carga horária definida, sendo incluída nos currículos em todos os níveis de ensino a partir de uma portaria ministerial de 1931, atribuindo ao desenho “a formação do homem para todos os setores da atividade nacional” (Decreto n º 19890 de 18/04/1931).

Afirma Miorim (1998) que, como forma de manifestar uma opinião contrária à concepção de Euclides Roxo, em apresentar as diretrizes para o ensino da matemática, o Padre Arlindo Vieira, reitor e professor do colégio Santo Inácio, defensor da educação católica tradicional e dos tradicionais estudos clássicos como base para a formação intelectual da juventude, emitiu um parecer crítico, afirmando que

> as verdadeiras demonstrações, os raciocínios perfeitos, o rigor e a lógica da ciência, tudo que faz a beleza e a imensa utilidade da matemática foi abolido do ensino oficial. Portanto, os livros didáticos que obedecem a esta falsa diretriz são simplesmente isolados por apresentarem exercícios infantis, de noções erradas,

> livros que envenenam a mocidade em vez de lhe inspirar o amor da ciência e o hábito do estudo (MIORIM, 1998, p.102).

Tal posicionamento é uma defesa do estilo euclidiano, positivista, até então adotado e, ao mesmo tempo, uma forte oposição à modernização instituída pela Escola Nova. Enquanto se mantinha esta discussão entre as diversas tendências no ensino da matemática, predominava nos livros uma geometria tecnicista, pois havia um grupo de professores que julgavam necessário tal modelo para a indústria e a modernização que o país necessitava. Porém, o parâmetro de reforma apresentada por Euclides Roxo, demonstrava certo esforço de implantar as idéias do escolanovismo através de uma proposta concreta de reforma do ensino da matemática tendo os livros didáticos de matemática como um meio mais eficiente de difundir tal proposta.

3.1.2 A Reforma Gustavo Capanema – a geometria se aproxima de uma abordagem dedutiva e o desenho geométrico se consolida como disciplina independente

A Reforma Francisco Campos indicou quais deveriam ser os conteúdos e a metodologia a ser empregada para a condução da nova disciplina matemática, enquanto que a Reforma Gustavo Capanema, em 1942, apenas elencou os conteúdos que deveriam ser ensinados nas diferentes séries do ensino secundário. Com ela, a disciplina ganhou novas perspectivas. Porém, segundo Valente (2004), a análise das coleções evidencia que a interpretação que os autores fizeram das sugestões da nova reforma para a elaboração dos livros didáticos, traduziu-se pela manutenção em separado dos ensinos de aritmética, álgebra e geometria, mesmo que sob o manto de uma única disciplina chamada matemática, conservando o antigo programa. Segundo Valente (2001), muitos livros didáticos de matemática, em sucessivas edições, mantiveram um descompasso em relação às mudanças propostas pelos órgãos que determinam os parâmetros para o ensino desta ciência.

É importante ressaltar que, em 1932, Jacomo Stávale escreveu uma coleção de livros didáticos de matemática, do 1º ao 5º ano, impressa pela Editora Nacional. Esta obra revisada e reeditada após a Reforma Capanema, sob o título *Elementos de Matemática*, fora reduzida, a quatro volumes. A confusão existente na época foi expressa por Stávale no prefácio da primeira edição, que demonstrava a preocupação com um direcionamento que garantisse uma melhor qualidade de ensino, assegurando o desenvolvimento o nível de determinados conteúdos.

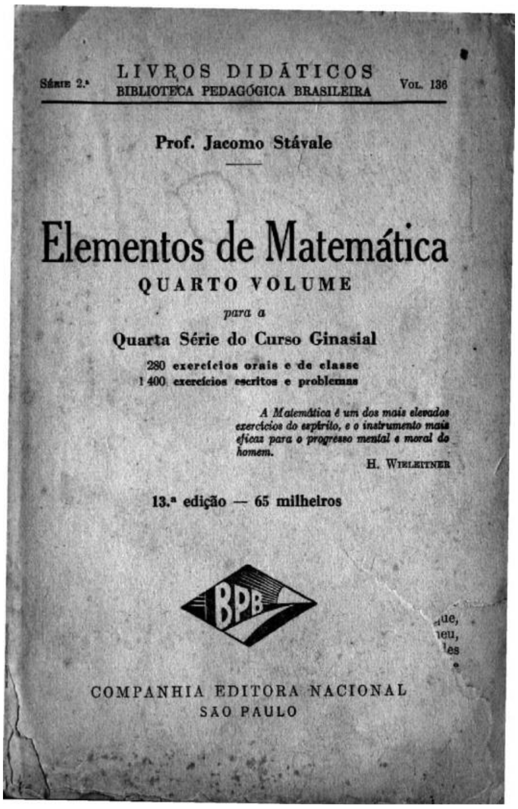


Figura 13. Elementos de Matemática
Fonte: http://www.scribd.com/doc/19750440/Elementos-de-Matematica-Jacomo-Stavale

Observemos que na capa deste livro que o autor indica aos discentes 280 exercícios orais e 1400 escritos e problemas. Segundo Valente (2004), as obras de Stávale foram extremamente significativas para o ensino de matemática no Brasil, no sentido de garantir a presença do livro didático de matemática na sala de aula, atingindo a marca de 150 edições e, aproximadamente, um milhão de exemplares.

Com o aumento do número de escolas públicas do primário ao ginásio, também aumentou, consideravelmente, o número de autores e editores de livros didáticos de matemática. As obras tinham preocupações comuns, como o uso de linguagem simples, abordando temas de aritmética, álgebra e geometria e, uma considerável quantidade de exercícios para que o aluno pudesse se exercitar para uma maior compreensão dos conteúdos e recursos gráficos. A geometria foi incluída em alguns capítulos dos livros de forma compartimentalizada, e poucos autores referenciavam de forma sucinta as construções geométricas (VALENTE, 2004), porque eles entendiam que o desenho geométrico, sendo uma disciplina independente, daria suporte à geometria e, assim, não havia necessidade de incluir tal item na abordagem destinada a esta ciência.

Neste período, surgiram várias editoras publicando diversos livros didáticos para o ensino da matemática. Da editora Melhoramentos, vieram as obras de Algacyr Munhoz Maeder, professor em Curitiba; da editora Nacional, as obras de Ary Quintela, professor no Rio de Janeiro. As obras de Thiré e Mello e Souza publicados pela editora Jacomo Stávale em São Paulo e a obra de Euclides Roxo, ainda bastante considerada. Depois de algum tempo, a editora do Brasil publicou as obras de Carlos Galante e Oswaldo Marcondes dos Santos, enquanto que a editora Francisco Alves publicou pela primeira vez a obra de Benedito Castrucci Geraldo Santos Lima e outros autores de São Paulo.

Os autores de livros didáticos de matemática, que com a Reforma Francisco Campos foram desafiados a escrever propostas integradas de ensino dos três ramos matemáticos, com a Reforma Capanema tiveram de reorganizar suas coleções apresentando os tópicos de matemática isolados, mas dentro dos três eixos indicados.

Entre os autores mais evidenciados de livros de matemática na Reforma Campos, perduram para a Reforma Capanema as obras de Cecil Thiré, Mello e Souza e Euclides Roxo, Jacomo Stávale e Algacyr Maeder, porque apresentam uma abordagem integrando os eixos indicativos para o ensino da matemática (MIORIM &MIGUEL, 2004).

O colégio Pedro II, que até então mantinha uma extrema influência sobre a produção didática da matemática, aos poucos, vai perdendo espaço para autores associados e editoras que surgem e se fortalecem com a política estabelecida para o livro didático, porque há uma semelhança entre as modificações propostas nos programas oficiais e os lançamentos dos livros didáticos que não estavam sob a responsabilidade de tal colégio (VALENTE, 2004).

O período 1930-1960 compreendeu duas grandes reformas nacionais do ensino brasileiro e, de acordo com cada uma, são publicados milhares de livros didáticos matemática, com o fim de atender às suas determinações didáticas e pedagógicas. Dentre esses livros, os mais referenciados pelo estado para serem o parâmetro dessa produção foram os de Euclides Roxo, Jacomo Stávale, Cecil Thiré, Mello e Souza, Agricola Bethlem, Algacyr Maeder. Estes autores publicaram livros didáticos de matemática, todos explicitamente mencionando estarem em consonância com a Reforma Francisco Campos e, logo depois, esses mesmos autores e outros mais reescrevem suas obras didáticas a partir de 1942, com a vigência da Reforma Gustavo Capanema, conforme nos afirma

Valente (2004). Verifica-se que nestas obras a geometria tem uma abordagem que não fazia referência ao desenho geométrico, pois este se consolida como uma disciplina independente.

Em 1955, no Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, em Salvador, começam discussões sobre a necessidade de alterar os programas de ensino e os livros didáticos de matemática para atender à atual conjuntura internacional para o ensino da matemática.

Figura 14. Métodos Modernos para o Ensino da Matemática
Fonte:http://www.kosmos.com.br/tec_det.asp?codlivro=4929&q=0&p=730

De acordo com Miorim (1998), busca-se nos Estados Unidos um modelo de livro que possa servir de parâmetro aos autores de livros didáticos de Matemática do Brasil. Lançada nos Estados Unidos em 1968, por Charles D'Augustine, sendo traduzida e lançada no Brasil no ano de 1970, pela editora Ao Livro Técnico, a obra *Métodos Modernos Para O Ensino Da Matemática,* apresenta instruções direcionadas para instrumentalizar os professores sobre como trabalhar os objetivos propostos pela Matemática Moderna (MIORIM, 1998).

Este livro foi traduzido pela professora Maria Lucia Peres. No prefácio à edição brasileira, afirma que alguns livros lançados a partir da proposta da Matemática Moderna não atendiam aos seus pressupostos, apresentando apenas alteração no título estampado na capa, sem, no entanto, substituir a abordagem e os exercícios considerados tradicionais pelos modernos.

Assim, começaram, timidamente, as intenções da implantação da Matemática Moderna no país, sendo tema dos congressos sobre o ensino da Matemática em Porto Alegre, em 1957, no Rio de Janeiro, em 1959 e em Belém, em 1961 (D'AMBRÓSIO, 1998). Paralelamente a esses fatos, havia um movimento de educadores discutindo e solicitando alterações na educação do país.

Em 1961, é promulgada a primeira Lei de Diretrizes e Bases da educação brasileira, a LDB regulamentada pela lei nº. 4024/61, que não trouxe grandes alterações para o ensino de matemática, porque, se discutia muito sobre a implantação da Matemática Moderna que veio ganhar forças no Brasil a partir do final da década de 1960 até a década de 1970. Este foi um movimento em torno das mudanças no ensino de matemática, visando a modificar método, o conteúdo matemático e os livros didáticos no ensino primário, ginasial e colegial que foram instituídos pelas reformas anteriores.

3.2 A exclusão do desenho geométrico e a redução da geometria nos livros didáticos de matemática a partir de 1970

Na década de 1970, o ensino de matemática no Brasil, como já dito anteriormente, foi fortemente impactado pela Matemática Moderna e pela ditadura militar, além da LDB de 1971 e da crescente industrialização e modernização. Esses fatos, segundo Miorim (1998), influenciaram a produção dos livros didáticos, no sentido de controlar o que era veiculado, como um meio de enquadrar o conhecimento da população em torno dos princípios e objetivos da ditadura e também formar técnicos para a então atual demanda. Com o projeto de expansão das escolas públicas, os livros didáticos foram transformados e considerados fatores determinantes para a aprendizagem do aluno. Portanto, tornava-se inegável a importância do livro didático de matemática na educação escolar, tanto pelo aspecto histórico, no processo ensino-aprendizagem dessa disciplina, quanto o que ele representa nas aulas, exercendo influências na caracterização do conteúdo e estabelecendo o que o professor deveria seguir (VALENTE, 2004).

A portaria nº 35 de 1970, do Ministério da Educação, determina a coedição de livros didáticos com as editoras nacionais, com recursos do INL que, em 1971, passa a desenvolver o programa do livro didático para o ensino ginásio com o objetivo de exercer um controle mais amplo de toda a produção didática do país. Porém, o que mais influenciou os livros didáticos de matemática foi o movimento da Matemática Moderna.

Para D'Ambrósio (1997), no Brasil, esse movimento foi imposto de cima para baixo, sendo apropriado pela comunidade escolar via livro didático, que enfatizava uma nova perspectiva de trabalho, deixando de abordar a geometria associada às construções geométricas e outros tópicos matemáticos, e agregando a teoria dos conjuntos com noções de estrutura e grupo. Ainda para este autor, estes livros apresentavam a matemática como algo neutro, destituída de história e desligada de seus processos de criação e produção, sem nenhuma relação com o social, impossibilitando uma compreensão crítica e criativa dos aprendizes.

Uma característica marcante dos livros de matemática utilizados pela escola na década de 1970 foi a omissão das definições que marcaram o formalismo moderno, a ausência de contexto nas abordagens e uma redução da geometria, incluída no final do livro.

Nestes livros, houve a compactação dos conteúdos de geometria, pelas editoras e autores, pelo motivo do conteúdo ser considerado sem importância para a atual conjuntura educacional (MIORIM, 1998). Assim, estes conteúdos foram quase que excluídos dos livros didáticos porque no entendimento desses autores, não havia relevância na aprendizagem da geometria para a formação intelectual das pessoas, com isso acabava-se privando o aluno de conhecer um assunto constantemente presente no seu cotidiano. Os exercícios para completar, propostos no manual do aluno, foram, aos poucos, alterando e restringindo o uso de cadernos, cuja principal consequência foi empobrecer a prática da escrita e da leitura dos alunos, especialmente nas aulas de matemática. Nestes livros, segundo Damázio (2006), a abordagem não priorizava a geometria; não criava meios de se proporcionar as construções geométricas e nem questões práticas referentes à espacialidade; apresentava os conteúdos na perspectiva da matriz formalista clássica, característica marcante do referido Movimento, acompanhada da pedagogia da memorização mecânica dos conteúdos, e firmava ausência de aplicações e problemas significativos para continuar sendo padrão de excelência (DAMÁZIO, 2006).

Assim, a geometria incluída nestes livros de matemática foi marcada pelo caráter disciplinador, explícito na organização da obra, do tempo e dos espaços, na vigilância da construção do conhecimento de forma crítica. Portanto, os principais objetivos dessas obras seriam educar o indivíduo numa concepção de uma geometria isenta de contexto e estimular seu senso conservador para afirmar a atual conjuntura política pela qual o país estava passando (D'AMBRÓSIO, 2001).

Ainda para este autor, por meio dos livros, a construção do conhecimento matemático é concebida como algo sem conflitos e contradições, objetivando o entendimento de uma única forma de pensar em relação à matemática, liderada pela classe que comanda o sistema de produção.

Expressa-se claramente uma visão do ensino de matemática escolar excludente, voltada para uma elite dominante:

> a matemática escolar se desenvolve em um ambiente exclusivamente matemático, fechado em si mesmo, onde não entram as coisas dos homens, ela se mostra a-histórica, não aparece como construção humana, não é parte de nossa cultura, não é gerada num ambiente sociocultural" (D'AMBRÓSIO, 1998, p. 23).

Nesta abordagem, a construção de uma geometria homogênea é parte de um processo histórico que envolve direcionamentos e resistências no sentido de aceitar na escola as manifestações culturais contextualizadas na construção do saber escolar dos alunos envolvidos no processo. Esse direcionamento é mediado pelos livros didáticos de matemática que determinam o tipo de geometria que deve ser desenvolvido na sala de aula, na tentativa de unificar o pensamento em torno de uma única concepção de ciência causando, assim, obstáculos à aprendizagem. Diversas situações nas atividades escolares mostram este processo ao denunciarem a opressão e a violência que sofrem os alunos cotidianamente para enquadrarem suas múltiplas formas de pensar diante da matemática escolar (D'AMBRÓSIO, 2001), consequentemente, diante da geometria.

Neste período, havia uma escola para a classe trabalhadora e outra que servia à elite. Na que estava a serviço da elite, a geometria e o desenho geométrico foram conteúdos abordados através de módulos elaborados pelo professor (ZUIN, 2002).

De acordo com os conhecimentos inerentes à geometria, como as construções geométricas e a ênfase aos aspectos dedutivos e práticos dessa ciência, faziam parte do elenco dos conteúdos a que os alunos oriundos das elites tinham acesso, apesar dos livros didáticos de matemática não trazerem estes conteúdos em suas páginas, existia o módulo de tal ciência elaborado pelo próprio professor. Ainda para esta autora, apesar das propostas vigentes da exclusão da geometria e das construções geométricas, elas continuaram nas escolas que serviam às elites.

Em 1980, com o livro *O Fracasso da Matemática Moderna,* do matemático americano Morris Kline e pelo então, *O National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM – denunciaram a abordagem que é dada a geometria nos livros didáticos e, propõem alterações em todo o mundo devido ao baixo nível de aprendizagem da matemática, que se constatava nas avaliações (DAMÁZIO, 2006). Ainda afirma este pesquisador que, a partir desses fatos, muitos livros didáticos de matemática começaram a ser alterados e resultaram nas formas de apresentação que são veiculadas nos livros didáticos mais atuais. Esses fatos causaram resistência aos autores porque os livros didáticos editados na década de 80 continuaram presos aos princípios das propostas anteriores.

Afirma Damázio (2006) que a geometria nestes livros é inserida de forma mais expressiva, no aumento considerável da teoria e dos exercícios, mas destaca que há uma estabilidade dos conteúdos e, ainda uma abordagem fundamentada em fórmulas, não referencia o desenho geométrico. Entretanto, em alguns exercícios, o desenho geométrico se torna um meio imprescindível na resolução. Porém, ainda para este autor, houve uma maior dispersão entre autores e editoras: a editora FTD, com a obra de Giovanni & Casstrucci; a do Brasil com Álvaro Andrini; a IBEP com Volpino; e Ens com a Ática.

Ainda para Damázio (2006, p.23),

> foi nos anos 1980 que as pedagogias progressistas se apresentaram em oposição às liberais ou conservadoras. No caso específico da Matemática, a ofensiva é contra a concepção formalista nas suas duas vertentes e ao ensino tradicional, tecnicista e escolanovista. Contextualização, historicidade, criticidade, opimido/opressor, dialeticidade, construtivismo, entre tantas, foram categorias conceituais que passaram a predominar na pedagogia brasileira. Entretanto, os livros didáticos continuavam acentuando uma abordagem internalista da matemática, se constituindo numa espécie de edifício fundamentado em alicerces lógicos que não têm ligação com o mundo intersubjetivo. O contexto era propício para que o conhecimento emancipador se fizesse presente nos livros didáticos. Porém, o que ocorre é a presença de um discurso matemático de simplificação da linguagem.

Com essas discussões, surgem novas sugestões para a produção de livros didáticos de matemática. Assim, na apresentação de um conteúdo, é necessário que o autor apresente a definição e dê exemplos de exercícios de aplicações e exercícios de fixação em um número considerável e com variedade de dificuldade ascendente, e provas com questões descritivas em vez de objetivas. Segundo Damázio (2006, p. 23), "por atender com certa proximidade esses requisitos, pode-se dizer que se inicia em 1986 e se prolonga até 1996 a era Giovani, Castrucci e Jr., com o livro *A Conquista da Matemática*".

Figura15. Capa da Conquista da Matemática - 1985
Fonte: http://www.traca.com.br/traca.cgi?mod=livrozoom&codlivro=452777

Nesta obra, há um maior número de páginas dedicadas à geometria. Embora na abordagem não recomendasse o desenho geométrico como um elemento associado a uma boa abordagem da geometria, mas o autor faz uso do mesmo para apresentar o referido conteúdo, nos exercícios propostos aos alunos, exige-se tal prática, porém ainda de forma sucinta.

Com as indicações do PCN de matemática (1997), o ensino de matemática para o ensino fundamental deve considerar e contemplar em sua proposta científico-pedagógica blocos de conteúdos como números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e, tratamento da informação. E os procedimentos que mobilizam estes conteúdos, devem se apresentar como compatíveis e atualizados em relação aos conhecimentos correspondentes nas ciências e saberes de referência. Entretanto, de acordo com estas orientações, os autores de livros didáticos de matemática também deveriam apresentar nos tópicos de geometria uma abordagem articulada com o desenho geométrico, com os instrumentos de desenho, régua e compasso para que tal ensino se tornasse efetivo (PCN, 1997). Afirma Zuin (2002) que a ausência das construções geométricas ou o desenho geométrico na escola básica brasileira acaba por atingir outras disciplinas, como a matemática, a geometria, a física e até a biologia, devido ao caráter multidisciplinar do desenho.

Para Lorenzato (2005), a geometria é uma área do conhecimento humano que tem uma extrema importância para o desenvolvimento da sociedade contemporânea, pois está presente em todas as atividades humanas e, por isso, a sua apresentação nos livros didáticos e nas salas de aulas deve levar em consideração a importância que têm as representações das construções gráficas do plano e do espaço, pois elas contribuem para melhorar as relações de entendimento entre o indivíduo e o meio. Assim, a maneira como a geometria e o desenho geométrico for proposto pelos livros didáticos de matemática irá refletir no desenvolvimento do pensamento matemático do aluno, no raciocínio lógico, nas capacidades de abstração e generalização, pois, estes livros são instrumentos auxiliares importantes da atividade docente e, em muitos casos, são apontados como o principal referencial do trabalho em sala de aula. Entretanto, segundo o PCN (1997) este recurso didático deve estar integrado a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão.

Ainda para o supracitado autor, nos conteúdos de geometria do ensino fundamental, observa-se uma forte integração com o desenho geométrico e, devido a este fato, é que os livros didáticos de matemática deveriam apresentar uma abordagem integrando também estes dois conhecimentos. Portanto, as construções geométricas poderão se tornar um recurso de grande auxílio no ensino da geometria, sobretudo se junto ao desenvolvimento da capacidade de interpretar os argumentos matemáticos procurar resolver os problemas da geometria graficamente visando ao desenvolvimento da coordenação motora, do rigor, da análise e da precisão.

Hoje, com mais de dez anos após a publicação da atual LDB e do PCN de matemática, alguns dos livros didáticos de matemática do ensino fundamental continuam com as características da Matemática Moderna, como a linguagem matemática formal e a simbologia dos conjuntos, a impessoalidade em que os autores se mantêm em relação aos textos, a falta de situações para se estabelecer um diálogo entre o professor e o aluno e, em muitos destes livros, a geometria está presente na parte final, não referenciando as construções geométricas.

Porém os livros didáticos demonstram a continuidade de uma concepção de produção de uma matemática escolar enraizada historicamente, mostrando que há uma interdependência entre os períodos da história deste ensino e não no sentido de uma história linear, onde o passado é considerado como uma realidade temporal acabada, existindo uma relação de diferença e semelhança entre os períodos cronológicos, com base em abordagens, exercícios, sequência e outras características ao mesmo tempo diferentes.

3.3 Um livro didático de matemática numa abordagem atual: interdisciplinaridade e tecnologias digitais

Na história da educação brasileira é possível vermos a cada instante a política ou interesse de um grupo ou de países influenciando o modo de se ensinar, mesmo porque, como afirma Paulo Freire (1998), por se tratar de uma atividade de caráter intencional e ideológica, a educação pressupõe intenções subjacentes que se constituem nas finalidades educacionais. Ou seja, em cada instante, pode-se controlar o ensino como uma fábrica, onde o produtor define como deve ser o produto final. O livro didático se tornou um elemento fundamental nesse cenário devido as suas facilidades de parcelar e determinar o tipo de conhecimento e de propagação para atingir a sociedade como um todo.

As concepções tayloristas correspondem ao multiparcelamento de tarefas impessoais à organização científica do trabalho, como por exemplo, a figura do livro didático, responsável apenas por um determinado campo de abordagem. Segundo MACHADO (1997, p.31), “esta visão é consentânea com o método cartesiano, o qual consiste na decomposição de idéias, na sua fragmentação, cujo encadeamento lógico reconstitui a complexidade inicial", como se pode constatar nos livros didáticos de matemática como os tópicos de álgebra, aritmética e geometria. Para este autor a realidade não é estática; pelo contrário, é dinâmica, diversa e, assim, transitória. Para tanto, como alternativa de superação do modelo cartesiano, o autor atribui a idéia do conhecimento em rede como metáfora para as articulações entre o indivíduo e a sociedade, trabalhando a partir de projetos, abolindo assim o modelo de livro didático instituído.

Para Kopke (2006), a atual sociedade necessita de uma nova proposta de educação, que seja de fato plena diante do mundo, da vida, da comunicação humana focada hoje no visual, no acesso às novas tecnologias, à informática, no redimensionamento dos valores e das tradições. Oportunizar aos alunos aprender geometria e poder desenhar a natureza e as formas criadas pelo homem torna-se ferramenta imprescindível e indispensável neste contexto, dando aquele que se apropria de tais conhecimentos, facilidades na comunicação e na interpretação de vários códigos matemáticos, físicos e biológicos. Partir para uma nova educação exige uma nova abordagem dos conteúdos nas escolas, superando o modelo cartesiano de apresentação de uma ciência delimitada por um livro didático. A busca para formação do novo homem, a transdisciplinaridade, é talvez o único caminho possível para iluminar a vida humana para uma nova concepção dos fatos, das ciências e enfim do universo. (KOPKE, 2006).

Segundo Freire (1998), esse novo paradigma educacional deve ter características multidimensionais, ou melhor, deve ser construtivista, interacionista, sociocultural e transcendente. Características peculiares à Educação Matemática, conforme D'Ambrósio (1997). Com isso, o aluno deve se inserir numa nova ecologia cognitiva, o que significa que devem ser criados novos ambientes de aprendizagem que privilegiem a circulação de informações, a construção do conhecimento, o desenvolvimento da compreensão e, se possível, o alcance da sabedoria objetivada pela consciência individual e coletiva (LEVY, 1993).

É importante ressaltar que, de modo geral, na prática educativa, o livro didático de matemática se constitui em única referência, tanto do ponto de vista teórico quanto metodológico, o que acaba por apoiar o mecanismo do sistema em vigor de apresentar os conteúdos matemáticos como neutros destituídos de história, de ideologia e de caráter científico. De acordo com D'Ambrósio (1997), essa matemática dos livros didáticos é um matemática produzida na academia através de um processo de resignificação daquela matemática utilizada pela aristocracia, essencial para permitir a esta elite assumir um controle efetivo do setor produtivo. Isto em detrimento daquela que é encontrada entre os grupos culturais identificáveis, tais como: sociedades tribais nacionais, sem terras, crianças de uma certa classe social, classes profissionais. Ainda para D'Ambrósio (1997), a identidade desses grupos depende amplamente dos focos de interesse, da motivação e de certos códigos e jargões que não pertencem ao domínio da matemática acadêmica, que é amplamente difundida pelos livros didáticos.

Porém, nas últimas décadas do século XX, o ensino de geometria foi muito questionado e, ao mesmo tempo, pesquisado procurando refletir os problemas da educação das suas crianças, adolescentes e jovens. Surgem, no campo da Educação Matemática, novas concepções, ora convergentes em determinados setores, ora conflitantes, merecendo assim uma reflexão por parte de todas as áreas que compõem e pensam a escola sobre os desafios que agregam a prática educativa.

De acordo com Pais (2006), apesar das mudanças nos paradigmas da educação e das alterações sofridas pelo livro didático de matemática no decorrer do tempo, ainda continua uma estrutura básica com predomínio de uma apresentação sequencial e linear dos conteúdos, considerados estanques e acabados, não apresentando uma relação entre si nem com outras áreas das ciências.

Conforme MACHADO (1997), o modelo de ensino de matemática das séries iniciais às universidades é predominantemente cartesiano, compatível com as concepções tayloristas de divisão do trabalho, porém fora de sintonia com os paradigmas emergentes. O autor exemplifica este fato ao revelar a estrutura adotada e presente no livro didático:

> De fato, se a parafernália de instrumentos computacionais é capaz de fornecer recursos gráficos suficientes para transformar o livro como objeto –ainda que grande parte deles produza efeitos de simples cosméticos – o mesmo não se pode afirmar no que se refere à configuração epistemológica do livro didático. Mesmo nos livros produzidos da forma tecnicamente mais sofisticada, a noção de conhecimento que subjaz é francamente cartesiana, fragmentando e hierarquizando excessivamente os subitens (MACHADO, 1997, p.120).

Além disso, este mesmo autor alerta que:

> o livro didático, de um modo geral, poucas vezes consegue escapar da apresentação convencional, que distingue com nitidez o momento da teoria do momento dos exercícios de aplicação; estes por sua vez, quase sempre limitam-se a problemas estereotipados, onde também se distingue com nitidez os dados –

> sempre necessários e suficientes para a resolução – dos pedidos, a serem determinados com a utilização dos dados (MACHADO, 1997, p.120).

Assim, um livro didático de matemática deve oferecer informações e explicações sobre o conhecimento de geometria que interfere e sofre interferências das práticas sociais contemporâneas e do passado. Também deve conter uma proposta pedagógica que leve em conta o conhecimento prévio e o nível de escolaridade do aluno, aplicações inerentes à vida, e propor atividades que o incentivem a participar ativamente de sua aprendizagem, com questões que proporcionem o pensar reflexivo e analítico. Além disso, o livro precisa assumir a função de texto de referência tanto para o aluno quanto para o docente. Porém, a partir de 1998, com as orientações do PCN de matemática (1997) e do PNLD (1985), concluiu-se que os autores destes livros não conseguiram incorporar as novas tendências que atingiram as práticas escolares, como: contexto, interdisciplinaridade e conhecimento em rede, com um viés sócio-cultural e uma análise crítica do uso dos seus conteúdos.

Fiorentini (2006) afirma que, é necessário que os autores de livros didáticos de matemática e os professores dessa disciplina tenham conhecimento das várias concepções acerca do desenvolvimento da geometria e da geometria escolar, das abordagens metodológicas e facilitadoras, dos recursos instrucionais e das tendências da Educação Matemática. E, na mesma proporção, das diversidades e conflitos da sociedade, embora, ainda hoje, os fundamentos positivistas estão presentes de maneira muito forte, principalmente nos livros didáticos de matemática, que ainda sustentam verdades incontestáveis fundamentadas em uma matemática única. Na abordagem geométrica não considera a geometria de determinados grupos sociais estabelecidos como os índios e os sem terra que tem uma concepção distinta de compreender a geometria.

As verdades agora são mais dinâmicas, enquanto os projetos e as ações educativas estão carregados de intencionalidades. Assim, as tendências inovadoras pressupõem que a educação esteja articulada à idéia de rede, de compromisso, ou seja, de um fazer coletivo. Compromisso pressupõe atitude crítica, dialógica, responsável, para se produzir algo novo (FREIRE,1998). Nesse sentido, a intencionalidade e o compromisso definem o caráter político da educação.

Entre as tendências pedagógicas que explicitam esse caráter político da Educação Matemática, D'Ambrósio (1997) e Skovsmose (2001), posicionam-se favoráveis à abordagem de uma pedagogia crítico-social dos conteúdos. Para eles, essa abordagem fornece condições para superar as dicotomias e dualidades, tais como: o processo e o produto na atividade ensino-aprendizagem da matemática, inserindo uma dimensão objetiva e outra subjetiva neste ensino, transmissão e assimilação de patrimônio cultural e desenvolvimento do espírito criativo, compromisso com o saber matemático, a questão do poder na escola aspectos gerais e específicos da aprendizagem, dimensão lógica e psicológica do processo de ensino aprendizagem, dimensão política, a importância do contexto, da interdisciplinaridade, fins, meios e estratégias da educação, no sentido da produção de métodos mais eficazes de ensino, numa tentativa de superar o extremismo pedagógico do escolanovismo, vinculando o saber com as realidades sociais diferenciadas, visando ao desenvolvimento de projetos multidisciplinares.

Assim, o professor de matemática consciente dessa abordagem, não terá no livro tradicional o principal referencial da sua ação pedagógica, pois a sua docência é que é insubstituível, cabendo a ele, segundo Libâneo, (1991, p.71) "fazer a análise dos conteúdos em confronto com as realidades sociais", às quais o livro didático servirá de apoio pedagógico para a execução da prática docente.

As propostas de encaminhamento dos tópicos de geometria apresentados nos livros didáticos de matemática devem contribuir para o envolvimento do aluno com o tema pela abrangência, incluindo o desenho geométrico para as representações gráficas das propriedades e conceitos, aplicações práticas do quotidiano, e pelo nível de tratamento dado aos conteúdos pela prática social, ou seja, pela argumentação crítica que leva o aluno a "reconhecer nos conteúdos o auxílio ao seu esforço de compreensão da realidade" (LIBÂNEO, 1991, p.70). Neste contexto, o traçado rigoroso e perfeito feito a lápis, com compasso e régua, está, gradativamente, sendo substituído pelas tecnologias digitais por meio de softwares, que anunciam uma nova perspectiva de abordagem para os dias atuais. Assim, surgem os seguintes questionamentos: o autor julga não ser possível incorporá-la? É opção do autor não incorporá-la, embora dela seja conhecedor e simpatizante? O autor não tem conhecimento de tal abordagem? Ou autor rejeita tal abordagem?

A ausência das construções geométricas na geometria está em consonância com o que afirma Edgar Morin, (2001), que diversos movimentos e rupturas no campo educacional emergiram de tensões e conflitos vividos pela sociedade, num determinado local e tempo. O momento atual pode ser considerado um desses momentos, considerando que muitos modelos vigentes de determinadas instituições e setores já não se sustentam diante da complexidade em que o conhecimento e a vida humana estão inseridos.

Para uma melhor compreensão, convém iniciar o estudo dessa abordagem de interrelação e das possibilidades do livro didático de matemática compor novos ambientes de aprendizagem, com reflexões sobre alguns pressupostos, tendo em vista as concepções de um novo paradigma científico marcado por novas formas de se compreender a relação espaço-tempo de Heisenberg.

Paralelamente a esse novo paradigma, surgem problemas em diversos setores da vida humana que envolvem reflexões e ações a médio e longo prazos. Como a aprendizagem da geometria se posiciona diante desses novos problemas que afetam a educação e os livros didáticos? A forma de conceber e entender esse conhecimento, nessa nova visão de mundo vai, portanto, além, do simples ensino de conceitos, das construções geométricas ou do desenvolvimento do pensamento matemático.

É importante perceber que o conhecimento geométrico está em processo constante de construção e reconstrução por meio de construções gráficas, via digitalização. Assim, as interações e as concepções entre si e as demais áreas da matemática formulam uma estrutura flexível que se auto-organiza, reflexivamente, diante de uma abordagem problematizadora através das tecnologias digitais, inspirada em narrativas multiculturais, pós-modernas e pós-estruturalista (OLIVEIRA, 2004).

Afirma D'Ambrosio (1997) que, no momento atual, muitos denominam a modernidade e continuam cultuando uma cultura fundada no pensamento disciplinar. Para ele, urge uma nova forma de pensar, a transdisciplinaridade, um projeto intra e interdisciplinar, agregando o que constitui o domínio das ciências da cognição, da epistemologia, da história, da sociologia, da transmissão do conhecimento e da educação. Assim, os livros didáticos como os de matemática que compartimentalizam os conteúdos separando aritmética, álgebra, geometria e desenho geométrico foram de uma importância extrema para todo desenvolvimento científico e tecnológico ao qual chegamos ao século XXI.

Ainda para D'Ambrosio (1997), a abordagem disciplinar foi importante a partir do século XVI, para superar o então "paradigma aristotélico-tomista medieval", resgatando principalmente, o método de decomposição desenvolvido por Descartes, a razão e a objetividade científica da época. Afirma ainda que a transdisciplinaridade que se faz necessária hoje não é a negação das disciplinas, mas a integração destas com o homem e a sociedade. Transcender a disciplinaridade é prioritário para transpor os desafios contemporâneos.

Nesse sentido, cabe aqui um questionamento diante dessas novas discussões que permeiam o ensino: um livro didático pode atender as especificações de uma abordagem interdisciplinar? Considerando a possibilidade de uma resposta afirmativa, como seria promover um ensino embasado numa concepção em que os conteúdos sejam conectados, constituindo assim uma rede. Dois fatos, porém, levam ao descrédito de tal possibilidade (LEVY, 1993). O primeiro deles se revela em superar as fronteiras da disciplinaridade, e o segundo, as dificuldades de se adotar uma postura interdisciplinar ao se fazer uso do livro didático. De acordo com Roland Barthes (1984, p.99) “interdisciplinaridade consiste em criar um objeto novo que não pertença a ninguém, como um texto”. Enquanto que a obra é que tem propriedade, pertence a um autor e é estática (BARTHES, 1988).

Ainda para Barthes (1988 p.76), “o texto tem metáfora de rede”, na diversidade de conexões que unem os pontos, formando assim uma teia que caracteriza objetos, pessoas, lugares, proposições deste espaço de representação. Neste contexto, a presença do livro didático favorece segundo Machado (1997, p.141), a “cristalização de determinados percursos ao longo da rede”. Nesse caso, então, recair-se-á numa metodologia convencional que determina o percurso considerado conveniente e absoluto, verdadeiro, a que todos devem seguir, descaracterizando a dinâmica dos processos de construção do conhecimento, preconizados pela metáfora da rede. Nesta, qualquer estabilidade não se sustenta e é, no mínimo, momentânea.

Portanto, é possível concluir que um livro didático numa perspectiva interdisciplinar se torna inviável se ele é considerado como norteador do processo de ensino aprendizagem de uma ciência. Esse espaço pode ser proporcionado de forma criativa por meio do caderno escolar ou pelos recursos da informática e, segundo Oliveira (2004, p.14),

> havendo necessidade de uma aproximação entre a produção teórica e a realidade vivenciada nas escolas. Nesse sentido, o que é indicado nos recentes textos é a realização de pesquisas que indiquem propostas que nasçam no quotidiano escolar, que levem em consideração os que estão nesse ambiente e que eles participem da produção das propostas.

Assim, um livro didático de matemática que se proponha a superar as barreiras das disciplinas é uma tentativa de romper com o ensino transmissivo e estático que é característica dessa área e trilhar num caminho inverso partindo da realidade dos alunos, ensinando-os a pensarem matematicamente a partir do seu contexto e de si mesmos ampliando as possibilidades de interação, comunicação e expressão.

CAPÍTULO IV
4. ANÁLISE DOS TEXTOS DIDÁTICOS

Esta parte do estudo tem o objetivo de examinar inicialmente o modo pelo qual os autores dos livros didáticos de matemática como *MATEMÁTICA* para 8ª série de autoria de Orlando A.Zambuzzi, editado em 1976 pela editora Ática e *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA*, também para 8ª série de autoria de José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Júnior, editado em 1998 pela editora FTD. Estes livros são do ensino fundamental II, antigo 1º grau. Portanto, analisam-se como estes autores apresentam em suas obras os tópicos de geometria, observando em seus índices quantos capítulos são destinados à geometria e como o desenho geométrico está caracterizado nestes conteúdos, já que estes conhecimentos mantêm em toda história uma relação intrínseca, como foi dito anteriormente. Considera-se como o desenho geométrico está presente na abordagem dos conteúdos e nos exercícios, as permanências e alterações a que este ensino foi submetido nas três últimas décadas do século XX e a concepção matemática defendida pelos autores.

4.1 O livro didático de matemática como fonte de pesquisa

O livro didático como objeto de estudo para a História da Educação é mais um elemento que pode contribuir para se entender como foi o ensino dessa ciência numa determinada época. No livro didático está incluída a ideologia do contexto político e cultural da sociedade, sendo utilizado para legitimar práticas, valores, poder e uma forma de compreender o mundo. Também revela qual a tipologia dos conteúdos que foram propostos envolvendo a apresentação, os exercícios e os objetivos que não estão explícitos na obra. Segundo Trinchão (2008), para que as crenças e concepções de ensino possam ser reveladas, uma análise minuciosa do livro didático pode ser um meio de reconstituir parte da história de uma disciplina, tentando entender qual a proposta pedagógica que estava sendo veiculada por meio deste livro. O livro didático traduz o tipo de conhecimento que foi veiculado no espaço escolar por um determinado período, e isto justifica considerar o livro didático como fonte e objeto de pesquisa, pois através dele, muitos questionamentos podem ser elencados.

A utilização do livro didático como objeto de estudo permite o avanço das pesquisas sobre a instituição escolar no que se refere à circulação e ao uso dos materiais de ensino presentes nas práticas escolares, não se restringindo a elas, mas principalmente ao seu conteúdo, pois o livro didático propaga os elementos que dão suporte e significado às referidas práticas (CHERVEL, 1990).

Por isso, nos últimos anos, o livro didático se tornou um objeto de estudo de diversos pesquisadores que têm como objetivo relatar qual foi o tipo de conhecimento proposto para a sociedade numa determinada época. Portanto, a pesquisa documental busca investigar, como os livros didáticos, no campo da educação, tem uma contribuição significativa na abordagem de dados qualitativos.

Embora pouco explorada, não só na área de educação como em outras áreas de ação social, a análise documental pode-se constituir numa técnica valiosa na abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema (LÜDKE & ANDRÉ, 1988). Estas autoras destacam que a análise documental apresenta ainda como vantagem a característica dos documentos – o livro didático, neste caso – constituírem uma fonte estável, fiel e rica e, possibilita diversas consultas e servindo de base a diferentes estudos.

De acordo com Roger Chartier (1999), devem-se considerar dois aspectos sobre o livro didático como objeto de pesquisa em História da Educação: primeiro, o fato de ser o livro escolar um material de grande circulação e, por isso, prestar a uma grande contribuição tanto para a história do pensamento como também das práticas educativas quando aliado a outras fontes – escritas, orais e iconográficas; e, segundo, que ele traz em si os conteúdos explícitos e implícitos que foram referenciados pela sociedade num determinado período revelando as representações, os valores e as tendências políticas e sociais predominantes.

De acordo com Chervel (1990), que indica também o livro didático como fonte segura para a história das disciplinas escolares por ser este um material impresso que está e esteve presente na relação direta entre os anseios da sociedade, o professor e o aluno. Portanto, poderiam constatar através de suas páginas as tendências pedagógicas que foram referenciadas para o ensino num determinado período, neste caso o da geometria, visando a uma comparação entre tendências predominantes marcadas pela Matemática Moderna e as atuais abordagens propostas pelos documentos oficiais vigentes.

É importante perceber que os períodos em estudo não possuem fronteiras rígidas. Dessa forma, as denominações e períodos acima pretendem apenas indicar a tendência pedagógica dominante no ensino da geometria naquele período, sabendo-se que cada tendência educacional não se esgota, mas continua presente, perpassando os períodos subsequentes, como confirma Chervel (1990), que os sistemas antigos presentes nas disciplinas escolares ainda permanecem no momento em que o novo se instala, co-existindo assim o novo e o antigo em proporções variáveis.

Por isso, Valente (2004) afirma que o historiador de uma determinada disciplina defronta-se com épocas em que a produção didática apresenta-se estável, caracterizando bem uma vulgata escolar. Mas, há momentos impulsionados pelos mais diversos fatores, em que o historiador encontra exemplares e interage com eles, questiona e procura dar origem a uma nova concepção, procurando esclarecer tendências no referido ensino. Por isso, que a análise de livros didáticos de matemática poderá mostrar elementos consideráveis na trajetória do ensino de geometria no Brasil.

Mas, para isso, é necessário considerar estes livros como uma fonte de pesquisa histórica e, por meio deles, pode-se investigar a circulação de idéias sobre aquilo que a escola deveria ensinar, possibilitando também conhecer a concepção educativa que estaria permeando as propostas de formação de cidadãos por meio da escola, através dos possíveis questionamentos em relação à abordagem dos conteúdos, do discurso impregnado nos textos, considerando aspectos como temporalidade e espaço, traduzindo assim a história das instituições escolares (BITTENCOURT, 2008).

Por isso, entende-se que a análise dos tópicos de geometria incluídos nos livros didáticos de matemática possa revelar as mudanças e permanências das características desta ciência incluída nos livros didáticos de matemática, analisando como o desenho geométrico foi contemplado nestes conteúdos. Para isto, apresentam-se as considerações que pretendem explicitar como se produzirá este trabalho, bem como descrever o modo pelo qual se delimitou a questão da pesquisa e os objetivos do estudo.

Portanto, procurando compreender esta situação, tornou-se necessário, então, escolher e selecionar os livros didáticos que seriam utilizados para análise e que poderiam dar suporte para responder às questões desta investigação.

4.2 Apresentando os livros didáticos para análise

A análise dos tópicos de geometria incluídos nos livros didáticos de matemática poderá revelar alterações das propostas e os objetivos para o ensino da geometria. Portanto, uma análise de como o desenho geométrico foi apresentado nestes conteúdos poderá explicar parte deste complexo problema que é o ensino desta disciplina no Brasil. Para isto, apresentam-se aqui as considerações que pretendem explicitar como se produzirá este trabalho, bem como descrever o modo pelo qual se delimitou a questão da pesquisa e os objetivos do estudo.

Com o desenvolvimento da pesquisa, foi possível constatar que o ensino de matemática no Brasil teve momentos de forte influência de movimentos que provocaram mudanças na abordagem dada ao ensino de geometria, nas três últimas décadas do século XX. Estes fatos ajudaram a definir o recorte temporal desta pesquisa: O surgimento da Matemática Moderna (décadas de 60 e 70) que tinha como objetivo compactar e não proporcionar o ensino de geometria nas escolas e isto contribuiu para que o desenho geométrico se tornasse uma disciplina optativa; o Movimento de Educação Matemática (décadas de 80 e 90) que propôs o retorno do ensino de geometria e não se posicionou em relação ao desenho geométrico; a LDB 5692/71 que foi influenciada pela Matemática Moderna ao agregar os seus objetivos e, por fim, a nova LDB - nº 9394/96 e o PCN (1997) de matemática que sugerem que o ensino de geometria seja articulado com o desenho geométrico.

Diante deste contexto, definiu-se como marco inicial o surgimento da Matemática Moderna (1970) e como marco final, optou-se pelo ano 2000, posterior à publicação da nova LDB de 1996, que apontou para a necessidade de uma reforma em todos os níveis educacionais, que se inspira, em parte, nas visíveis transformações por que passa a sociedade contemporânea, marcada pelo neoliberalismo econômico, a globalização e a revolução causada pelas tecnologias digitais (SAVIANNI, 2003). Essa LDB trouxe em suas discussões novas propostas de organização curricular como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e as políticas públicas mais amplas em relação aos livros didáticos, com a ampliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) que, possivelmente, tenham influenciado na edição desses impressos.

Baseado nas considerações de Chervel (1990) acerca da pesquisa qualitativa, buscou-se a coleta dos dados pela análise de amostras de livros didáticos de matemática da 8ª série do ensino fundamental II que foram editados e muito utilizados pelas escolas brasileiras para, a partir daí, verificar de que forma o desenho geométrico fora inserido nos tópicos de geometria, considerando o período entre as décadas de 1970 a 2000. Foi selecionado o livro didático da 8ª série por ser considerada que apresenta mais tópicos de geometria e estes assuntos mantêm uma relação de interdependência com o desenho geométrico, pois são conteúdos que envolvem paralelismo, polígonos, circunferência, círculos, corda, tangente, áreas de figuras planas, homotetia, arcos e setores e, além disso, são fundamentados em tópicos elementares de matemática, como proporção, equações do primeiro e segundo graus e relações trigonométricas, entre outros. Dentre os livros didáticos de matemática editados e utilizados pelas escolas brasileiras, pode-se evidenciar algumas coleções, considerando os autores, editoras e ano de publicação. Entretanto, no levantamento destas obras que foram editadas e utilizadas pelas escolas entre 1970 e 2000, foram encontradas 10 coleções de livros de matemática do antigo 1º grau, hoje ensino fundamental II.

Tabela 01: levantamento dos livros didáticos de matemática

Livro didático de matemática	**Autor**	**Editora**	**Ano**
Matemática: curso ginasial completo	Luiz. Mauro Rocha e Rui Madsen Barbosa	IBEP	1970
Matemática para o ginásio	Osvaldo Sangiorgi	NACIONAL	1971
Matemática – Ensino Programado: Primeiro Grau	Antônio Marmo Oliveira	LLI	1973
Matemática para o curso fundamental: 1º grau	Reginaldo N. de S. Lima e Maria do Carmo Vila	VEGA	1974
Matemática para o 1º grau	Orlando Antônio Zambuzzi	ÁTICA	1976
Ensino Objetivo de Matemática do 1º grau	Álvaro Andrini	BRASIL	1982
Matemática 5, 6, 7 e 8: 1º grau	Omar Catunda e Martha M. Dantas	PLANETA	1982
Matemática – conceitos e histórias- Ensino Fundamental	Scipione di Pierro Netto	SCIPIONE	1988

Matemática Fácil: 1º grau	Linaldo Malveira	ÁTICA	1993
A Conquista da Matemática– Nova Matemática Moderna	Benedito Castrucci, José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Júnior	FTD	1998

Estas obras se encontram nos acervos da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, da Universidade do Estado da Bahia - UNEB e na Biblioteca Municipal de Feira de Santana-BA. Nestas coleções, identificam-se alguns problemas materiais, como a falta de alguns exemplares, sem capa, sem índice e ausência de páginas. Uma característica comum a todas elas é a estrutura dos conteúdos inerentes à geometria, diferenciando-se, nas abordagens e nos exercícios propostos aos alunos. O desenho geométrico não é referenciado na apresentação dos conteúdos e nem nos exercícios nos exemplares publicados na década de 1970, mas nas publicações a partir de 1985, constata-se que há uma preocupação com a resolução de problemas e, nestes, o desenho geométrico é um meio auxiliar na resolução.

Conforme Chopin (2002), a dificuldade de acesso aos livros é localizar determinados exemplares, devido ao grande número de publicações, numerosas edições, dispersão, não manutenção, incompletude e também o descaso demonstrado pela pesquisa sobre os livros didáticos, justificando com isso o primeiro critério adotado na seleção de livros a serem analisados em pesquisas dessa natureza: exemplares conservados nos acervos disponíveis.

Diante da quantidade de livros e autores identificados, a pesquisa limitou-se apenas à análise dos capítulos de geometria inseridos nos livros didáticos de matemática da 8ª série do ensino fundamental II da coleção de *Matemática*, cujo autor é Orlando Antonio Zambuzzi (1976) e o da coleção *A Conquista da Matemática* de autoria de José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Júnior (1998). Assim, a seleção destes dois exemplares foi de acordo com critérios sugeridos por Chervel (1990) que é a abrangência do uso do exemplar e o que apresentou disponibilidade.

Após esta etapa, foi feito um estudo comparativo das diferentes edições desses dois livros, os mais adotados no período. Segundo Damázio (2006), Zambuzzi foi o autor que mais editou livros nas décadas de 1960 e 1970, por ser um dos grandes defensores da Matemática Moderna. Já as obras de Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, foram as mais adotadas pelas escolas brasileiras, a partir de 1985.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), no planejamento de uma pesquisa, sobretudo se a mesma for qualitativa, é complicado decidir qual processo de análise e interpretação dos dados será mais conveniente, antes de conhecê-los. Além de que, segundo Bogdan e Biklen (1994), o objetivo não confirma hipóteses pré-definidas. Ao contrário, as abstrações são construídas enquanto os dados particulares vão se agrupando, ao serem recolhidos. O material coletado para analise é rico em descrições, relatos, práticas, etc. O investigador tem de estar atento para todos os elementos envolvidos na situação, pois eles podem ser importantes para o entendimento do problema de estudo (BOGDAN e BIKLEN, 1994). Portanto, ao desenvolver as análises, outros aspectos podem ser levados em consideração e alguns que foram planejados não têm tanta relevância para o trabalho.

4.3 O desenho geométrico na geometria dos livros didáticos de matemática

Este item tem o objetivo de apresentar a análise dos livros didáticos de matemática que representam o objeto deste estudo, cujo foco consiste, como já foi dito anteriormente, verificar como o desenho geométrico é interpretado nos tópicos de geometria inseridos nos exemplares selecionados. De acordo com Trinchão (2008, p.93), "o livro didático, como suporte de memória coletiva e visual, materializa, registra, socializa e congela no tempo as praxes acadêmicas, entendidas como as ações educativas, os saberes a serem aplicados em sala de aula".

Assim, a análise se desenvolve destacando um capítulo de geometria de cada livro. Nesses capítulos será destacado o mesmo tópico e conteúdo para que se possa comparar as abordagens dada à geometria nos diferentes períodos. O estudo seguirá em dois momentos: o primeiro, identificação e descrição das obras e, o segundo, um estudo comparativo dos tópicos selecionados, levando em consideração, principalmente como desenho geométrico está incluído na geometria.

MATEMÁTICA **de Orlando A. Zambuzzi**

O primeiro livro a ser analisado é intitulado *Matemática* de autoria de Orlando A. Zambuzzi, editado pela editora Ática em 1976, porém não indica o número da edição. Este livro traz uma geometria que agrega uma abordagem proposta pelos modernos ao apresentar os conteúdos compactados e estanques, não mostrando que há uma relação entre aquela geometria que está sendo apresentada pelo livro e o contexto ou à história ao qual o aluno está inserido. Este exemplar pertence ao acervo bibliográfico da UEFS.

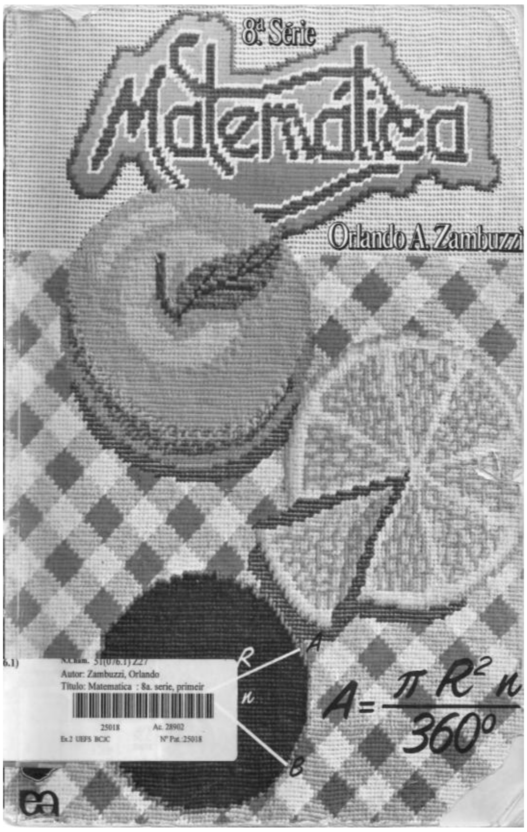


Figura 16. Capa do livro Matemática
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi, 1976

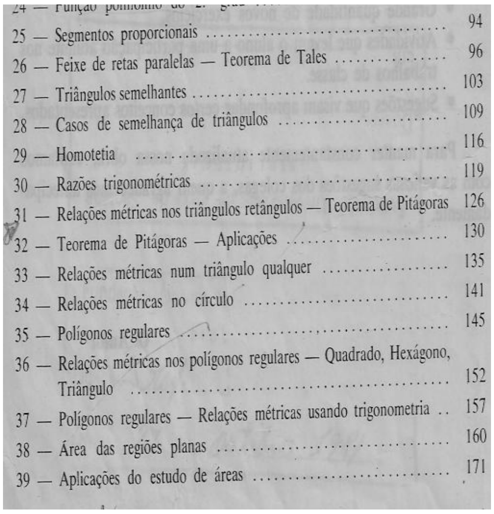


Figura 17. Índice do livro Matemática
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi, 1976

O livro é constituído de 172 páginas distribuídas em 39 capítulos (anexo 01), sendo 15 tópicos de geometria, os quais ocupam 77 páginas. Isto significa que 38,4% dos conteúdos são de geometria e 45% das páginas são destinadas a esta área. Porém, observando o índice é possível verificar uma das características que o ensino de Matemática foi submetido a partir de 1970; a inclusão da geometria nos últimos capítulos dos livros. Estes capítulos são: Segmentos proporcionais, feixe de retas paralelas – teorema de Tales, triângulos semelhantes, casos de semelhanças, homotetia, razões trigonométricas no triângulo retângulo, relações métricas no triângulo retângulo – teorema de Pitágoras, teorema de Pitágoras – aplicações, relações métricas num triângulo qualquer, relações métricas no círculo, polígonos regulares, relações métricas nos polígonos – triângulo, quadrado e hexágono, polígonos regulares – relações métricas usando trigonometria, áreas de regiões planas e aplicações do estudo de áreas.

***A CONQUISTA DA MATEMÁTICA* de José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr.**

Este é o segundo livro a ser analisando, *A Conquista da Matemática*, cujos autores são José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Júnior da editora FTD em 1998, e não indica o número da edição. Porém, os autores referenciam a obra como *A Conquista da Matemática*-NOVA. Este livro didático apresenta a geometria a partir de algumas indicações do PCN de matemática (1997) e as propostas do Movimento de Educação Matemática. Convém destacar que o livro foi editado em 1998 e pertence ao acervo bibliográfico da Biblioteca Municipal de Feira de Santana- BA.

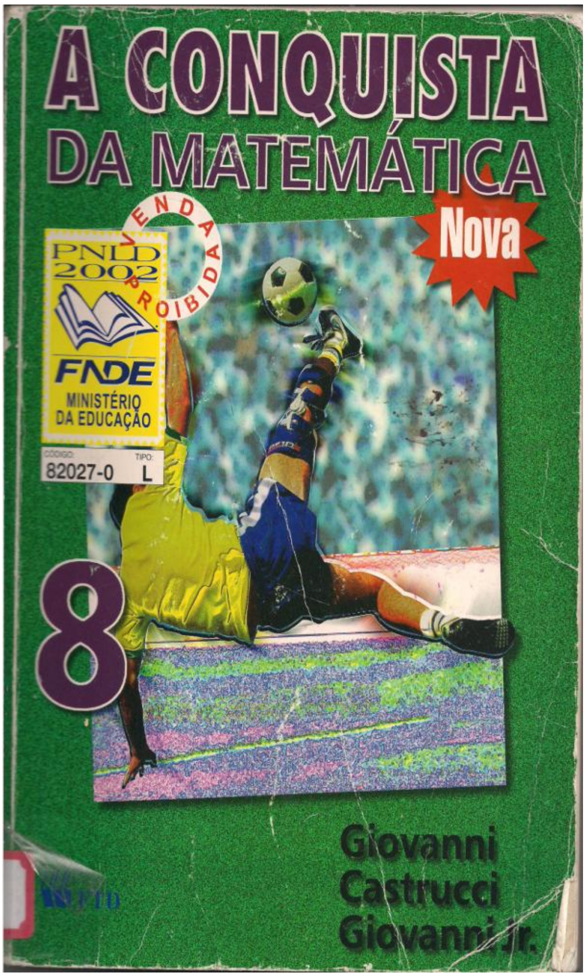


Figura 18. Capa A Conquista da Matemática
Fonte: A Conquista da Matemática Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998

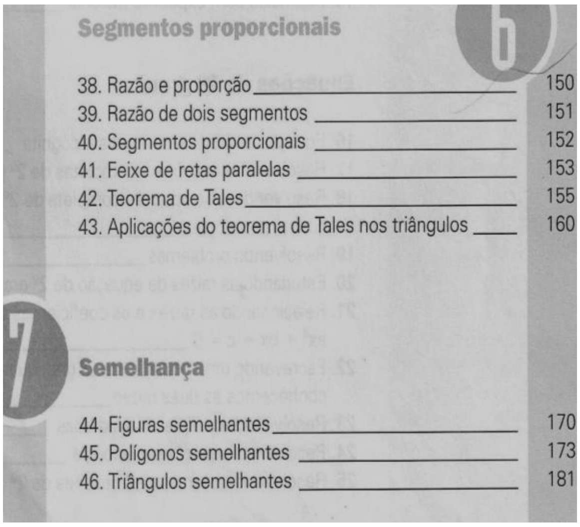


Figura 19. Índice do livro A Conquista da Matemática
Fonte: A Conquista da Matemática Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998

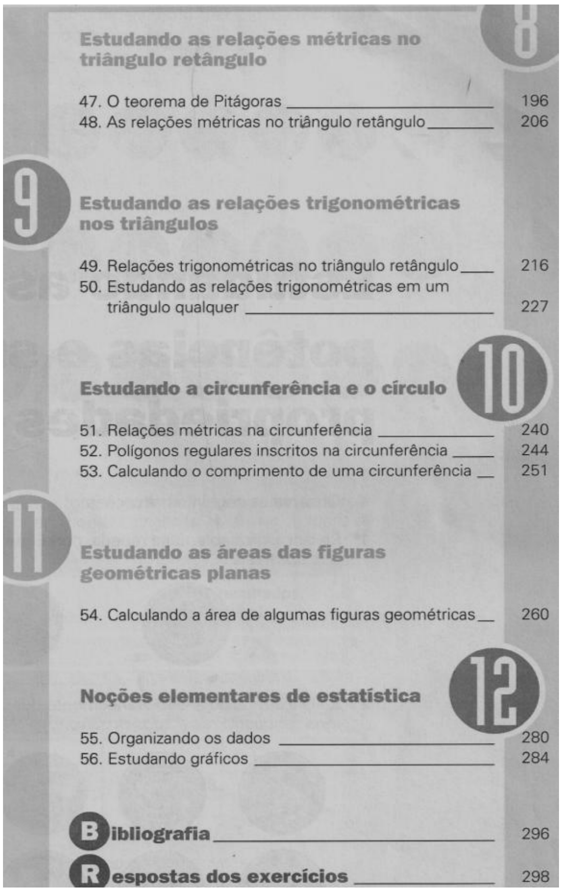


Figura 20. Índice do livro A Conquista da Matemática Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998

Analisando o seu índice, apesar das propostas de inovações para o ensino da geometria, pode-se constatar que os tópicos dessa disciplina continuam sendo incluídos no final do livro, o qual é constituído de 12 capítulos e 298 páginas, sendo 6 tópicos de geometria ocupando 129 páginas (anexos 02 e 03). Sendo 50% dos conteúdos de geometria e 43% das páginas destinadas a esta área. Os conteúdos de geometria são apresentados nos capítulos de segmentos proporcionais – teorema de Tales, semelhança de triângulos, estudando as relações métricas no triângulo retângulo – teorema de Pitágoras, estudando as relações trigonométricas nos triângulos, estudando a circunferência e o círculo, estudando as áreas das figuras geométricas planas.

Portanto, podemos perceber que a apresentação dos sumários das obras apresenta um conjunto estável de conteúdos inerentes à geometria. Não houve mudança na posição dos capítulos que tratam de geometria: ainda continuam sendo os últimos tópicos apresentados nos livros, resquícios da Matemática Moderna. Houve algumas alterações nos conteúdos, no sentido de excluir e acrescentar. No livro *A Conquista da Matemática*, o tópico homotetia não foi inserido; porém, nas abordagens, os conteúdos são detalhados, envolvendo mais particularidades nas apresentações e um número de exercícios expressivamente maior em relação ao livro *Matemática*. Entretanto, *A Conquista da Matemática*, tem um maior número de páginas, tendo inserido em alguns dos seus capítulos tópicos que, no livro *Matemática*, são considerados capítulos.

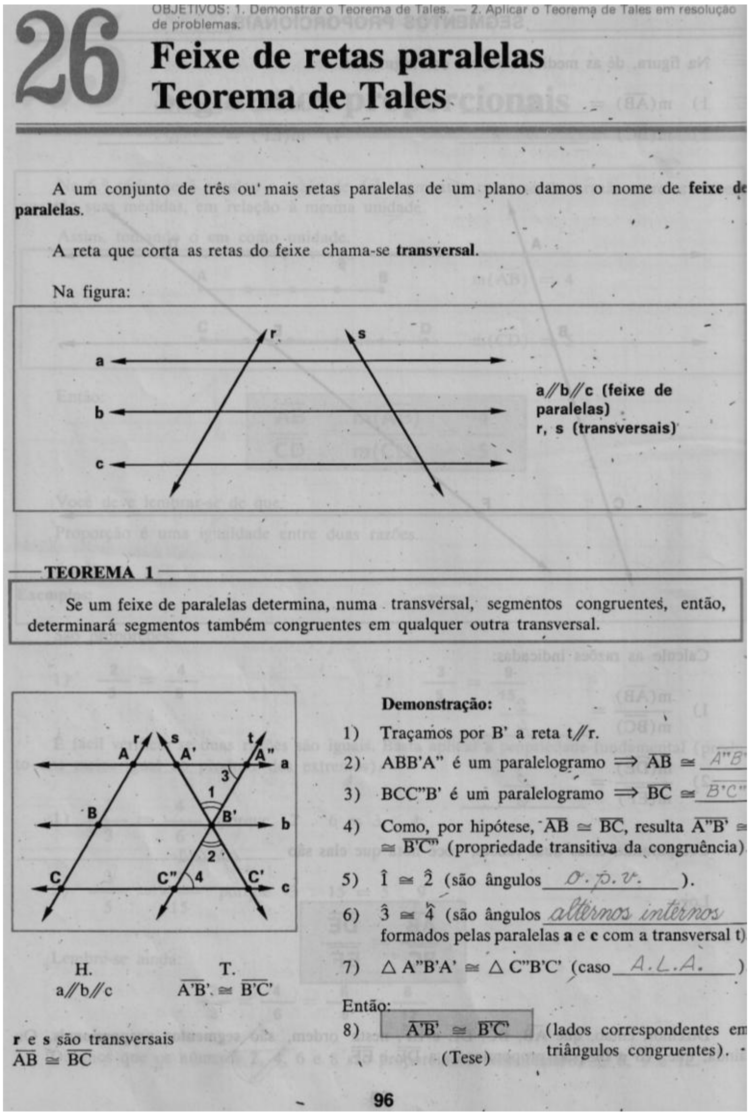
Apenas *A Conquista da Matemática* indicou a bibliografia que foi utilizada como suporte para a elaboração da obra, e consta um tópico com as respostas dos exercícios que foram propostos aos alunos.

4.4 Tópicos analisados

Nos dois livros selecionados para a análise, apenas os tópicos de geometria são objetos desse estudo, levando em consideração, principalmente como o desenho geométrico está incluído nas abordagens inerentes aos conteúdos e nos exercícios que são propostos aos alunos. Também, leva em consideração se na apresentação dos conteúdos são referenciados os aspectos práticos e históricos e as alterações que estes conteúdos foram submetidos no período delimitado. Convém pontuar também que outros aspectos considerados relevantes poderão ser considerados na descrição do estudo como deslizes nos conceitos, excesso ou não de exercícios propostos.

4.4.1 Segmentos proporcionais/teorema de Tales

No livro *Matemática*, são dedicadas sete páginas a este conteúdo, que é apresentado ao aluno sem nenhuma definição, com uma abordagem que valoriza o excesso de formalismo e a simbologia da teoria dos conjuntos. O conteúdo é inserido no livro sem nenhuma referência histórica e não apresenta nenhuma aplicação intuitiva desta ciência. Isto constata que o autor a concebe como uma ciência que não tem vínculos com a realidade, característica dos não realistas. O desenho geométrico das retas paralelas é apresentado sempre na horizontal, em paralelo às margens superior e inferior da página. O conteúdo inclui a apresentação de um teorema e o demonstra apoiado numa construção geométrica de retas paralelas e transversais exigindo do aluno uma compreensão abstrata da geometria. Na demonstração, o aluno é solicitado a completar lacunas, o que comprova a pedagogia voltada para aspectos abstratos deste ensino, característica marcante da proposta da Matemática Moderna.



26 OBJETIVOS: 1. Demonstrar o Teorema de Tales. — 2. Aplicar o Teorema de Tales em resolução de problemas.

Feixe de retas paralelas
Teorema de Tales

A um conjunto de três ou mais retas paralelas de um plano damos o nome de **feixe de paralelas**.

A reta que corta as retas do feixe chama-se **transversal**.

Na figura:

TEOREMA 1

Se um feixe de paralelas determina, numa transversal, segmentos congruentes, então, determinará segmentos também congruentes em qualquer outra transversal.

H. a//b//c

r e s são transversais
$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

T. $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$

Demonstração:

1) Traçamos por B' a reta t//r.
2) ABB'A" é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{AB} \cong$ $\overline{A"B'}$
3) BCC"B' é um paralelogramo $\Rightarrow \overline{BC} \cong$ $\overline{B'C"}$
4) Como, por hipótese, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, resulta $\overline{A"B'} \cong \overline{B'C"}$ (propriedade transitiva da congruência).
5) $\hat{1} \cong \hat{2}$ (são ângulos o.p.v.).
6) $\hat{3} \cong \hat{4}$ (são ângulos alternos internos formados pelas paralelas **a** e **c** com a transversal t)
7) △ A"B'A' ≅ △ C"B'C' (caso A.L.A.)

Então:
8) $\boxed{\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}}$ (Tese) (lados correspondentes em triângulos congruentes).

96

Figura 21. Teorema de Tales
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.96

Nos exercícios que são apresentados, as questões para os alunos resolverem exigem apenas a manipulação da proporção e não fazem nenhuma referência ao desenho geométrico. Em apenas dois exercícios, o paralelismo é apresentado inclinado e, nos demais, o padrão é paralelo à margem inferior da página. Em nenhum exercício é considerado o contexto ou questões práticas que envolvam a geometria. Assim, o aluno é submetido a uma atitude passiva diante da geometria, aceitando o que lhe é imposto como verdadeiro, a partir da autoridade do autor e do professor. De acordo com Marmo &

Marmo (1994), a prática do desenho geométrico fundamentada nos seus conceitos, na lógica e no rigor que lhe são peculiares, significa um grande ganho na geometria e em outras áreas do conhecimento, permitindo novas descobertas e uma maior compreensão.

As questões que não problematizam o contexto e negam a construção geométrica como um meio de tornar viável a resolução do problema foram uma das características dos pressupostos dos modernos.

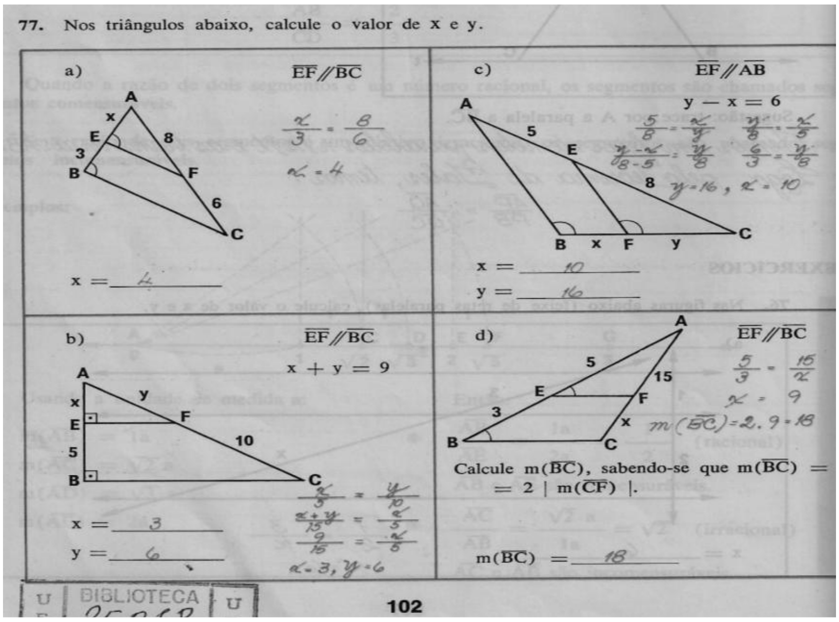
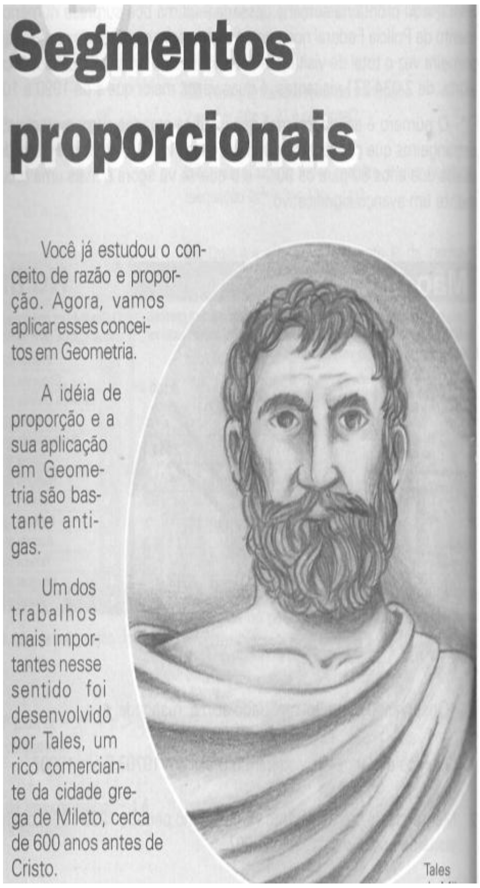


Figura 22. Aplicações do teorema de Tales
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.102

No livro *A Conquista da Matemática*, para este capítulo, os autores utilizam 15 páginas para apresentar o tópico segmentos proporcionais, fazendo uma abordagem que se distingue da anterior por adotar um ponto de vista objetivo, mostrando a relevância do significado da presença deste assunto no currículo com aspectos históricos de sua aplicação. Assim, apresenta a geometria como uma ciência envolvida com problemas inerentes à vida prática do homem. No problema apresentado abaixo, a resolução se trona possível a partir de uma construção geométrica como um elemento que permite a visualização de tal situação.

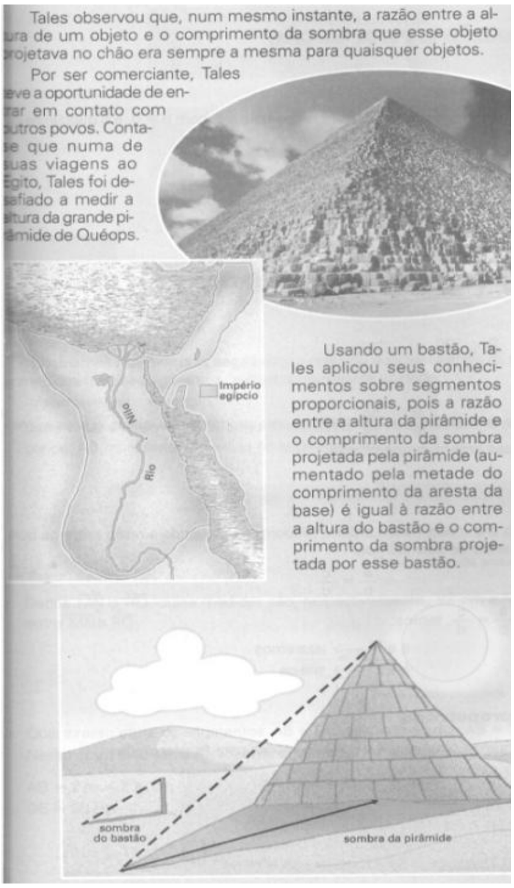


Segmentos proporcionais

Você já estudou o conceito de razão e proporção. Agora, vamos aplicar esses conceitos em Geometria.

A idéia de proporção e a sua aplicação em Geometria são bastante antigas.

Um dos trabalhos mais importantes nesse sentido foi desenvolvido por Tales, um rico comerciante da cidade grega de Mileto, cerca de 600 anos antes de Cristo.



Tales observou que, num mesmo instante, a razão entre a al-ura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto rojetava no chão era sempre a mesma para quaisquer objetos.

Por ser comerciante, Tales eve a oportunidade de enrar em contato com utros povos. Contae que numa de uas viagens ao gito, Tales foi deafiado a medir a tura da grande pimide de Quéops.

Usando um bastão, Tales aplicou seus conhecimentos sobre segmentos proporcionais, pois a razão entre a altura da pirâmide e o comprimento da sombra projetada pela pirâmide (aumentado pela metade do comprimento da aresta da base) é igual à razão entre a altura do bastão e o comprimento da sombra projetada por esse bastão.

Figura 23. Segmentos proporcionais
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 148

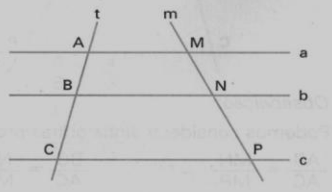
Figura24. Segmentos proporcionais
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 149

Na abordagem do conteúdo, o autor se utiliza de retas paralelas e transversais e vai construindo o conceito de forma intuitiva por meio de análises de segmentos congruentes e, por fim, apresenta a proporcionalidade geométrica. As construções geométricas são utilizadas como suporte para uma melhor compreensão do conceito a ser apresentado. Neste item, o autor referencia o uso do desenho geométrico quando enuncia "Vamos ver a seguir o que acontece quando os segmentos determinados por um feixe de paralelas sobre uma transversal não são congruentes entre si" (GIOVANNI, CASTRUCCI e GIOVANNI JR, 1998, p. 155).

42 TEOREMA DE TALES

Vamos ver a seguir o que acontece quando os segmentos determinados por um feixe de paralelas sobre uma transversal não são congruentes entre si.

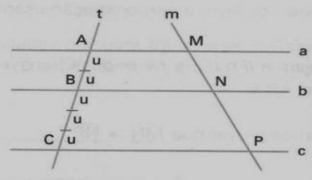
◆ Sejam as retas a // b // c, que determinam sobre a transversal *t* os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e sobre a transversal *m* os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$.



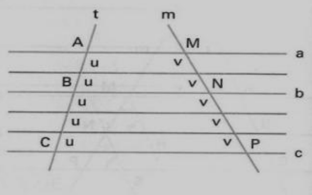
155

Figura 25. Teorema de Tales
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 155

◆◆ Vamos tomar uma unidade *u* tal que AB = 2u e BC = 3u. Dividimos, assim, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em duas e três partes, respectivamente, de modo que os 5 segmentos obtidos sejam congruentes.



◆◆◆ Pelos pontos de divisão, traçamos retas paralelas às retas *a*, *b* e *c*. Pela propriedade vista no capítulo anterior, se os segmentos determinados em *t* são congruentes, então os segmentos determinados em *m* também são congruentes. Chamamos essas medidas de *v*.



Então:

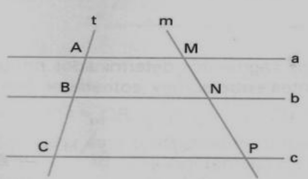
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2u}{3u} = \dfrac{2}{3} \\ \\ \dfrac{MN}{NP} = \dfrac{2v}{3v} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP}$$

, o que significa que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são *proporcionais*.

Essa relação é conhecida como *teorema de Tales*, em homenagem ao matemático grego Tales, que a desenvolveu.

Podemos, então, enunciar o teorema da seguinte maneira:

Um feixe de paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais.



$$a // b // c \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Observação:

Podemos considerar ainda outras proporções a partir do teorema de Tales, tais como:

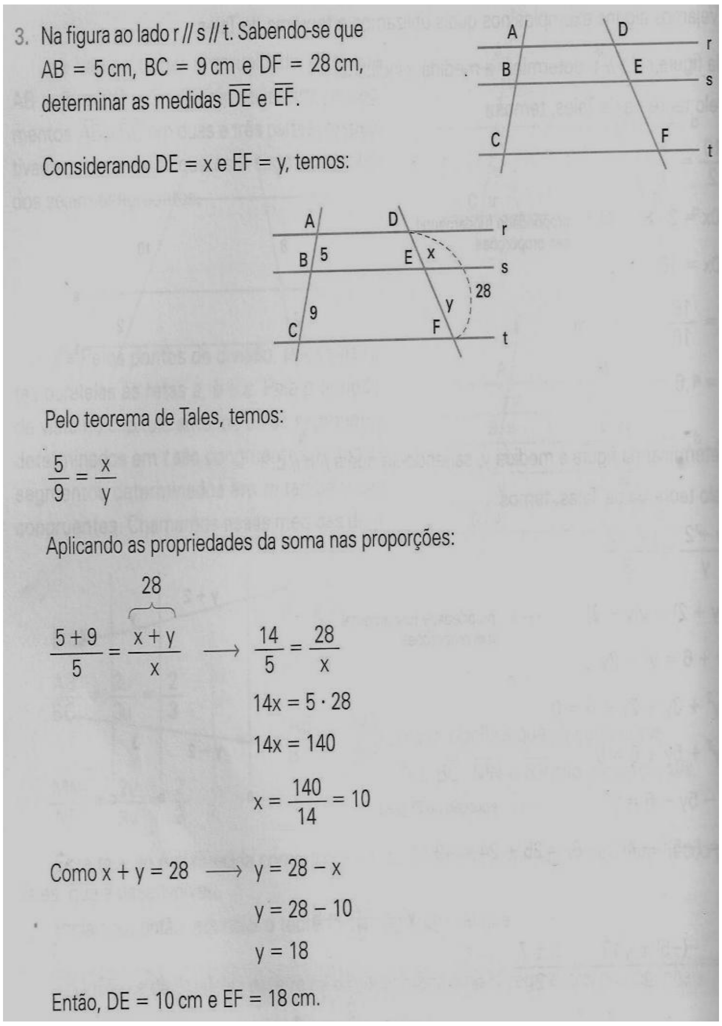
$$\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP} \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP} \qquad \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$$

156

Figura26. Teorema de Tales
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p, 156

Constatam-se exemplos de aplicações inerentes à geometria e, no exemplo 3, há uma questão em cuja resolução se exige uma construção geométrica como meio de visualizar o problema sugerido e apresentar a sua solução.

A experiência nos mostra que, ao visualizar, o aluno desenvolve suas capacidades de resolver problemas de geometria e inerentes à matemática. Esta oportunidade é fundamental para o desenvolvimento da percepção, e ao mesmo tempo, para o aluno se apropriar das noções geométricas como congruência, semelhança e transformação de figuras mediante o desenho. Para Arnheim (2007), as imagens são signos para ver e ver, para este autor, é compreender.



3. Na figura ao lado r // s // t. Sabendo-se que AB = 5 cm, BC = 9 cm e DF = 28 cm, determinar as medidas $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

Considerando DE = x e EF = y, temos:

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{5}{9} = \frac{x}{y}$$

Aplicando as propriedades da soma nas proporções:

$$\frac{5+9}{5} = \frac{\overbrace{x+y}^{28}}{x} \longrightarrow \frac{14}{5} = \frac{28}{x}$$

$$14x = 5 \cdot 28$$

$$14x = 140$$

$$x = \frac{140}{14} = 10$$

Como $x + y = 28 \longrightarrow y = 28 - x$

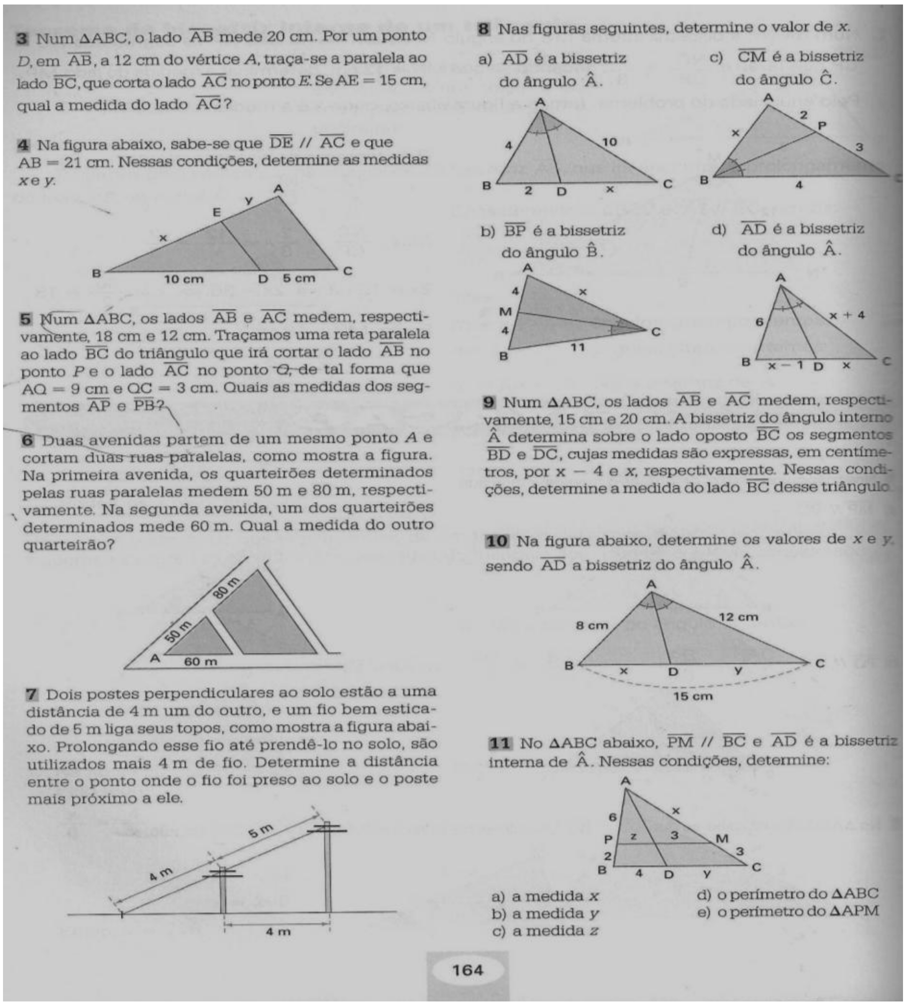
$$y = 28 - 10$$

$$y = 18$$

Então, DE = 10 cm e EF = 18 cm.

Figura 27. Aplicações do teorema de Tales
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 158

Nos exercícios que são indicados para o aluno, pode-se verificar aplicações da própria geometria e também de contexto urbano como nos exercícios 6 e 7.



3 Num ΔABC, o lado $\overline{AB}$ mede 20 cm. Por um ponto *D*, em $\overline{AB}$, a 12 cm do vértice *A*, traça-se a paralela ao lado $\overline{BC}$, que corta o lado $\overline{AC}$ no ponto *E*. Se AE = 15 cm, qual a medida do lado $\overline{AC}$?

4 Na figura abaixo, sabe-se que $\overline{DE}$ // $\overline{AC}$ e que AB = 21 cm. Nessas condições, determine as medidas *x* e *y*.

5 Num ΔABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 18 cm e 12 cm. Traçamos uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo que irá cortar o lado $\overline{AB}$ no ponto *P* e o lado $\overline{AC}$ no ponto *Q*, de tal forma que AQ = 9 cm e QC = 3 cm. Quais as medidas dos segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$?

6 Duas avenidas partem de um mesmo ponto *A* e cortam duas ruas paralelas, como mostra a figura. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas medem 50 m e 80 m, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m. Qual a medida do outro quarteirão?

7 Dois postes perpendiculares ao solo estão a uma distância de 4 m um do outro, e um fio bem esticado de 5 m liga seus topos, como mostra a figura abaixo. Prolongando esse fio até prendê-lo no solo, são utilizados mais 4 m de fio. Determine a distância entre o ponto onde o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele.

8 Nas figuras seguintes, determine o valor de *x*.

a) $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

b) $\overline{BP}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{B}$.

c) $\overline{CM}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

d) $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

9 Num ΔABC, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 15 cm e 20 cm. A bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$ determina sobre o lado oposto $\overline{BC}$ os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, cujas medidas são expressas, em centímetros, por x − 4 e *x*, respectivamente. Nessas condições, determine a medida do lado $\overline{BC}$ desse triângulo.

10 Na figura abaixo, determine os valores de *x* e *y*, sendo $\overline{AD}$ a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.

11 No ΔABC abaixo, $\overline{PM}$ // $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ é a bissetriz interna de $\hat{A}$. Nessas condições, determine:

a) a medida *x*
b) a medida *y*
c) a medida *z*
d) o perímetro do ΔABC
e) o perímetro do ΔAPM

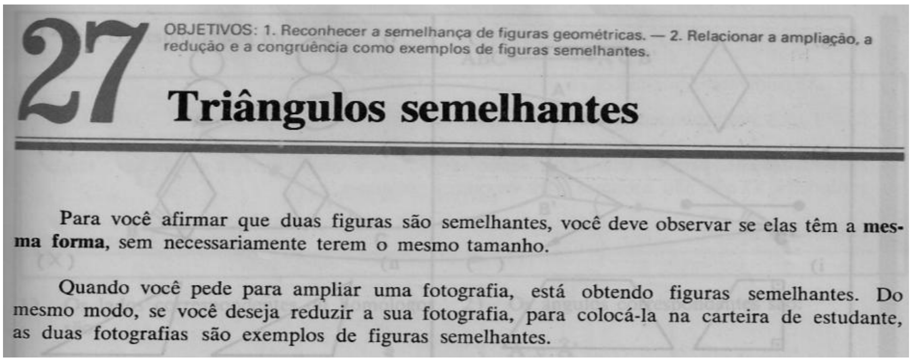
164

Figura 28. Exercícios do teorema de Tales
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p.164

Porém, na resolução de alguns problemas (3, 5 e 9), torna-se necessária a construção geométrica como um meio do aluno visualizar o que está implícito para, a partir dessa construção, elaborar estratégias de resolução.

4.4.2 Semelhança de triângulos

No livro *Matemática*, para semelhança de triângulos, o autor dedica 16 páginas e começa comentando o uso da semelhança no quotidiano através de fotografia, mas não mostra uma aplicação prática no âmbito da geometria e segue com uma apresentação formalizada tendo o desenho geométrico como um meio para explicar as demonstrações.



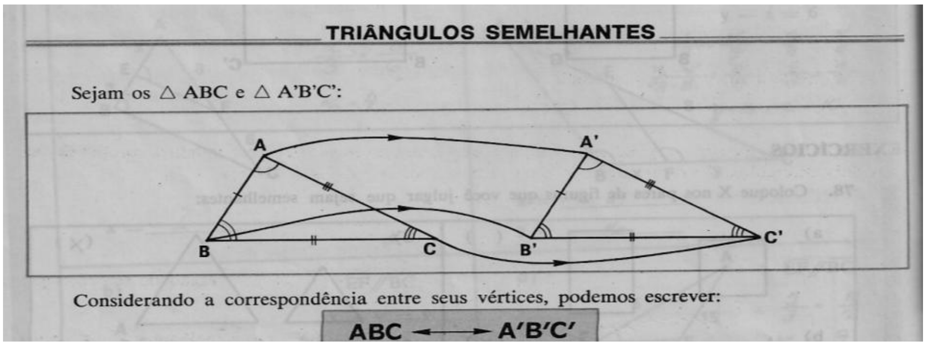
27 OBJETIVOS: 1. Reconhecer a semelhança de figuras geométricas. — 2. Relacionar a ampliação, a redução e a congruência como exemplos de figuras semelhantes.

Triângulos semelhantes

Para você afirmar que duas figuras são semelhantes, você deve observar se elas têm a **mesma forma**, sem necessariamente terem o mesmo tamanho.

Quando você pede para ampliar uma fotografia, está obtendo figuras semelhantes. Do mesmo modo, se você deseja reduzir a sua fotografia, para colocá-la na carteira de estudante, as duas fotografias são exemplos de figuras semelhantes.

Figura 29. Triângulos semelhantes
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.103



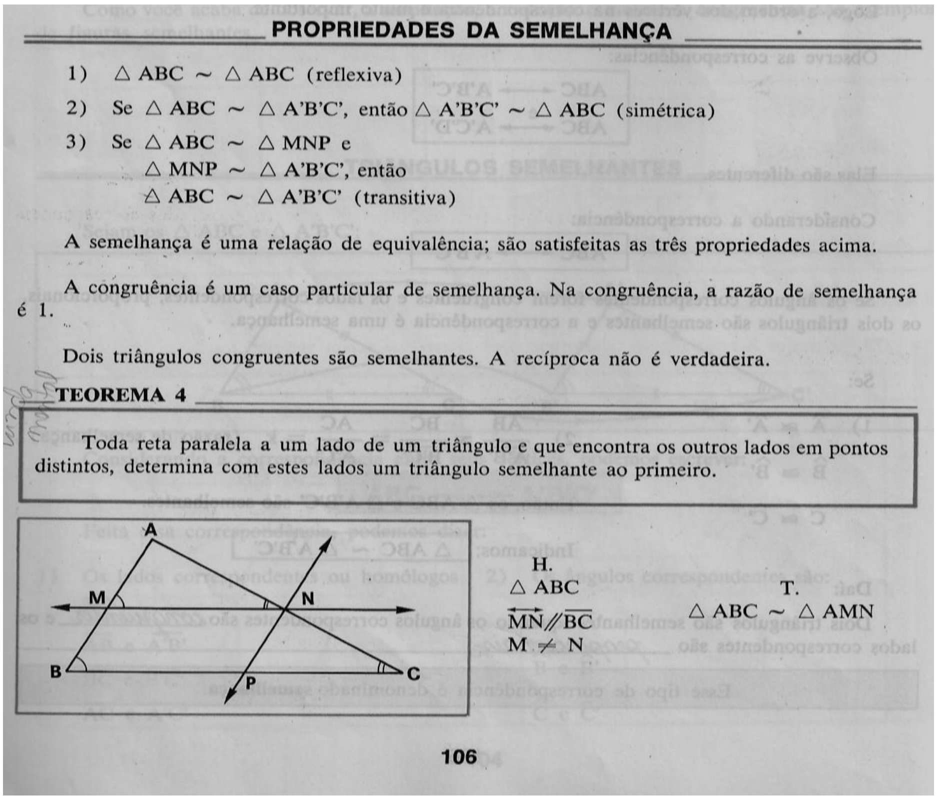
TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Sejam os △ ABC e △ A'B'C':

Considerando a correspondência entre seus vértices, podemos escrever:

ABC ⟷ A'B'C'

Figura 30.Triângulos semelhantes
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.104



PROPRIEDADES DA SEMELHANÇA

1) △ ABC ~ △ ABC (reflexiva)
2) Se △ ABC ~ △ A'B'C', então △ A'B'C' ~ △ ABC (simétrica)
3) Se △ ABC ~ △ MNP e
△ MNP ~ △ A'B'C', então
△ ABC ~ △ A'B'C' (transitiva)

A semelhança é uma relação de equivalência; são satisfeitas as três propriedades acima.

A congruência é um caso particular de semelhança. Na congruência, a razão de semelhança é 1.

Dois triângulos congruentes são semelhantes. A recíproca não é verdadeira.

TEOREMA 4

Toda reta paralela a um lado de um triângulo e que encontra os outros lados em pontos distintos, determina com estes lados um triângulo semelhante ao primeiro.

H. △ ABC
$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{BC}$
M ≠ N

T. △ ABC ~ △ AMN

106

Figura 31. Triângulos semelhantes
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.106

Não há uma definição de triângulos semelhantes. Há uma apresentação formal dos triângulos semelhantes em que as construções geométricas dos triângulos têm o maior lado na horizontal em relação à margem inferior da página, e só apresenta casos particulares, ou seja, apenas triângulos escalenos (anexo 04). Também, não se faz nenhuma referência à construção geométrica de triângulos semelhantes, já que o desenho geométrico tem um grande valor educativo e se constitui num meio de facilitar o entendimento (WAGNER, 1993).

Nesta seção, omitiu-se os casos de semelhanças de triângulos porque o autor do livro seguiu com a mesma linha de abordagem.

Os exercícios propostos aos alunos consistem em identificar se os triângulos são semelhantes ou não.

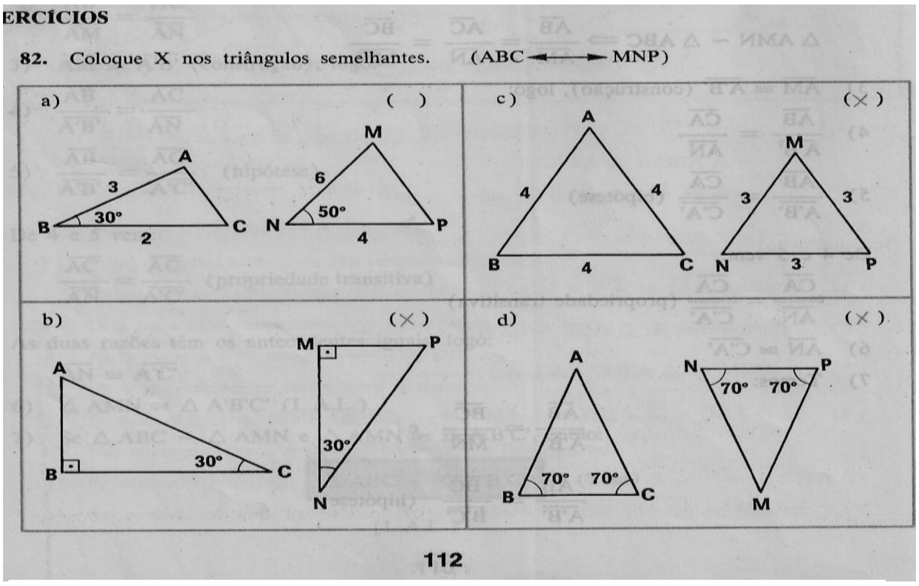


Figura 32. Triângulos semelhantes
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.112

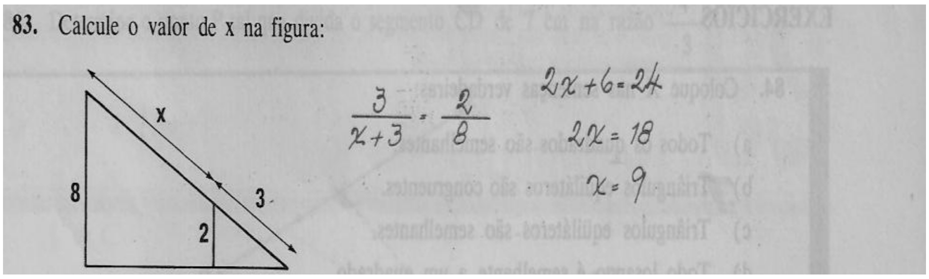
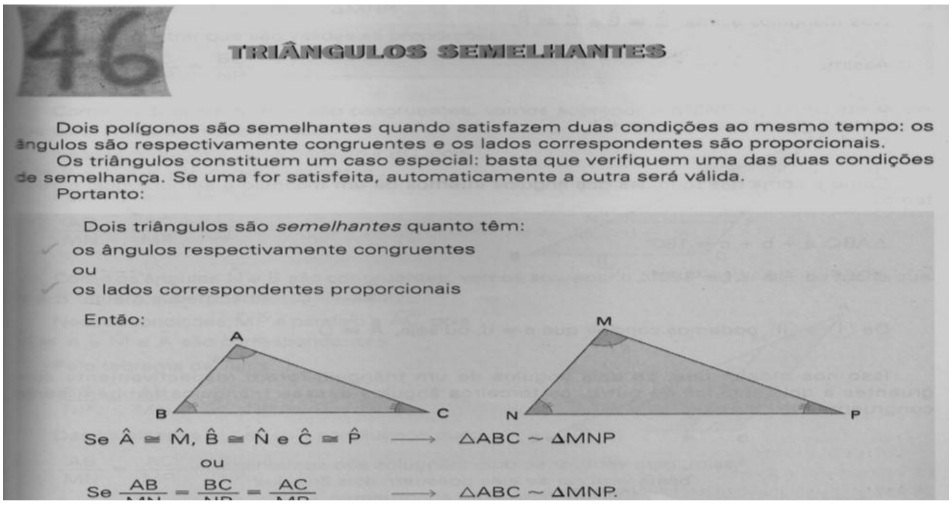


Figura 33. Triângulos semelhantes
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.113

Em apenas uma questão, a 83, faz-se referência à interpretação da semelhança e ao uso da proporção geométrica para apresentar a solução.

No livro *A Conquista da Matemática* são dedicadas 26 páginas a este assunto e, no início, contém uma argumentação sobre a importância da semelhança de figuras no âmbito da vida profissional mostrando, assim, a necessidade de se compreenderem os conceitos, seguindo o mesmo modelo do capítulo anterior (anexos 05 e 06).



46 TRIÂNGULOS SEMELHANTES

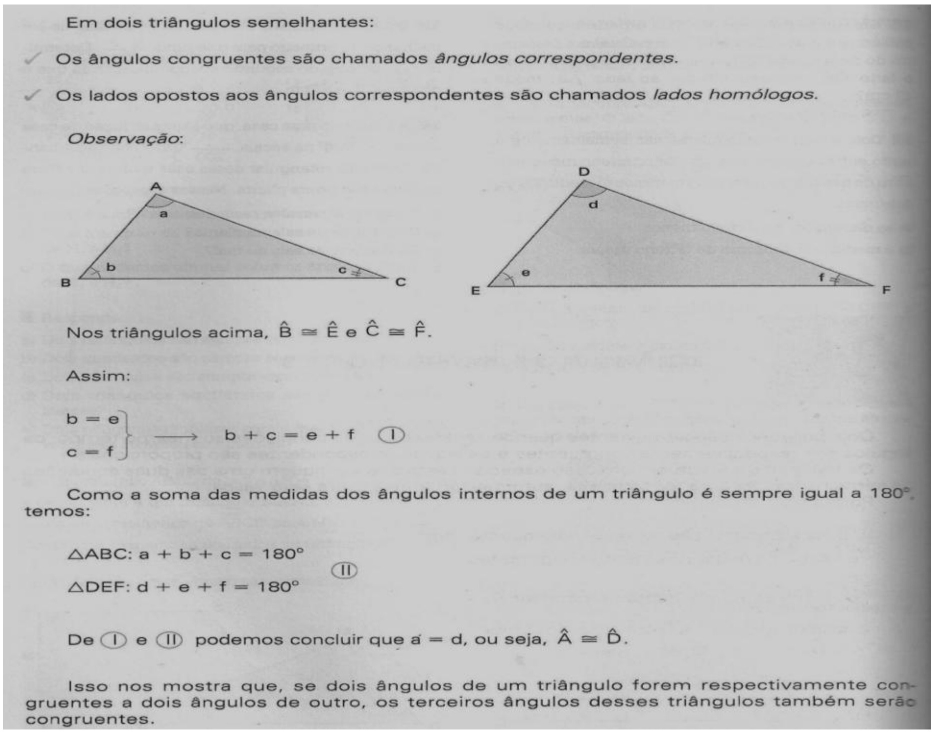
Dois polígonos são semelhantes quando satisfazem duas condições ao mesmo tempo: os ângulos são respectivamente congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.
Os triângulos constituem um caso especial: basta que verifiquem uma das duas condições de semelhança. Se uma for satisfeita, automaticamente a outra será válida.
Portanto:

Dois triângulos são *semelhantes* quanto têm:
- os ângulos respectivamente congruentes
ou
- os lados correspondentes proporcionais

Então:

Se $\hat{A} \cong \hat{M}$, $\hat{B} \cong \hat{N}$ e $\hat{C} \cong \hat{P}$ $\longrightarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle MNP$
ou
Se $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$ $\longrightarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle MNP$.

Figura 34. Triângulos semelhantes
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p.181



Em dois triângulos semelhantes:
- Os ângulos congruentes são chamados *ângulos correspondentes*.
- Os lados opostos aos ângulos correspondentes são chamados *lados homólogos*.

Observação:

Nos triângulos acima, $\hat{B} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{F}$.

Assim:

$$\left.\begin{matrix} b = e \\ c = f \end{matrix}\right\} \longrightarrow b + c = e + f \quad \text{(I)}$$

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°, temos:

$$\begin{matrix} \triangle ABC: a + b + c = 180° \\ \triangle DEF: d + e + f = 180° \end{matrix} \quad \text{(II)}$$

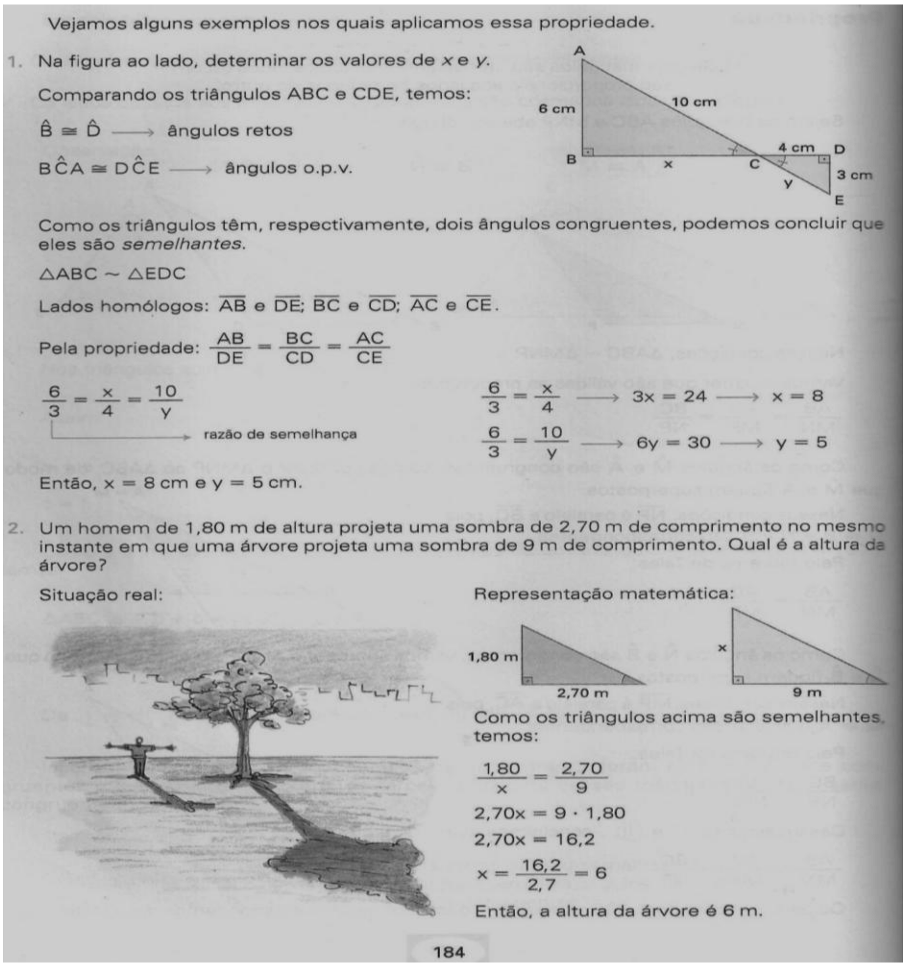
De (I) e (II) podemos concluir que $a = d$, ou seja, $\hat{A} \cong \hat{D}$.

Isso nos mostra que, se dois ângulos de um triângulo forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro, os terceiros ângulos desses triângulos também serão congruentes.

Figura 35. Triângulos semelhantes
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p.182

Nesta abordagem, há uma definição de triângulos semelhantes e, em seguida, uma apresentação a partir da comparação de ângulos congruentes e lados homólogos, construindo uma prova mais intuitiva que dedutiva (anexo 07). Porém, nesta apresentação, o desenho geométrico continua com os triângulos paralelos à margem da página, como no livro *MATEMÁTICA* e, só apresentam polígonos particulares de triângulos escalenos.

Nos exemplos resolvidos, são apresentados triângulos retângulos, como nos casos abaixo:



Vejamos alguns exemplos nos quais aplicamos essa propriedade.

1. Na figura ao lado, determinar os valores de *x* e *y*.

Comparando os triângulos ABC e CDE, temos:

$\hat{B} \cong \hat{D} \longrightarrow$ ângulos retos

$B\hat{C}A \cong D\hat{C}E \longrightarrow$ ângulos o.p.v.

Como os triângulos têm, respectivamente, dois ângulos congruentes, podemos concluir que eles são *semelhantes*.

$\triangle ABC \sim \triangle EDC$

Lados homólogos: $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{CE}$.

Pela propriedade: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$

$\underbrace{\frac{6}{3}}_{\text{razão de semelhança}} = \frac{x}{4} = \frac{10}{y}$

$\frac{6}{3} = \frac{x}{4} \longrightarrow 3x = 24 \longrightarrow x = 8$

$\frac{6}{3} = \frac{10}{y} \longrightarrow 6y = 30 \longrightarrow y = 5$

Então, x = 8 cm e y = 5 cm.

2. Um homem de 1,80 m de altura projeta uma sombra de 2,70 m de comprimento no mesmo instante em que uma árvore projeta uma sombra de 9 m de comprimento. Qual é a altura da árvore?

Situação real:

Representação matemática:

Como os triângulos acima são semelhantes, temos:

$\frac{1,80}{x} = \frac{2,70}{9}$

$2,70x = 9 \cdot 1,80$

$2,70x = 16,2$

$x = \frac{16,2}{2,7} = 6$

Então, a altura da árvore é 6 m.

184

Figura 36. Triângulos semelhantes
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p.184

Nestes exemplos, no tipo 1, o desenho geométrico já é apresentado na questão, cabendo ao estudante apenas identificar as propriedades da semelhança e resolver. No tipo 2, apresenta-se uma aplicação real e vinculada ao contexto, e é necessário que o aluno faça a construção geométrica para, a partir da figura, estabelecer um modelo de resolução por meio de uma interpretação de semelhança entre dois triângulos. Pode-se constatar que o autor apresentou dois triângulos para mostrar que a resolução do problema está na compreensão do desenho geométrico.

10 Um $\triangle ABC$ é isósceles, tal que $AB = AC = 20$ cm. Por um ponto D do lado $\overline{AB}$, tal que $AD = 5$ cm, traça-se uma paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo, que irá encontrar o lado $\overline{AC}$ no ponto E. Sabendo-se que $DE = 4$ cm, qual a medida da base do triângulo isósceles ABC?

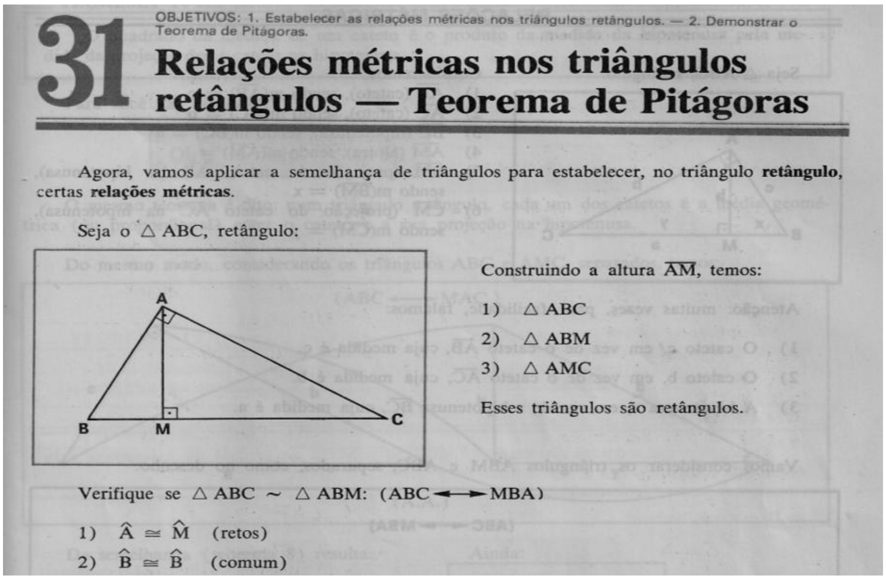
Figura 37. questão 10 de triângulos semelhantes
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 190

Nos exercícios para o aluno questões são de caráter aplicativo da geometria, a maior parte, e algumas são voltadas para geometria e o contexto, em consonância com as sugestões do PCN de matemática (1997). Nestes exercícios, a questão 10 sugere que se o aluno não tiver um conhecimento específico do desenho geométrico, a mesma não será resolvida (anexo 08).

4.4.3 Relações métricas no triângulo retângulo (o teorema de Pitágoras)

Para o capítulo, relações métricas no triângulo retângulo, o livro *Matemática* dedica 9 páginas, seguindo o critério de apresentação das abordagens anteriores, não mencionando definições nem aspectos intuitivos da geometria, e começa com uma abordagem dedutiva das relações métricas no triângulo retângulo como um meio de se entender a demonstração do teorema de Pitágoras. Não apresenta nenhuma conexão com o desenho geométrico, embora nas primeiras demonstrações de tal teorema, a construção geométrica, segundo Eves (2000) tenha exercido um papel fundamental para a compreensão.

O autor retoma semelhanças de triângulos para construir as relações métricas no triângulo retângulo, e vai apresentando o conteúdo dentro da concepção analítica e algébrica da matemática formal. Apresenta o triângulo com o maior lado, no caso a hipotenusa, paralela à margem inferior da página, não fazendo nenhuma referência ao desenho geométrico (anexos 09, 10 e 11). Nestas páginas, o autor utiliza três teoremas a partir da semelhança de triângulos, que auxiliarão na dedução do teorema de Pitágoras (Figura 39).



31 OBJETIVOS: 1. Estabelecer as relações métricas nos triângulos retângulos. — 2. Demonstrar o Teorema de Pitágoras.

Relações métricas nos triângulos retângulos — Teorema de Pitágoras

Agora, vamos aplicar a semelhança de triângulos para estabelecer, no triângulo **retângulo**, certas **relações métricas**.

Seja o $\triangle$ ABC, retângulo:

Construindo a altura $\overline{AM}$, temos:

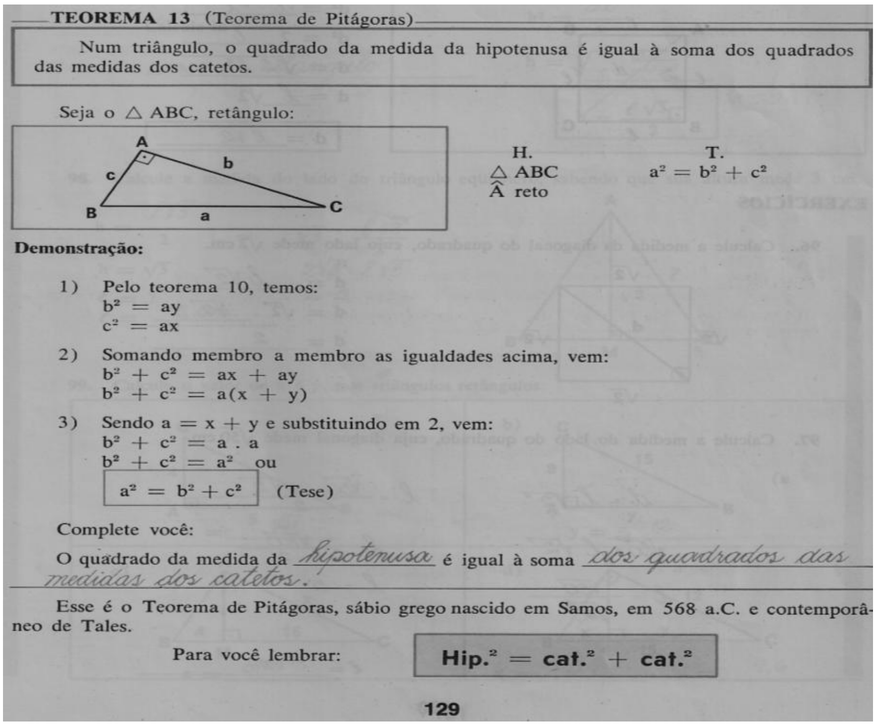
1) $\triangle$ ABC
2) $\triangle$ ABM
3) $\triangle$ AMC

Esses triângulos são retângulos.

Verifique se $\triangle ABC \sim \triangle ABM$: $(ABC \longleftrightarrow MBA)$

1) $\hat{A} \cong \hat{M}$ (retos)
2) $\hat{B} \cong \hat{B}$ (comum)

Figura 38. Relações métricas nos triângulos retângulos Teorema de Pitágoras
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.126



TEOREMA 13 (Teorema de Pitágoras)

Num triângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Seja o $\triangle$ ABC, retângulo:

H. $\triangle$ ABC, $\hat{A}$ reto

T. $a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração:

1) Pelo teorema 10, temos:
$b^2 = ay$
$c^2 = ax$

2) Somando membro a membro as igualdades acima, vem:
$b^2 + c^2 = ax + ay$
$b^2 + c^2 = a(x + y)$

3) Sendo $a = x + y$ e substituindo em 2, vem:
$b^2 + c^2 = a \cdot a$
$b^2 + c^2 = a^2$ ou

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ (Tese)

Complete você:

O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Esse é o Teorema de Pitágoras, sábio grego nascido em Samos, em 568 a.C. e contemporâneo de Tales.

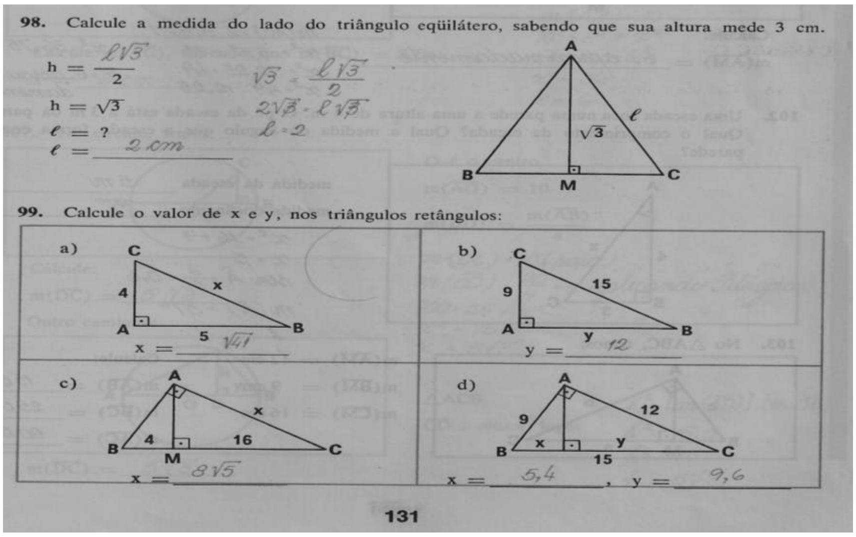
Para você lembrar: $\boxed{\text{Hip.}^2 = \text{cat.}^2 + \text{cat.}^2}$

129

Figura 39. Teorema de Pitágoras
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.129

Porém, na apresentação do teorema de Pitágoras, o autor utiliza-se dos teoremas demonstrados anteriormente. Faz a soma de membros e a substituição de uma expressão e conclui que num triângulo retângulo o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Não é objetivo deste trabalho uma análise na linguagem matemática expressa nos conteúdos, entretanto, nesta abordagem, no teorema 13, o autor declara: “num triângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos” (ZAMBUZZI, 1976, p.129). Assim, generalizando para um triângulo qualquer, uma vez que tal teorema vale apenas para triângulos retângulos. Além disso, exige do aluno uma compreensão dedutiva para ir completando a apresentação que está sendo feita, como nos capítulos anteriores.



98. Calcule a medida do lado do triângulo eqüilátero, sabendo que sua altura mede 3 cm.

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sqrt{3} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$h = \sqrt{3}$ $\quad 2\sqrt{3} = \ell\sqrt{3}$

$\ell = ?$ $\quad \ell = 2$

$\ell =$ 2 cm

99. Calcule o valor de x e y, nos triângulos retângulos:

a) x = $\sqrt{41}$

b) y = 12

c) x = $8\sqrt{5}$

d) x = 5,4 , y = 9,6

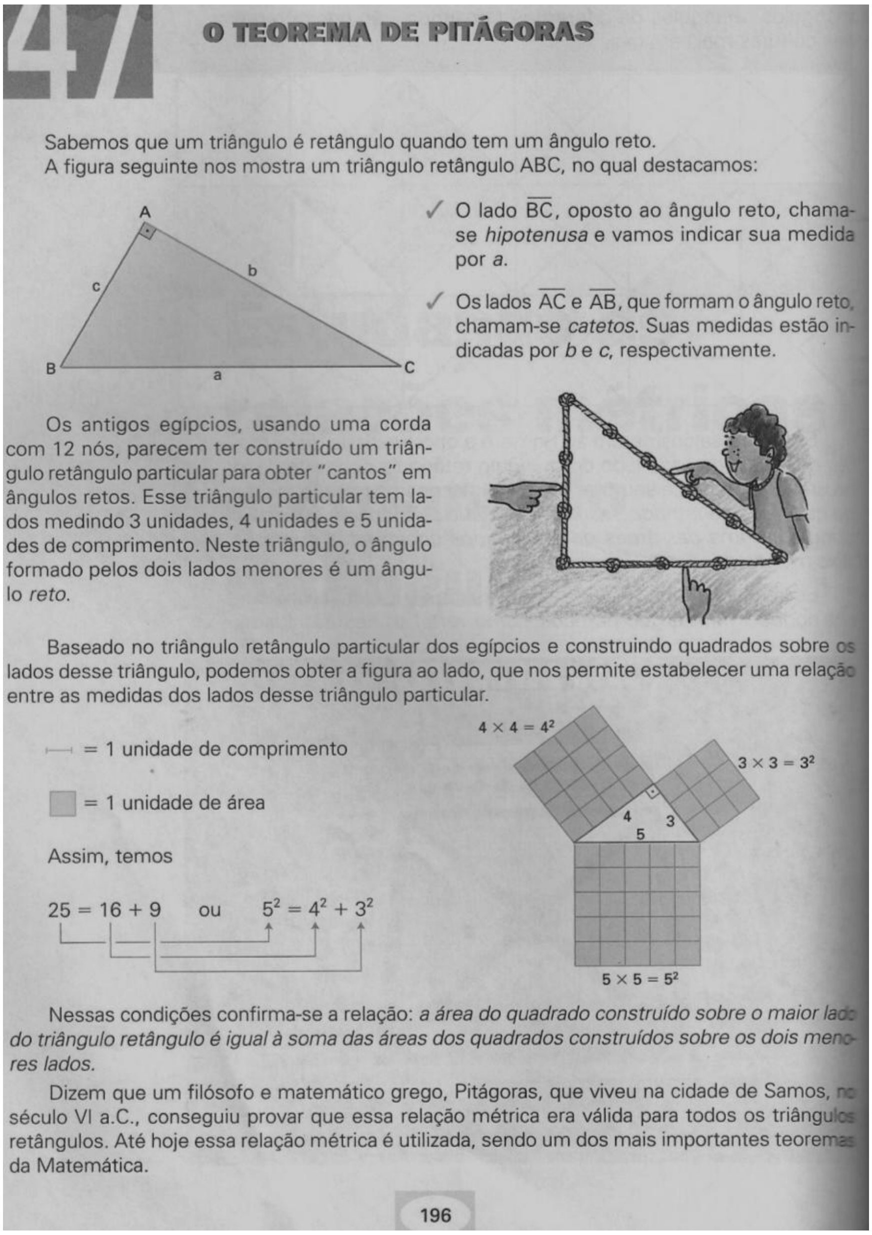
131

Figura 40. Exercícios de Teorema de Pitágoras
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.131

Nestes exercícios, identifica-se uma repetição da teoria apresentada anteriormente, e exige-se apenas a aplicação direta dos teoremas mediante as fórmulas. Os triângulos são apresentados construídos e nenhuma questão exige a prática do desenho geométrico, como podemos observar acima.

O teorema de Pitágoras é apresentado em *A Conquista da Matemática* em 17 páginas, incluindo uma série de definições, enunciados e teoremas. Os autores fazem uma referência à história egípcia sobre o uso do tal teorema e apresenta figuras planas como um meio de se assegurar a argumentação para garantir uma compreensão prática.

O autor se apóia no desenho geométrico de quadrados e triângulos e apresenta a demonstração clássica intuitiva a partir da construção de quadrados sobre os catetos e sobre a hipotenusa. Porém, os lados desses quadrados têm lados equivalentes aos dos catetos e da hipotenusa. A partir de uma análise desta construção geométrica, o aluno vai perceber que a soma dos quadrados construídos sobre os catetos é igual ao quadrado construído sobre a hipotenusa. Outra demonstração também é apresentada a partir de uma construção geométrica, e áreas de triângulos e quadrados mediante uma comparação, deduz-se do teorema enunciado abaixo.



47 O TEOREMA DE PITÁGORAS

Sabemos que um triângulo é retângulo quando tem um ângulo reto.
A figura seguinte nos mostra um triângulo retângulo ABC, no qual destacamos:

✓ O lado $\overline{BC}$, oposto ao ângulo reto, chama-se *hipotenusa* e vamos indicar sua medida por *a*.

✓ Os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, que formam o ângulo reto, chamam-se *catetos*. Suas medidas estão indicadas por *b* e *c*, respectivamente.

Os antigos egípcios, usando uma corda com 12 nós, parecem ter construído um triângulo retângulo particular para obter "cantos" em ângulos retos. Esse triângulo particular tem lados medindo 3 unidades, 4 unidades e 5 unidades de comprimento. Neste triângulo, o ângulo formado pelos dois lados menores é um ângulo *reto*.

Baseado no triângulo retângulo particular dos egípcios e construindo quadrados sobre os lados desse triângulo, podemos obter a figura ao lado, que nos permite estabelecer uma relação entre as medidas dos lados desse triângulo particular.

⊢⊣ = 1 unidade de comprimento

▢ = 1 unidade de área

Assim, temos

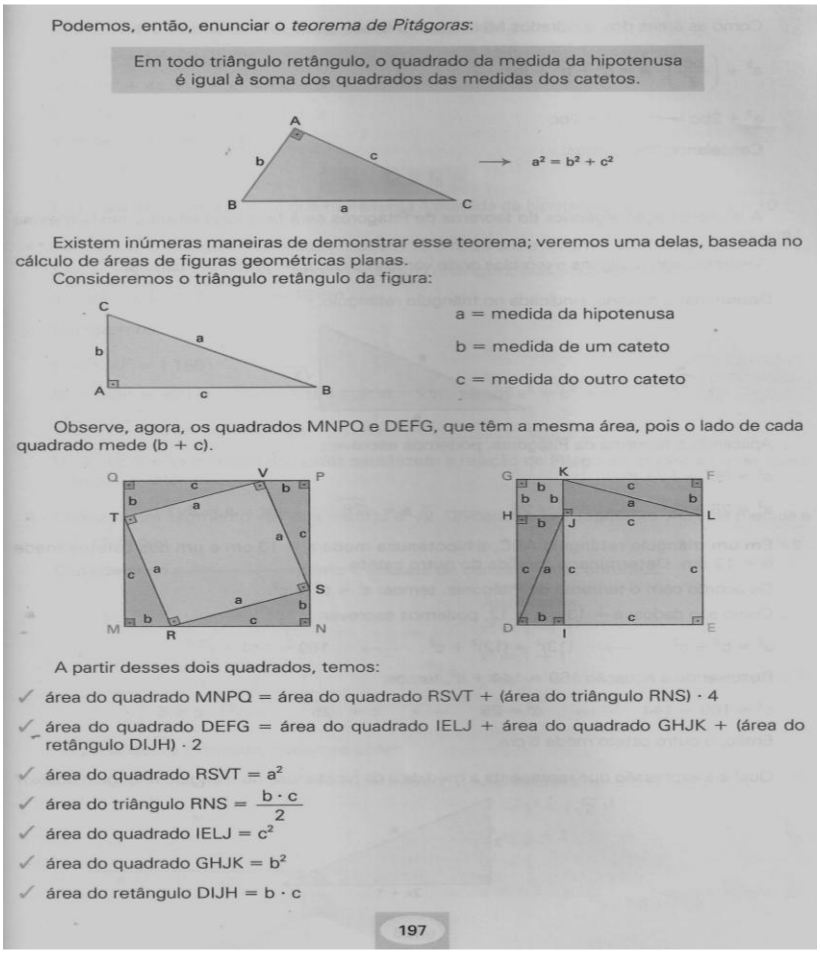
$25 = 16 + 9$ ou $5^2 = 4^2 + 3^2$

Nessas condições confirma-se a relação: *a área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados.*

Dizem que um filósofo e matemático grego, Pitágoras, que viveu na cidade de Samos, no século VI a.C., conseguiu provar que essa relação métrica era válida para todos os triângulos retângulos. Até hoje essa relação métrica é utilizada, sendo um dos mais importantes teoremas da Matemática.

196

Figura 41. O Teorema de Pitágoras
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 196



Podemos, então, enunciar o *teorema de Pitágoras*:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

$\longrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Existem inúmeras maneiras de demonstrar esse teorema; veremos uma delas, baseada no cálculo de áreas de figuras geométricas planas.

Consideremos o triângulo retângulo da figura:

a = medida da hipotenusa

b = medida de um cateto

c = medida do outro cateto

Observe, agora, os quadrados MNPQ e DEFG, que têm a mesma área, pois o lado de cada quadrado mede (b + c).

A partir desses dois quadrados, temos:

- área do quadrado MNPQ = área do quadrado RSVT + (área do triângulo RNS) · 4
- área do quadrado DEFG = área do quadrado IELJ + área do quadrado GHJK + (área do retângulo DIJH) · 2
- área do quadrado RSVT = a^2
- área do triângulo RNS = $\frac{b \cdot c}{2}$
- área do quadrado IELJ = c^2
- área do quadrado GHJK = b^2
- área do retângulo DIJH = $b \cdot c$

197

Figura 42. O Teorema de Pitágoras
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 197

Como as áreas dos quadrados MNPQ e DEFG são iguais, podemos escrever:

$$a^2 + \left(\frac{bc}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{4}^{\,2} = c^2 + b^2 + (bc) \cdot 2$$

$$a^2 + 2bc = c^2 + b^2 + 2bc$$

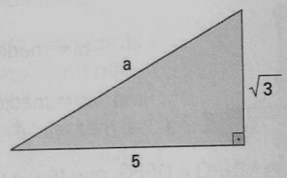
Cancelando 2bc, temos: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Figura 43. Dedução do Teorema de Pitágoras
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 198

Nas aplicações que são propostas como exemplos para os alunos, o autor apresenta uma questão utilizando uma construção geométrica e outra que exige apenas a memorização do teorema.

Vejamos, agora, alguns exemplos onde vamos aplicar o teorema de Pitágoras.

1. Determinar a medida *a* indicada no triângulo retângulo.



Aplicando o teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$a^2 = (5)^2 + (\sqrt{3})^2$

$a^2 = 25 + 3 \longrightarrow a^2 = 28 \longrightarrow a = \sqrt{28} \longrightarrow a = 2\sqrt{7}$

2. Em um triângulo retângulo ABC, a hipotenusa mede $a = 13$ cm e um dos catetos mede $b = 12$ cm. Determinar a medida do outro cateto.

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

Como são dados: $a = 13$ e $b = 12$, podemos escrever:

$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow (13)^2 = (12)^2 + c^2 \longrightarrow 169 = 144 + c^2$

Resolvendo a equação $169 = 144 + c^2$, temos:

$c^2 = 169 - 144 \longrightarrow c^2 = 25 \longrightarrow c = \sqrt{25} \longrightarrow c = 5$

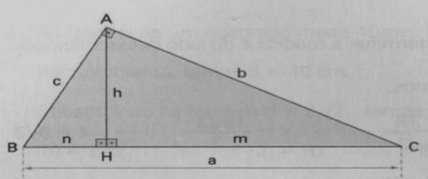
Então, o outro cateto mede 5 cm.

Figura 44. Aplicações do Teorema de Pitágoras
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 198

4 AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Além do teorema de Pitágoras, existem outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo.

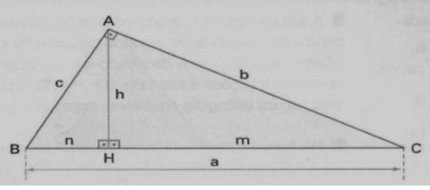
Vamos, inicialmente, identificar esses elementos considerando o triângulo retângulo abaixo:



- ✓ $\overline{BC}$ é a hipotenusa; sua medida é indicada por *a*.
- ✓ $\overline{AC}$ é um cateto; sua medida é indicada por *b*.
- ✓ $\overline{AB}$ é um cateto; sua medida é indicada por *c*.
- ✓ $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa; sua medida é indicada por *h*.
- ✓ $\overline{BH}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por *n*.
- ✓ $\overline{HC}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por *m*.

Podemos estabelecer relações entre essas medidas, demonstradas a partir da semelhança de triângulos e baseadas na seguinte propriedade:

Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa à base divide o triângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes ao triângulo dado e semelhantes entre si.

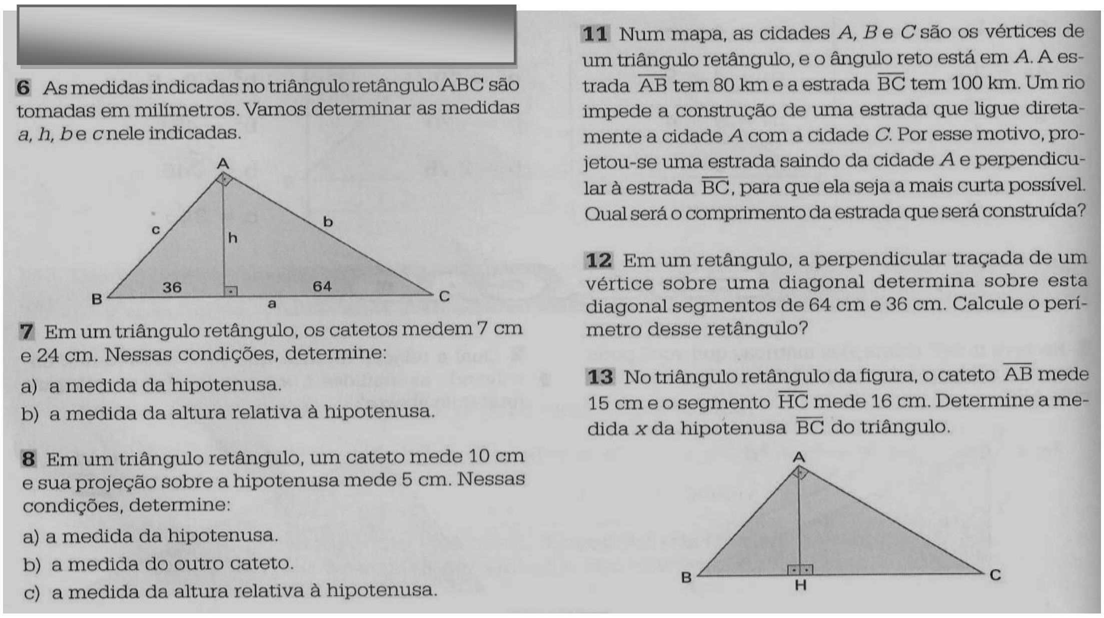


$$\longrightarrow \begin{cases} \triangle HBA \sim \triangle ABC \\ \triangle HAC \sim \triangle ABC \\ \triangle HBA \sim \triangle HAC \end{cases}$$

Figura 45. As relações métricas no triângulo retângulo
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 206

Aqui, os autores fazem uma abordagem dedutiva para demonstrar o teorema de Pitágoras. São enunciados alguns teoremas inerentes ao triângulo retângulo por meio da semelhança de triângulos e proporção, como no livro *MATEMÁTICA* (anexos 12 e 13).

Os triângulos são apresentados com um lado paralelo à margem inferior da página.



6 As medidas indicadas no triângulo retângulo ABC são tomadas em milímetros. Vamos determinar as medidas *a, h, b* e *c* nele indicadas.

7 Em um triângulo retângulo, os catetos medem 7 cm e 24 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa.

b) a medida da altura relativa à hipotenusa.

8 Em um triângulo retângulo, um cateto mede 10 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 5 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida da hipotenusa.

b) a medida do outro cateto.

c) a medida da altura relativa à hipotenusa.

11 Num mapa, as cidades *A*, *B* e *C* são os vértices de um triângulo retângulo, e o ângulo reto está em *A*. A estrada $\overline{AB}$ tem 80 km e a estrada $\overline{BC}$ tem 100 km. Um rio impede a construção de uma estrada que ligue diretamente a cidade *A* com a cidade *C*. Por esse motivo, projetou-se uma estrada saindo da cidade *A* e perpendicular à estrada $\overline{BC}$, para que ela seja a mais curta possível. Qual será o comprimento da estrada que será construída?

12 Em um retângulo, a perpendicular traçada de um vértice sobre uma diagonal determina sobre esta diagonal segmentos de 64 cm e 36 cm. Calcule o perímetro desse retângulo?

13 No triângulo retângulo da figura, o cateto $\overline{AB}$ mede 15 cm e o segmento $\overline{HC}$ mede 16 cm. Determine a medida *x* da hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo.

Figura 46. Exercícios de Teorema de Pitágoras
Fonte: Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 212

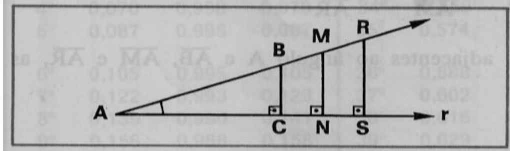
Estes exercícios envolvem questões de aplicações inerentes ao teorema envolvendo o contexto, como na questão 11. E as questões 7, 11 e 12 exigem a construção geométrica para que o aluno possa visualizar e compreender o que está sendo solicitado. Portanto, o desenho geométrico está sendo exigido, apesar de não ser referenciado nos exemplos propostos.

4.4.4 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As relações trigonométricas no triângulo retângulo são apresentadas em 6 páginas pelo livro *Matemática* e faz uma abordagem isenta de contexto, história ou qualquer informação sobre a utilidade no quotidiano das razões trigonométricas no triângulo em estudo, característica que tem a obra em todos os capítulos que tratam da geometria. O livro também apresenta uma abordagem algébrica do seno, cosseno e tangente a partir de uma construção geométrica por homotetia, envolvendo triângulos semelhantes.

Razões trigonométricas

Lembrando-se do estudo que você fez sobre triângulos semelhantes, observe a figura abaixo:



Seja:

$\overline{BC} \perp r$
$\overline{MN} \perp r$
$\overline{RS} \perp r$

Pelo caso (A.A.) são semelhantes os triângulos:

ABC, AMN e ARS.

Logo:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{AR}}$$

As razões são iguais, não interessando o tamanho dos triângulos.

O valor comum dessas razões é denominado **seno** do ângulo A.

Indica-se:

$$\text{sen}\ \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{AR}}$$

Em cada triângulo, os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{RS}$ são catetos opostos ao ângulo A; e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ e $\overline{AR}$, as hipotenusas dos referidos triângulos.

Então:

$$\text{sen}\ \hat{A} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{ou}$$

$$\text{sen}\ \hat{A} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Figura 47. Razões trigonométricas
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.119

Nesta abordagem, o autor se utiliza do desenho geométrico e reconhece a sua importância para a apresentação do conteúdo, porém não o apresenta em exemplos para que os alunos possam compreender melhor o conteúdo que está sendo estudado: contém apenas as deduções formais e algébricas não mostrando o valor prático que têm as razões trigonométricas em aplicações do quotidiano (anexo 14). Neste item o autor apresenta um assunto de forma geral, ou seja, “Razões Trigonométricas” mas a apresentação que é dada tem valor apenas em triângulos.

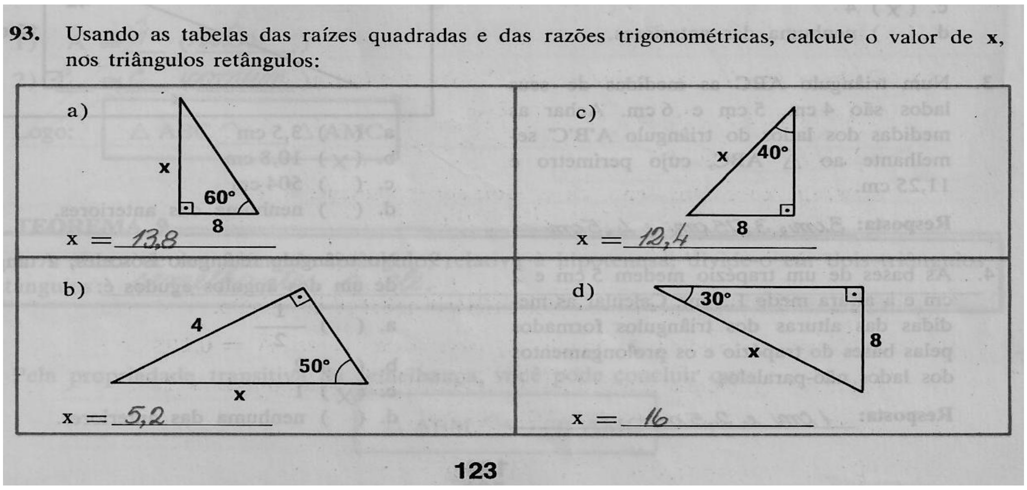

93. Usando as tabelas das raízes quadradas e das razões trigonométricas, calcule o valor de **x**, nos triângulos retângulos:

Figura 48. Exercícios de razões trigonométricas
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.123

Nos exercícios, verificam-se repetições das relações trigonométricas sem nenhum significado para o aluno, pois não envolvem aplicações do quotidiano e nem apresentam situações para uma construção geométrica. Em algumas questões, exige-se apenas a consulta na tabela das relações trigonométricas contida no livro (anexo 20).

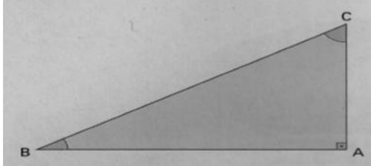
Neste capítulo, os autores do livro *A Conquista da Matemática*, apresentam o conteúdo em 11 páginas, a partir de uma situação do quotidiano, realizando uma construção geométrica. No início do assunto, há um texto que fala da importância de se estudar as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Os triângulos continuam sendo posicionadas na horizontal em relação à margem inferior. A seguir, apresenta uma abordagem algébrica das razões trigonométricas como seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo a partir de uma construção geométrica de triângulos semelhantes.

Porém, o exemplo que é resolvido se apóia em uma construção geométrica e calcula algumas razões trigonométricas a partir de um ângulo agudo. Assim, é a partir da figura que a questão é interpretada e resolvida.

Dos exercícios que são propostos aos alunos, alguns apresentam o triângulo retângulo já construído, não exigindo assim, do estudante, o traçar do polígono. Porém, apresentam questões com situações do quotidiano mostrando, assim, a aplicação da trigonometria no triângulo retângulo e, ao mesmo tempo, provocando no aluno uma reflexão de que a geometria tem existência na vida dos homens e que os conceitos são utilizados em problemas deste tipo. Podemos constatar isto analisando as questões abaixo. Com respeito à validação das propriedades geométricas, observa-se que tanto as justificativas baseadas em experimentos no mundo físico, que são bem frequentes, quanto algumas demonstrações presentes no capítulo são conduzidas de maneira que o aluno possa compreender.

49 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Consideremos o triângulo retângulo ABC da figura seguinte, no qual vamos destacar a hipotenusa $\overline{BC}$ e os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.



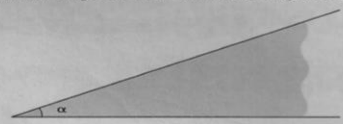
Se tomamos como referência o ângulo $\hat{B}$, podemos escrever:

- $\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$
- $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$

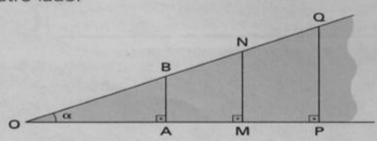
Se tomamos como referência o ângulo $\hat{C}$, podemos escrever:

- $\overline{AB}$ é o cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$
- $\overline{AC}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$

Vamos, agora, considerar que a figura seguinte seja uma rampa na qual destacamos o ângulo de medida α (ou simplesmente ângulo alfa), chamado *ângulo de subida*.



Sobre um dos lados da rampa marcamos os pontos *B*, *N* e *Q* e por esses pontos traçamos perpendiculares sobre o outro lado.



Por semelhança de triângulos podemos notar que:

$\triangle OAB \sim \triangle OMN \sim \triangle OPQ \sim \triangle \ldots$

Podemos, então, estabelecer as seguintes razões:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{MN}{ON} = \frac{PQ}{OQ} = \ldots = k_1 \text{ (constante)}$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ} = \ldots = k_2 \text{ (constante)}$$

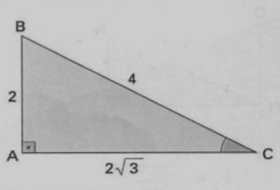
$$\frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{PQ}{OP} = \ldots = k_3 \text{ (constante)}$$

216

Figura 49. Relações trigonométricas no triângulo retângulo
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 216

No exemplo seguinte, você observa uma aplicação dessas relações:

No triângulo retângulo ABC da figura, calcular o valor do seno, do cosseno e da tangente do ângulo agudo $\hat{C}$, considerando $\sqrt{3} = 1{,}73$.



$$\text{sen } C = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

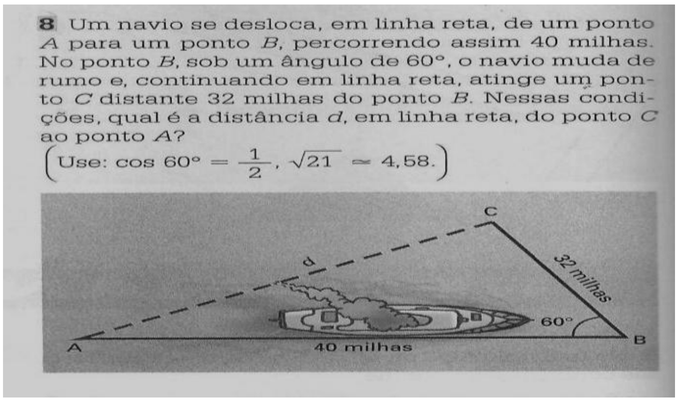
$$\cos C = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}73}{2} \cong 0{,}86$$

$$\text{tg } C = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1{,}73}{3} \cong 0{,}57$$

218

Figura 50. Aplicações de relações trigonométricas no triângulo retângulo
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 218

Os exercícios que são propostos aos alunos, apresentam questões com aplicações da trigonometria em situações práticas do dia a dia (anexo 15).



8 Um navio se desloca, em linha reta, de um ponto A para um ponto B, percorrendo assim 40 milhas. No ponto B, sob um ângulo de 60°, o navio muda de rumo e, continuando em linha reta, atinge um ponto C distante 32 milhas do ponto B. Nessas condições, qual é a distância d, em linha reta, do ponto C ao ponto A?

$\left(\text{Use: } \cos 60° = \frac{1}{2}, \sqrt{21} \simeq 4{,}58.\right)$

Figura 51. Exercício 8 de relações trigonométricas no triângulo retângulo
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 234

Porém, da forma que estes exercícios estão elaborados, o estudante é submetido a não interpretar o problema, tendo que aceitar uma construção geométrica imposta pelo autor, privando assim o aluno de exercitar o rigor e a precisão através do desenho geométrico que também está relacionado ao desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo (ZUIN, 2001).

4.4.5 Relações métricas na circunferência

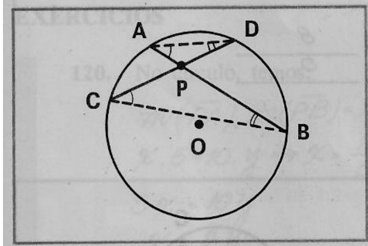
O autor do livro *Matemática* dedica a relações métricas no círculo 5 páginas e apresenta uma abordagem intuitiva formalizada tendo como suporte as construções geométricas. Na primeira circunferência abaixo, o diâmetro da circunferência não interseta o seu centro, o que justifica falta de rigor em relação ao desenho geométrico. Também, o autor comete um deslize ao considerar a circunferência, círculo.

Nesta abordagem, para enunciar os teoremas, o autor utilizou-se, mais uma vez, da semelhança de triângulos e proporcionalidade, tendo como suporte para a dedução a construção geométrica. Não fez referência ao contexto e nenhum exemplo resolvido foi proposto ao aluno, e os exercícios foram aplicações diretas dos teoremas apresentados. Em nenhum dos exercícios o desenho geométrico é exigido.

OBJETIVOS: 1. Deduzir as relações métricas no círculo. — 2. Aplicar essas relações na resoluçã de problemas.

34 Relações métricas no círculo

Seja a figura:



Temos:

1) Círculo de centro O.

2) Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

3) $\{P\} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ (P, interior à circunferência).

Considerando os $\triangle$ APD e $\triangle$ CPB, vem:

$\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos inscritos), sendo $m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = \dfrac{m(\widehat{BD})}{2}$

$\hat{B} \cong \hat{D}$ (ângulos inscritos), sendo $m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = \dfrac{m(\widehat{AC})}{2}$

Daí, $\triangle$ APD $\sim$ $\triangle$ CPB (A.A.), resultando:

$$\frac{m(\overline{PA})}{m(\overline{PC})} = \frac{m(\overline{PD})}{m(\overline{PB})}$$

Donde:

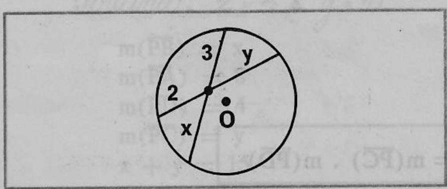
$$\boxed{m(\overline{PA}) \cdot m(\overline{PB}) = m(\overline{PC}) \cdot m(\overline{PD})}$$

TEOREMA 16

Se duas cordas se cortam em um ponto interior da circunferência, o produto das medidas dos segmentos, determinados por uma delas, é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra.

EXERCÍCIOS

117. Calcule x e y na figura, sabendo que x + y = 10.



$\begin{cases} x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y \\ 3x = 2y \end{cases}$

$3(10 - y) = 2y$

$30 - 3y = 2y$

$5y = 30$

$y = 6$ e $x = 4$

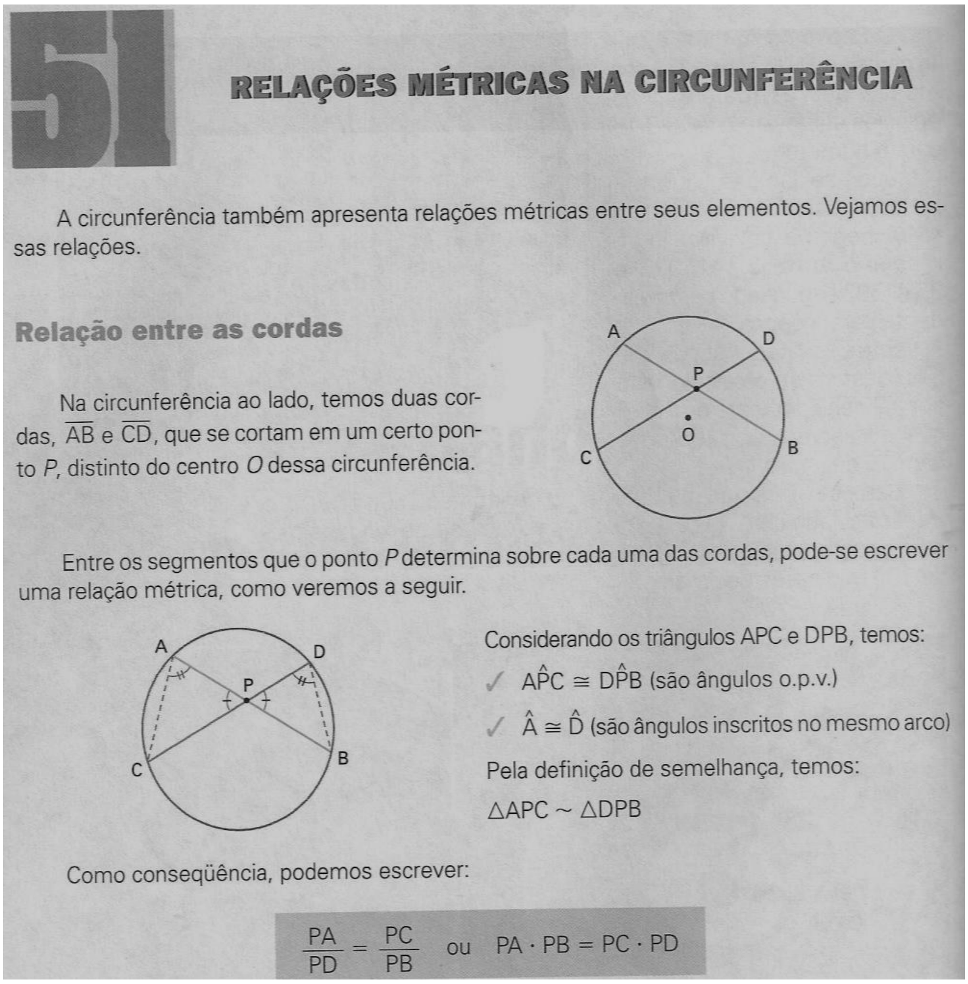
x = 4

y = 6

141

Figura52. Relações métricas na circunferência
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.141

São dedicadas 5 páginas a este tópico no livro *A Conquista da Matemática*, que segue com uma apresentação formalizada, fundamentada no desenho geométrico. O autor não faz referência às aplicações deste conteúdo no quotidiano e enuncia os teoremas a partir de semelhança de triângulos e proporcionalidade. Porém, é clara a enunciação dos conceitos e definições.



51 RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência também apresenta relações métricas entre seus elementos. Vejamos essas relações.

Relação entre as cordas

Na circunferência ao lado, temos duas cordas, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que se cortam em um certo ponto *P*, distinto do centro *O* dessa circunferência.

Entre os segmentos que o ponto *P* determina sobre cada uma das cordas, pode-se escrever uma relação métrica, como veremos a seguir.

Considerando os triângulos APC e DPB, temos:

✓ $A\hat{P}C \cong D\hat{P}B$ (são ângulos o.p.v.)

✓ $\hat{A} \cong \hat{D}$ (são ângulos inscritos no mesmo arco)

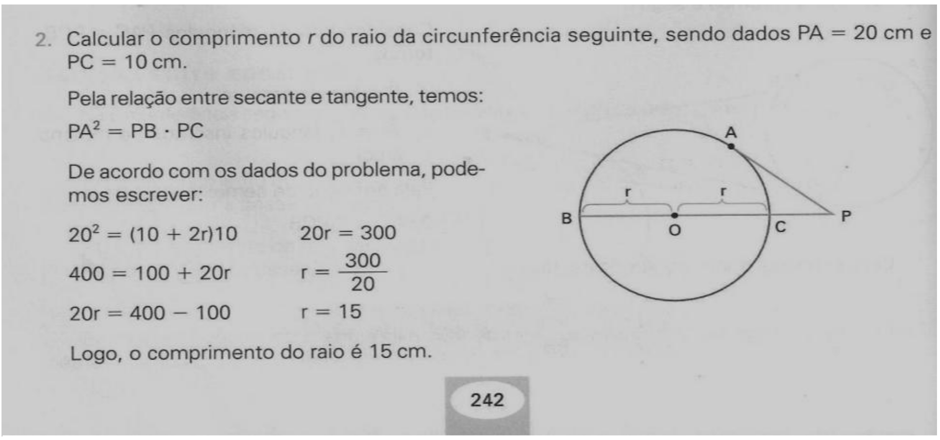
Pela definição de semelhança, temos:

$\triangle APC \sim \triangle DPB$

Como conseqüência, podemos escrever:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \quad \text{ou} \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Figura 53. Relações métricas na circunferência
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 240



2. Calcular o comprimento *r* do raio da circunferência seguinte, sendo dados PA = 20 cm e PC = 10 cm.

Pela relação entre secante e tangente, temos:

$PA^2 = PB \cdot PC$

De acordo com os dados do problema, podemos escrever:

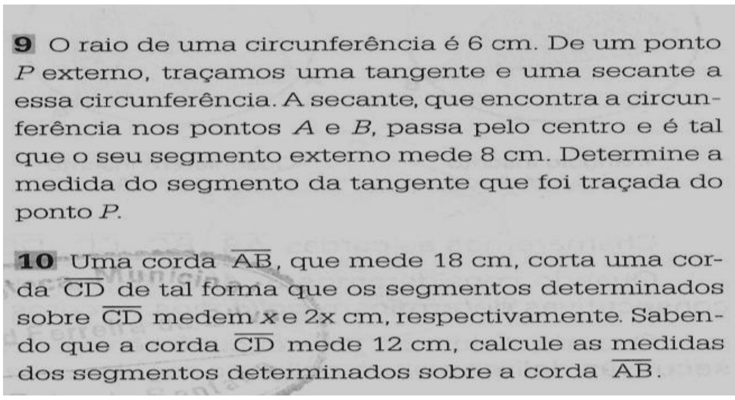
$20^2 = (10 + 2r)10$ | $20r = 300$
$400 = 100 + 20r$ | $r = \frac{300}{20}$
$20r = 400 - 100$ | $r = 15$

Logo, o comprimento do raio é 15 cm.

242

Figura 54. Aplicação de relações métricas na circunferência
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 242

Os exemplos resolvidos que são propostos aos alunos reforçam a teoria. Entretanto, nestas questões são enunciados problemas que o autor recorre às construções geométricas como um meio de visualizar o problema para resolver. Situações que envolvem contextualização não são exploradas nesta seção, porém, as aplicações são internas à geometria.



9 O raio de uma circunferência é 6 cm. De um ponto P externo, traçamos uma tangente e uma secante a essa circunferência. A secante, que encontra a circunferência nos pontos A e B, passa pelo centro e é tal que o seu segmento externo mede 8 cm. Determine a medida do segmento da tangente que foi traçada do ponto P.

10 Uma corda $\overline{AB}$, que mede 18 cm, corta uma corda $\overline{CD}$ de tal forma que os segmentos determinados sobre $\overline{CD}$ medem x e 2x cm, respectivamente. Sabendo que a corda $\overline{CD}$ mede 12 cm, calcule as medidas dos segmentos determinados sobre a corda $\overline{AB}$.

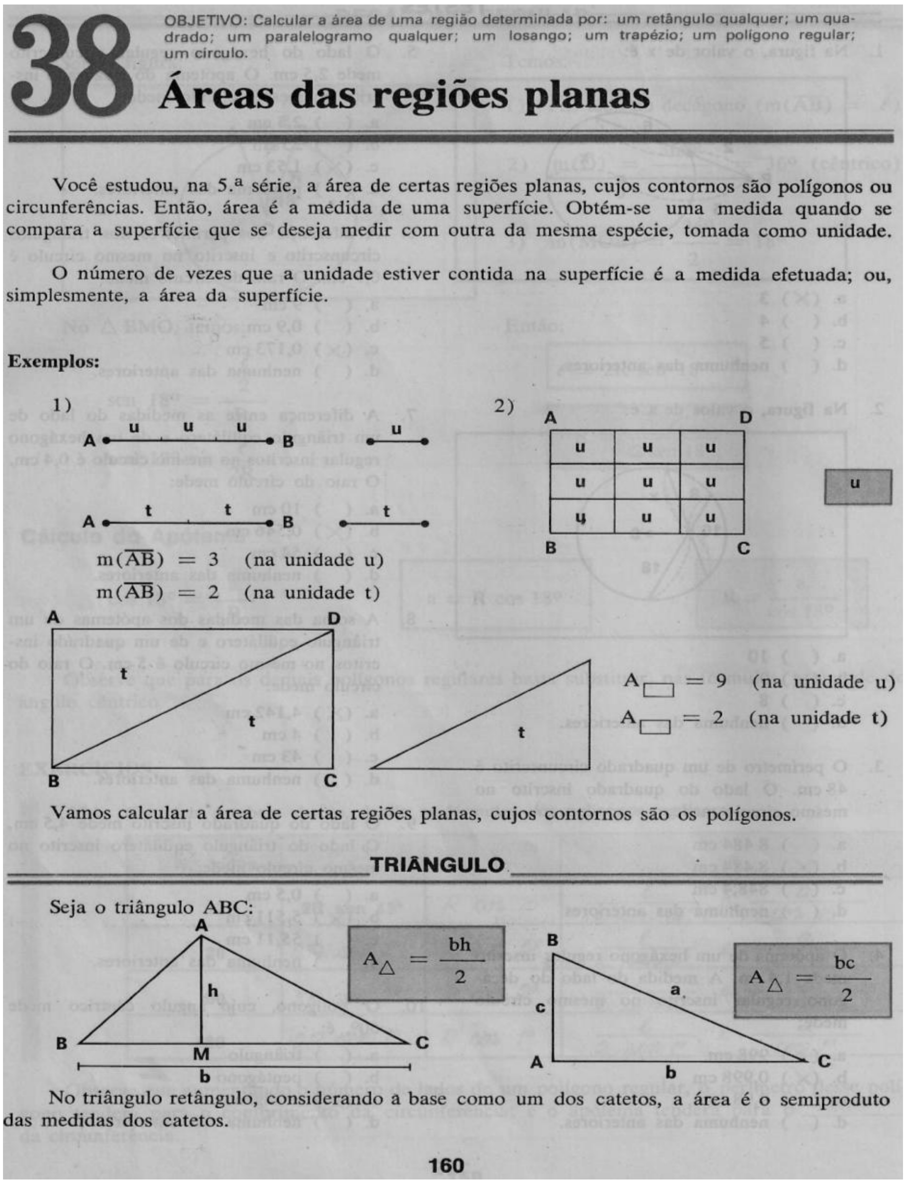
Figura 55. Exercício 9 e 10 de relações métricas na circunferência
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 243

Nos exercícios apresentados, alguns como o 9 e 10, a construção geométrica é exigida como um meio para resolver os problemas, outros apenas procedimentos de cálculos que foram relacionados na teoria ou aplicações diretamente da fórmula. Seguindo o mesmo critério de apresentação da teoria, não fazem nenhuma referência às aplicações inerentes ao contexto (anexo 16).

4.4.6 Áreas de algumas figuras geométricas planas

No livro *Matemática*, o autor dedica 12 páginas a este capítulo. Porém, com uma abordagem em que a definição de áreas é apresentada segundo uma discussão didática apropriada para o entendimento, utilizando o desenho geométrico para levar o aluno a compreender o conceito de área. Entretanto, neste tópico, é apresentada uma definição de área assim como uma abordagem intuitiva para se compreender a fórmula da área de um triângulo como a metade da área de um retângulo de mesma base e mesma altura.

Neste caso, são apresentados dois triângulos particulares e, a seguir, a fórmula que permite o cálculo da sua área. Porém, se o triângulo for escaleno, em que duas das alturas sejam externas ao triângulo, poderá causar um obstáculo ao entendimento do aluno. Nas demais figuras planas, a obra segue o mesmo modo de exposição, sem nenhuma interlocução com o contexto nem com as construções geométricas.



38 Áreas das regiões planas

OBJETIVO: Calcular a área de uma região determinada por: um retângulo qualquer; um quadrado; um paralelogramo qualquer; um losango; um trapézio; um polígono regular; um círculo.

Você estudou, na 5.ª série, a área de certas regiões planas, cujos contornos são polígonos ou circunferências. Então, área é a medida de uma superfície. Obtém-se uma medida quando se compara a superfície que se deseja medir com outra da mesma espécie, tomada como unidade.

O número de vezes que a unidade estiver contida na superfície é a medida efetuada; ou, simplesmente, a área da superfície.

Exemplos:

1)

$m(\overline{AB}) = 3$ (na unidade u)
$m(\overline{AB}) = 2$ (na unidade t)

2)

$A_{\square} = 9$ (na unidade u)
$A_{\square} = 2$ (na unidade t)

Vamos calcular a área de certas regiões planas, cujos contornos são os polígonos.

TRIÂNGULO

Seja o triângulo ABC:

$$A_{\triangle} = \frac{bh}{2}$$

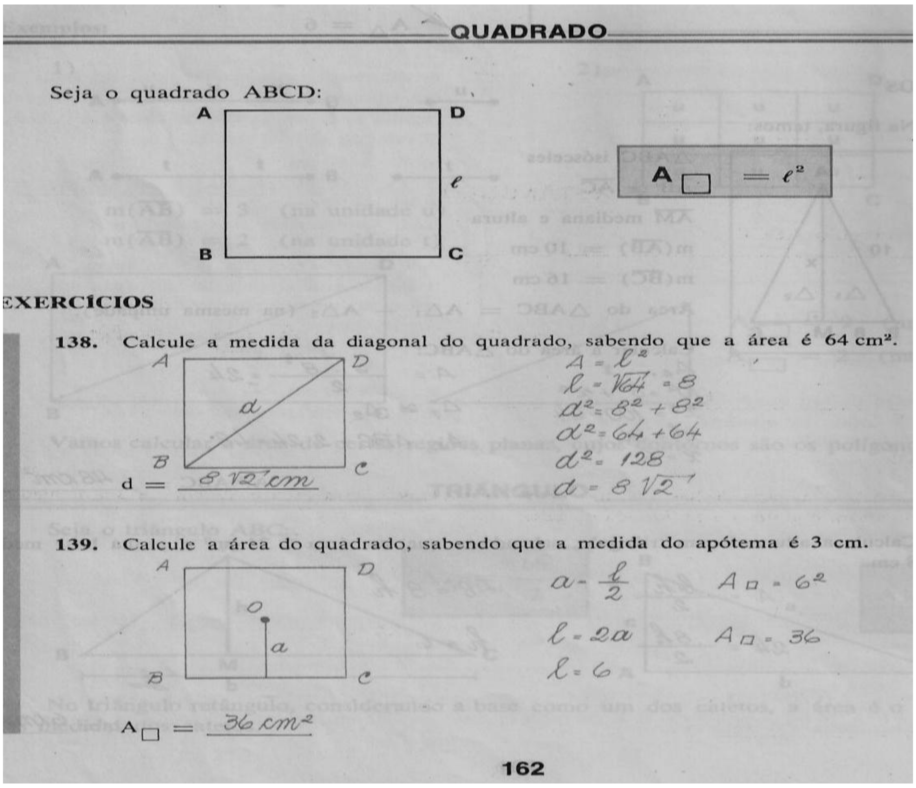
$$A_{\triangle} = \frac{bc}{2}$$

No triângulo retângulo, considerando a base como um dos catetos, a área é o semiproduto das medidas dos catetos.

160

Figura 56. Áreas das regiões planas
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.160

Neste tópico, o autor não apresenta exemplos resolvidos para o aluno como meio de nortear os exercícios propostos e até facilitar a compreensão das aplicações das fórmulas; e os exercícios exigem apenas manipulação de fórmulas.



QUADRADO

Seja o quadrado ABCD:

$A_{\square} = \ell^2$

EXERCÍCIOS

138. Calcule a medida da diagonal do quadrado, sabendo que a área é 64 cm².

$A = \ell^2$
$\ell = \sqrt{64} = 8$
$d^2 = 8^2 + 8^2$
$d^2 = 64 + 64$
$d^2 = 128$
$d = 8\sqrt{2}$

d = $8\sqrt{2}$ cm

139. Calcule a área do quadrado, sabendo que a medida do apótema é 3 cm.

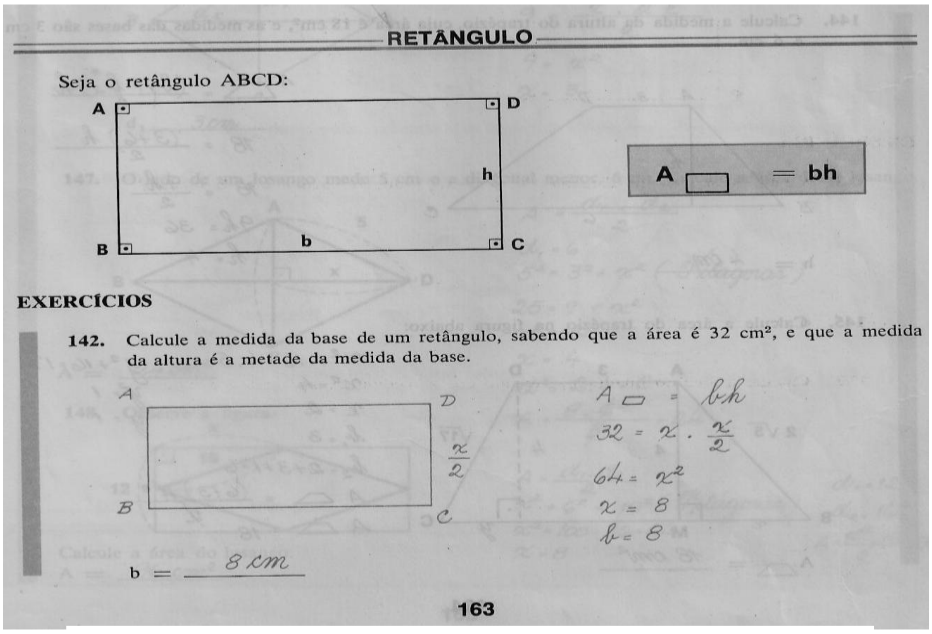
$a = \frac{\ell}{2}$
$\ell = 2a$
$\ell = 6$
$A_{\square} = 6^2$
$A_{\square} = 36$

$A_{\square}$ = 36 cm²

162

Figura 57. Quadrado
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.162

Não são apresentadas questões que exigem uma construção geométrica nem relações com atividades práticas do quotidiano.



RETÂNGULO

Seja o retângulo ABCD:

$A_{\square} = bh$

EXERCÍCIOS

142. Calcule a medida da base de um retângulo, sabendo que a área é 32 cm², e que a medida da altura é a metade da medida da base.

$A_{\square} = bh$
$32 = x \cdot \frac{x}{2}$
$64 = x^2$
$x = 8$
$b = 8$

b = 8 cm

163

Figura 58. Retângulo
Fonte: Matemática, Orlando A. Zambuzzi,1976, p.163

Estes exercícios exigem que o aluno tenha conhecimentos específicos do desenho geométrico, como nas questões 153 e 154, em que são enunciados dois problemas que, para que o aluno consiga resolver, é necessária uma visualização que só por meio de uma construção geométrica o aluno apresentará a solução. Porém, estes problemas são internos à geometria e nenhum é relacionado com o contexto.

No livro *A Conquista da Matemática*, são dedicadas 17 páginas para abordar o cálculo de áreas de polígonos e círculos. Entretanto, apresenta a teoria sem explicar o significado do que é área. As fórmulas são apresentadas sem nenhuma palavra de esclarecimento. Na área do retângulo, o autor apenas apresentou a fórmula, sem nenhuma explicação prática ou a partir do desenho geométrico. Mas, para explicar a construção da fórmula do triângulo e do trapézio, o autor se utiliza das construções geométricas, procurando fazer o aluno entender intuitivamente as fórmulas. Não apresenta, porém, exemplos resolvidos para direcionar o foco de aprendizagem dos alunos. Na abordagem do triângulo, é feita uma comparação entre o retângulo e o triângulo inscrito por meio de uma construção geométrica, e é enunciado que a área de um triângulo é a metade da área do retângulo de mesma base e mesma altura. Porém, este autor comete o mesmo deslize que se constata no livro *MATEMÁTICA*, em apresentar apenas dois tipos de triângulos, não evidenciando quando a altura pode ser externa a determinado tipo de triângulo, no caso, o escaleno.

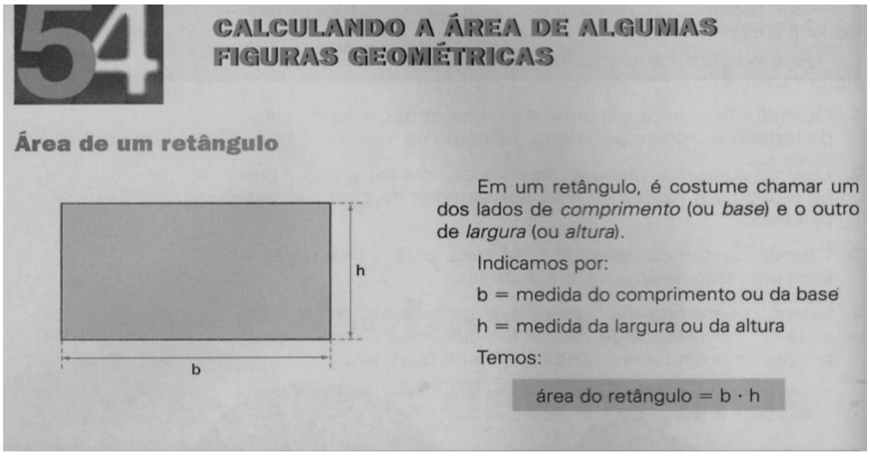
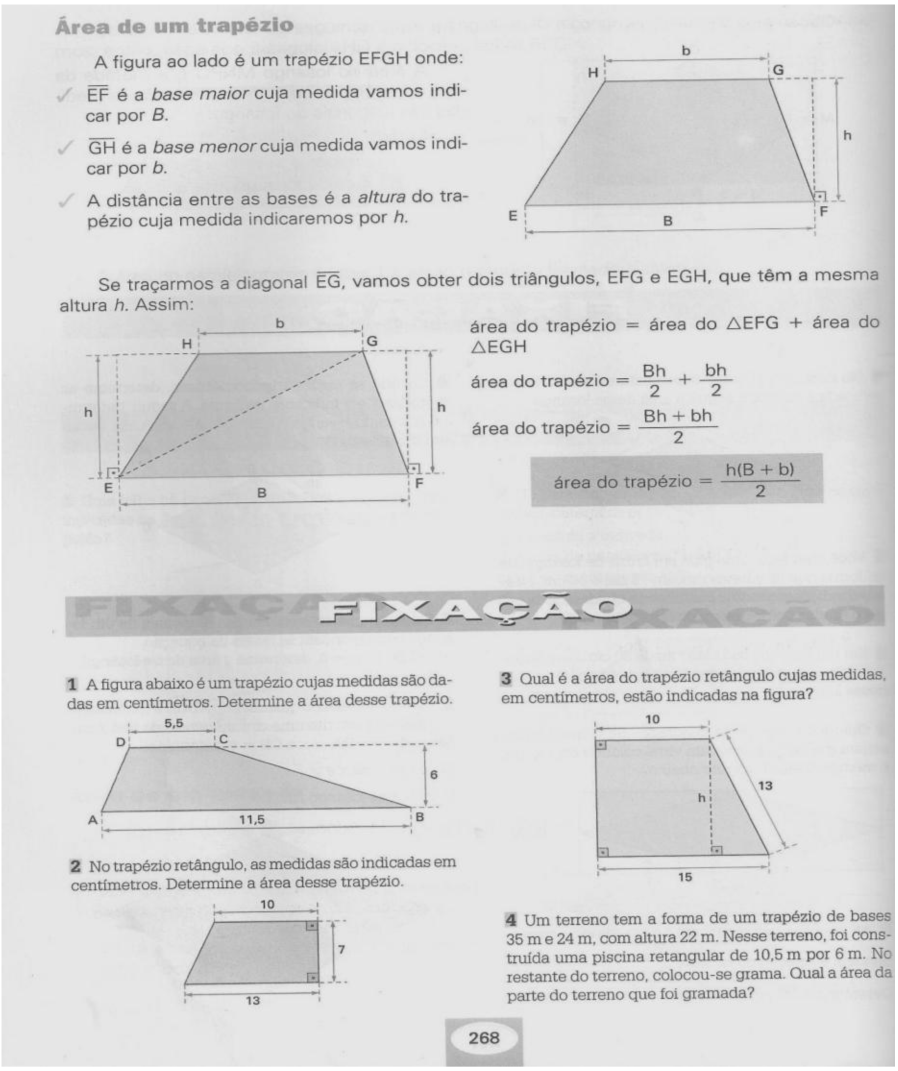


Figura 59. Calculando a área de algumas figuras geométricas
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 260



Área de um trapézio

A figura ao lado é um trapézio EFGH onde:

- $\overline{EF}$ é a *base maior* cuja medida vamos indicar por *B*.
- $\overline{GH}$ é a *base menor* cuja medida vamos indicar por *b*.
- A distância entre as bases é a *altura* do trapézio cuja medida indicaremos por *h*.

Se traçarmos a diagonal $\overline{EG}$, vamos obter dois triângulos, EFG e EGH, que têm a mesma altura *h*. Assim:

área do trapézio = área do △EFG + área do △EGH

área do trapézio $= \dfrac{Bh}{2} + \dfrac{bh}{2}$

área do trapézio $= \dfrac{Bh + bh}{2}$

área do trapézio $= \dfrac{h(B + b)}{2}$

FIXAÇÃO

1 A figura abaixo é um trapézio cujas medidas são dadas em centímetros. Determine a área desse trapézio.

2 No trapézio retângulo, as medidas são indicadas em centímetros. Determine a área desse trapézio.

3 Qual é a área do trapézio retângulo cujas medidas, em centímetros, estão indicadas na figura?

4 Um terreno tem a forma de um trapézio de bases 35 m e 24 m, com altura 22 m. Nesse terreno, foi construída uma piscina retangular de 10,5 m por 6 m. No restante do terreno, colocou-se grama. Qual a área da parte do terreno que foi gramada?

268

Figura60. Área de um trapézio
Fonte: A Conquista da Matemática, Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998, p. 268

Na apresentação da área do trapézio, o autor o dividiu em dois triângulos e, intuitivamente, utilizou a construção geométrica indicando a fórmula para o cálculo da área, a partir da soma das áreas dos triângulos.

Os exercícios propostos trazem as construções geométricas junto aos problemas, não oportunizando tal prática pelos alunos, negando-lhes a oportunidade da ampliação da capacidade de desenvolver outras habilidades necessárias a uma completa aprendizagem da geometria (PUNTOKY,1989). Por diversas vezes, os autores priorizaram questões inerentes à própria geometria, e apresentou um número reduzido de questões que abordam o contexto.

O livro *Matemática* traz uma articulação da geometria com a álgebra, tendo como suporte construções geométricas, mas expressa a teoria geométrica num simbolismo formal rigoroso, não oportunizando questões contextualizadas e nem apresentado os aspectos práticos dos tópicos. Apresenta a geometria com uma concepção dos não realistas e dos modernos que como já foi dito anteriormente, compreendem a geometria como uma ciência do intelecto. Que existe independente do mundo material e que uma abordagem dedutiva e formal é suficiente para tal proposta de ensino, o que acaba dificultando a compreensão pelo aluno nesta faixa etária. Os exercícios foram compactados e não exigem conhecimentos específicos do desenho geométrico e nem aplicações do quotidiano. Enquanto que *A Conquista da Matemática* apresenta algumas características do livro anterior, como ainda um formalismo rigoroso, mas avança mostrando aplicações práticas e uma abordagem histórica dos tópicos de geometria. Os autores não referenciam o desenho geométrico, mas entendem que as construções geométricas também possibilitam ao aluno construir um corpo bastante completo de conhecimentos geométricos, porque em alguns exercícios exige tal atividade.

Nas duas obras analisadas, os autores apresentam os conteúdos exibindo o rigor dedutivo matemático a partir das construções geométricas. Porém, na resolução dos exercícios propostos aos alunos, atividades como argumentação e dedução não são proporcionadas aos alunos, mas apenas aplicar fórmulas ou propriedades deduzidas para resolver os exercícios. Também, não apresentam um ponto de vista analítico e crítico diante da geometria. Os conteúdos de geometria nos dois livros demonstram certa estabilidade o que verifica que apesar das alterações e reformas que o ensino da matemática foi submetido ao longo da história da educação, os referenciais teóricos e metodológicos do passado continuam no presente, porém com outra configuração.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria e o desenho são ramos do conhecimento que contribuíram nas atividades humanas e no desenvolvimento das ciências. Em registrar as formas geométricas por meio do desenho, na antiguidade, foi um meio de expressar idéias, sentimentos e desejos. Por meio dessas atividades, se tornou possível a compreensão do espaço e isto contribuiu decisivamente no avanço de todos os setores da humanidade.

Na Grécia, por volta do século V a.C., o desenho geométrico se confundia com a geometria. Assim, não existia o desenho geométrico como uma ciência isolada, era um conhecimento inserido na geometria e teve uma grande importância para a sistematização da geometria na obra os *Elementos* de Euclides há 300 a.C.

Com as alterações das relações sociais provocadas pelo renascimento, iluminismo, urbanização e industrialização na Europa, tornou-se necessário ensinar às pessoas conhecimentos específicos para as atividades emergentes da sociedade. Assim, a escola foi o meio mais eficaz para se garantir tal resultado. Neste contexto, a geometria e o desenho geométrico foram considerados conteúdos que deveriam ser incluídos nos programas devido às necessidades de tais conhecimentos nas engenharias e indústrias. Portanto, o meio mais eficaz de garantir a difusão destes conhecimentos pelas instituições de ensino foi o livro didático.

As influências destas obras européias no Brasil, principalmente as francesas, foram a base teórica para os autores brasileiros elaborarem os compêndios e livros de geometria onde as construções geométricas eram inseridas como um elemento integrado a tal conhecimento. Portanto, as primeiras aulas de geometria foram articuladas com o desenho geométrico e estavam relacionadas às construções de fortes e artilharias para a defesa da colônia. Com a expulsão dos jesuítas e a criação das aulas régias, instituiu-se aulas de geometria e desenho geométrico. A criação do colégio Pedro II, consolida-se a geometria como uma área do conhecimento que na apresentação nos compêndios e livros era articulada com as construções geométricas, fato que influenciou o ensino dessa ciência por muito tempo.

A reforma Francisco Campos em 1930 esforçou-se no sentido de apresentar a geometria nos livros didáticos com uma abordagem dedutiva. Por isso, o desenho geométrico passou a ser uma disciplina independente fato que durou até 1971 com a LDB (5692/71). Com esta LDB e a Matemática Moderna, a geometria foi compactada e incluída nos últimos capítulos dos livros didáticos de matemática e o desenho geométrico passou a ser uma disciplina optativa.

Porém, com uma nova LDB (9495/96) e o PCN (1997) de matemática que recomenda a necessidade de se ensinar geometria e que tal abordagem seja também vinculada ao desenho geométrico.

A pesquisa constata a presença de pelo menos quatro tendências dominantes no ensino da geometria: a clássica resultante das influências dos *Elementos* de Euclides, a ativa a partir da proposta de unificação dos três campos da matemática, a moderna com a introdução da simbologia da teoria dos conjuntos e o formalismo excessivo e a resolução de problemas com aplicações contextualizadas.

Ao desenvolver as análises dos livros didáticos selecionados permitiu constatar que o livro *Matemática* para a 8ª série do 1º grau editado na década de 1970, após a LDB de 5692/71, escrito pelo então autor e defensor da Matemática Moderna, Orlando A. Zambuzzi mostra-se totalmente envolvido com a proposta modernizadora deste ensino. Neste livro observam-se os seguintes aspectos: introdução dos tópicos de geometria sem definição, com explicações carregadas de formalismo utilizando a simbologia da teoria dos conjuntos, apresentando teoremas cuja explicação tinha como suporte uma construção geométrica, mas em nenhum momento o autor a referencia como importante na apropriação dos conceitos e propriedades da geometria. Em nenhum dos exercícios propostos aos alunos exige o traçar do desenho geométrico, não oportunizando ao aluno tal prática que auxilia no desenvolvimento de várias habilidades. Isto constata que as indicações propostas pela Matemática Moderna eram a de promover um ensino de geometria totalmente abstrato sem nenhuma relação com as construções geométricas ou fatos do quotidiano. O ensino de geometria nesse período foi considerado irrelevante, como os tópicos incluídos apenas nos últimos capítulos como uma forma de não ter espaço para eles nas salas de aulas.

Neste mesmo período, o desenho geométrico, que era uma disciplina que dava suporte à aprendizagem da geometria e permaneceu por 40 anos nos currículos escolares se tornou optativa, não fazendo mais parte do corpo das disciplinas obrigatórias, contribuindo para que a geometria não fosse aprendida.

Essa forma de conceber a geometria e as construções geométricas foi uma tendência que se tornou hegemônica no ensino da matemática no início da década de 1960 e perdurou até o meio da década de 1980, quando alguns pesquisadores e professores verificaram que a proposta de renovação proposta pela Matemática Moderna não havia se consolidado, constatando-se resultados insatisfatórios devido a não compreensão de tal proposta pelos professores e alunos.

Com os questionamentos dos educadores matemáticos em relação a este problema que afetava o ensino da geometria começou haver discussões no sentido de alterar este ensino no sentido de redimensionar a sua abordagem e o elemento portador de tal proposta seria o livro didático. Porém, as alterações significativas em relação a estes livros só foram executadas de forma mais consistente a partir da LDB 9495/96 e do PCN, (1997) de matemática que sugerem alterações profundas para o ensino de matemática. Com isto, o PNLD (1985) passou a avaliar se os livros correspondiam aos critérios propostos pelo PCN (1997), que indicava uma apresentação da geometria articulada com as construções geométricas.

Portanto, como também fez parte da amostra um livro didático de matemática que foi editado após a nova LDB e o PCN (1997), escolheu-se *A Conquista da Matemática*, indicada para a 8ª série do ensino fundamental II, de autoria de Benedito Castrucci, José Ruy Geovanni e José Ruy Geovanni Júnior. Este livro deveria está de acordo com as novas indicações oficiais, porém verifica-se que a geometria continua isolada no final do livro e nas abordagens, ainda de forma sucinta, um formalismo fundamentado na simbologia da teoria dos conjuntos entre outros fatos modernos. Essas características demonstram a hegemonia alcançada pela Matemática Moderna, que mesmo tendo sido teoricamente abandonado no final da década de 1970, ainda se constata em livros do final da década de 1990. Porém, também apresenta itens que correspondem a uma abordagem proposta pelo PCN (1997), como uma apresentação mostrando os aspectos históricos e práticos dos conteúdos em estudo. A definição é apresentada nos tópicos de geometria e as construções geométricas são utilizadas nas demonstrações dos aspectos teóricos e em alguns dos exercícios propostos aos alunos como exemplos. Em algumas questões para o aluno resolver, exige o desenho geométrico, mas em nenhum momento o autor referência tal prática, mas articula questões explicitando as construções geométricas, apesar de elas fazerem parte da abordagem apresentada. Assim, constata-se que houve uma mudança na forma de apresentação da geometria e o desenho geométrico já está de certa forma presente, ainda que de forma implícita. Também demonstra que há uma preocupação e valorização dos conteúdos, pois permaneceram os mesmos diante dos movimentos de renovação, comprovando que historicamente, a tradição no ensino de matemática é fator mais forte que qualquer nova tendência.

Portanto, através dos livros didáticos de matemática, verifica-se que todos os movimentos e intenções oficiais de renovação do ensino desta ciência deixaram suas impressões, sendo possível encontrar características deles neste último livro analisado.

Pois, no estudo da geometria há necessidade de explorar no aluno a visualização e compreensão das propriedades geométricas e, o desenho geométrico pode contribuir na construção de situações diversificadas. A partir da visualização, por meio das construções geométricas, podem levantar conjecturas, explorar o caráter da investigação conduzindo a generalização de propriedades e elaborando processos de justificativa na resolução de problemas de geometria. Assim, num livro didático de matemática em que a geometria seja integrada também com o desenho geométrico constitui-se numa proposta de abordagem que possa contribuir para um melhor ensino de tal componente curricular.

A particularidade dessa pesquisa encontra-se no fato de apresentar uma análise dos tópicos de geometria incluída nestes livros didáticos de matemática, considerando qual a associação que os autores faziam entre a geometria e o desenho geométricos porque são conhecimentos que se mostraram entrelaçados em diversos períodos da história da educação e da humanidade. A comparação analítica que foi feita nestes livros didáticos, constata o que a pesquisa se propunha a fazer, que era tratar estes conhecimentos como elementos de pesquisa, mostrando as alterações que foram submetidos com as determinações oficiais vigentes e, como foram caracterizados após as propostas de alterações. Porém, aqui está um recorte na abordagem dessa disciplina por meio dos livros didáticos, mas indica outros aspectos que devem ser retomados e analisados a partir de uma pesquisa criteriosa indicando outras interpretações e discussões coerentes e necessárias para que o ensino dessa ciência se torne de fato, efetivo nas salas de aulas e os alunos consigam aprendê-la.

Assim, preciso apresentar uma conclusão, que não é definitiva, pois trabalhos qualitativos não se fecham, redimensionam e rediscutem sobre outras perspectivas. Com a sensação de ter atingido, ao menos, os objetivos propostos, na certeza que diversos aspectos podem ainda ser explorados numa outra ocasião.

6. REFERÊNCIAS

ARNHEIM, Rudolf. **Arte & percepção visual**: Uma psicologia da visão criadora. São Paulo: Pioneira, 2007, 526p.

BARBOSA, Ana Mae. **Arte-educação no Brasil das origens ao modernismo**. São Paulo: Perspectiva, 1978, 195p.

BARBIER, Frédéric. **História do livro**. São Paulo: Paulistana, 2008, 475p.

BARTHES, Roland. **O rumor da língua**. São Paulo: Brasiliense, 1988, 318p.

BITTENCOURT, Circe. Em foco: História, produção e memória do livro didático. Educação e Pesquisa. **Revista da Faculdade de Educação da USP**, São Paulo: v.30, n.3, p. 475 - 492, set./dez. 2004.

BITTENCOURT, Circe. **Livro didático e saber escolar**: 1810-1910. Belo Horizonte: Autêntica, 2008, 239p.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp**. Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Codex: Porto, 1994, 336p.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996, 488p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática - 3º e 4º ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1997, 142p.

BÜRIGO, Elisabete Zardo. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 140f. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CARVALHO, Antônio Pedro Alves de. **O ensino do desenho no mundo da informática**. Salvador: Quarteto, 2001, 108p.

CASTRO, Francisco Mendes de Oliveira. **A matemática no Brasil**. 2ª ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 1999, 83p.

CHARTIER, Roger. **A ordem dos livros**: leitores, autores e bibliotecas na Europa entre os séculos XIV e XVIII. Brasília: Universidade de Brasília, 1999, 256p.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & Educação**. Porto Alegre, n. 2, p.177-229. 1990.

DAMAZIO, Ademir. A prática docente do professor de matemática: marcas das concepções do livro didático REVEMAT - **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Santa Catarina, UFSC. v.1 e 2, p.14-25, 2006.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Desafios da Educação Matemática no novo milênio. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo-SP, v 8. n.11, p.14-17, dez. 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996, 121p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Ensino de desenho geométrico em bases metodológicas renovadas. **In 5º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico**. Bauru; 1983, p. 1 – 10.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: arte ou técnica de explicar e conhecer. São Paulo: 1998, 87p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950. In: **Saber y Tiempo Revista de Historia de la Ciencia**. Buenos Aires-Argentina, v.2, n.8, p.7-37, Jul/dez. 1999.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. Educação e Pesquisa – **Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo**, São Paulo, v.31, n.1, p.99-120. jan/abr 2005.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Transdisciplinaridade**. São Paulo: Palas Athena, 1997. 176p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.**2.ed. Campinas: Unicamp,2002, 843p.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, n.4, p.1-37, nov. 1995

FIORENTINI, Dario. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.47-76.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO Sérgio. **Investigação em educação matemática:** Percursos Teóricos e Metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2007, 228p.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática docente. São Paulo: Paz e Terra, 1998, 165p.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCI, Benedito e JÚNIOR, José Ruy Giovanni. **A conquista da matemática.** São Paulo: FTD, 1998, 295p.

GOMES, Luis Vidal Negreiros. **Desenhismos**. Rio Grande do Sul: Ed. Universidade Federal de Santa Maria, 1996, 136 p.

HERÓDOTO. **História**. São Paulo: Ediouro, 2001, 180p.

KOPKE, Regina Coeli Moraes. **Geometria, desenho, escola e transdisciplinaridade: abordagens possíveis para a educação**. 285 f. Tese (Doutorado em Educação), Pós Graduação em Educação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LDB - Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. LEI N°. 5692/71, 11 de agosto de 1971. D.O.U. 12 de agosto de 1971.

LDB - Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. LEI N°. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. D.O.U. 23 de dezembro de 1996.

LIBÂNEO, José Carlos. **Tendências pedagógicas na prática escolar**. In: LUCKESI, C.C. Filosofia da Educação. São Paulo: Cortez, 1991, 240p.

LEVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência**: O futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993, 256p.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**–SBEM, São Paulo, v.4, n.2, p. 3-13, 1995.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1988.140p.

MACHADO, Nilson José. Educação e cidadania. **Ensaios transversais: c**idadania e educação. São Paulo, SP: Escrituras Editora, 2. ed., 1997, 201p.

MACHADO, Nilson José. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. São Paulo: Cortez, 2000, 320p.

MACHADO, Nilson José.; CUNHA, Marisa Oliveria. **Linguagem, conhecimento, ação;** ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2007, 352p.

MANACORDA Mário Alighiero, **História da educação:**da antigüidade aos nossos dias. 6.ed. São Paulo: Cortez, 1999, 382p.

MARMO, Carlos; MARMO, Nicolau. **Desenho geométrico**. 2.ed. Rio de Janeiro: Scipione, 1994, 168p.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela**. História na educação matemática** – Propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004, 178p.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à historia da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998, 122p.

MORIN, Edgar. **A religação dos saberes**. Rio de Janeiro, Bertrand, 2001, 588p.

NASCIMENTO, Roberto Alcarria do. **O ensino do desenho na educação brasileira:** apogeu e decadência de uma disciplina escolar. 1994. 76f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, São Paulo.

NEVES, Aniceh Farah. Por quê desenho NPO 2º grau? Caracterização do ensino do desenho no 2º grau da rede pública estadual – Município de Bauru - SP. 1993. 93f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, São Paulo.

OLIVEIRA, José Mário Aleluia. **A instauração-currículo-hipertexto**. Na Escola: muitos sentidos. Disponível em: http://www.lab-eduimagem.pro.br/frames/seminarios/pdf/jmaleo.pdf Acesso em: 10 abr. 2010.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.125p.

PAIS, Luiz Carlos. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria**. 23ª Reunião da Andep, 2000. Disponível em: http://168.96.200.17/ar/libros/anped/1919T.PDF. Acesso em: 16 jul. 2009.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências**. Zetetiké,** Campinas, Ano 1, n.1, p.7-17, mar. 1993.

PAVANELLO, R. M.; ANDRADE, R. N. G. Formar professores para ensinar Geometria: um desafio para as licenciaturas em matemática. **Educação Matemática em Revista**. Ano 9, n.11 A-Edição Especial, 2002.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Currículos de matemática: da organização linear à idéia de rede**. São Paulo: FTD, 2000, 223p.

PFROMM, Netto, Samuel. *et al*.; **O livro didático na educação**. Rio de Janeiro: Primor, INL/MEC, 1974.

PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de geometria e desenho geométrico**. São Paulo: Scipione, 1998, 142p.

SAVIANI, Dermeval. **Educação***:* do senso comum à consciência filosófica. Campinas: Autores Associados, 1993, 220p.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia histórica-crítica:** primeiras aproximações**.** Campinas, SP: Autores Associados, 2003, 153

SILVA, Clovis Pereira. **A Matemática no Brasil**: uma história de seu desenvolvimento. São Paulo-SP: Edgard Blucher**,** 3.ed. 2003, 163p.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica***:* a questão da democracia. Campinas, SP:Papirus, 2001, 182p.

SMOLLE, Kátia Cristina. **A matemática na educação infantil***:* a teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. São Paulo: Artmed, 2000, 205p.

SOARES, Flavia. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** Avanço ou Retrocesso? 2001, 186f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica Rio de Janeiro.

TRINCHÃO, Glaúcia M. C. **O Desenho Como Objeto De Ensino**: História de uma Disciplina a partir dos Livros Didáticos Luso-Brasileiros Oitocentistas. 2008, 494f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Unisinos, Rio Grande do Sul.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**: Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: SBM, 1993, 6.ed. 110p.

WERNECK, Ana Paula *et al*. Os debates em torno das reformas do ensino de matemática: 1930-1942. **Zetetiké**, Campinas v. 4, n. 5, p. 49-54, jan/jun. 1996.

VALENTE, Vagner Rodrigues. Os exames de Admissão ao Ginásio: 1931-1969. PUC-SP, 2001, CDROM. v.1, 2 e 3.

VALENTE, Vagner Rodrigues. Mello e Souza e a Crítica aos Livros Didáticos de Matemática: demolindo concorrentes, construindo Malba Tahan. In: **Revista Brasileira de História da Matemática,** vol. 4, n.8, 2004.

VALENTE, Vagner Rodrigues. (Coord) **O nascimento da matemática do ginásio**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004, 155p.

VALENTE, Vagner Rodrigues. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930),** São Paulo: Annablume, 1999, 214p.

ZAMBUZZI, Orlando Antonio. **Matemática**. São Paulo: Ática, 1976, 172p.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da Régua do Compasso**: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Disponível em: http://www.anped.org.br/25/excedentes25/elenicezuint19.rtf. Acesso em 12 fev. 2010.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Construções geométricas, um saber escolar novamente para todos?** In: Semana da Pós-graduação da UFMG, 2002, Belo Horizonte. Anais eletrônicos. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2002. Disponível em: http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/elenicezuin19.rtf Acesso em: 15 mar. 2010.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron**.** A valorização do ensino do desenho geométrico nas escolas de Minas Gerais nas primeiras décadas do século XX (1906-1927): **In Congresso de Pesquisa e ensino em história da Educação Matemática em Minas Gerais,** 2, 2004, Uberlândia. Anais. EDUFU 2004, p. 512 -523**.**

FONTE DAS FIGURAS

Figura 1: http//sobrearteeimagens.blogspot.com

Figura2:http://www.google.com.br/images?q=serra+da+capivara+neolitico+brasileiro+piaui&tbnid=SS7BcLHYT1132M

Figura3:http://prehistoriadaarte.blogspot.com/2009/07/2-arte-na-pre-historia-neolitico.html

Figura 4: http://setimoportal.wordpress.com/2009/04/page/3/

Figura5:http://www.livrosgratis.net/download/1799/elementos-de-geometria-euclides.html

Figura6: http://www.dm.ufscar.br/hp/hp0/hp0.html

Figura7:http://www.publicdomainpictures.net/view-image.php?picture=railway-track&image=2859&jazyk=PT

Figura8: http://www.eca.usp.br/caligrama/n_4/10_ReginaKopke_COMP.pdf

Figura9: http://www.cce.ufsc.br/~scheidt/perspectiva.html

Figura10: http://artperceptions.blogspot.com/2010/02/m-c-escher.html

Figura11:http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S010040422008000400036&script=sci_arttext

Figura12:http://br.gojaba.com/book/5108216/Aritm%C3%A9tica-Elementar-Ilustrada-Ant%C3%B4nio-Trajano

Figura13:http://www.scribd.com/doc/19750440/Elementos-de-Matematica-Jacomo-Stavale

Figura 14: http://www.kosmos.com.br/tec_det.asp?codlivro=4929&q=0&p=730

Figura 15: http://www.traca.com.br/traca.cgi?mod=livrozoom&codlivro=452777

Figuras 16, 17, 21, 22, 29, 30, 31, 32, 38, 39, 40, 48, 49, 53, 54, 57, 58, 59, 60: Matemática; Orlando A. Zambuzzi, 1976

Figuras 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 33, 34, 35, 36, 37,41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 50, 51, 52, 55, 56: A Conquista da Matemática; Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr, 1998

7. ANEXOS

Anexo 01: Índice do livro *Matemática.*

ÍNDICE

Anexo 02: Índice do livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA*.

1

Estudando as potências e suas propriedades

2

Calculando com radicais

3

Equações de 2º grau

Anexo 03: Índice do livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA*.

4

Função polinomial de 1º grau

5

Função polinomial de 2º grau (ou função quadrática)

6

Segmentos proporcionais

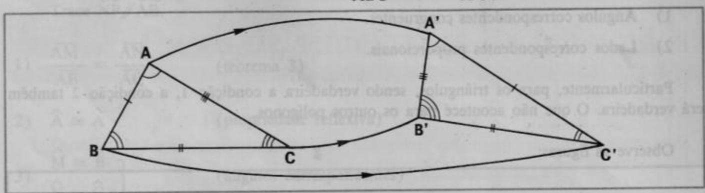
7

Semelhança

Anexo 04: Triângulos semelhantes; livro *Matemática*.

Se a correspondência for:

$ABC \longleftrightarrow A'C'B'$



1) Os lados correspondentes ou homólogos são:

$\overline{AB}$ e $\overline{A'C'}$

$\overline{BC}$ e $\overline{C'B'}$

$\overline{CA}$ e $\overline{B'A'}$

2) Os ângulos correspondentes são:

$\hat{A}$ e $\hat{A}'$

$\hat{B}$ e $\hat{C}'$

$\hat{C}$ e $\hat{B}'$

Logo, a ordem dos vértices na correspondência é muito importante.

Observe as correspondências:

$\boxed{\begin{array}{c} ABC \longleftrightarrow A'B'C' \\ e \\ ABC \longleftrightarrow A'C'D' \end{array}}$

Elas são diferentes.

Considerando a correspondência:

$\boxed{ABC \longleftrightarrow A'B'C'}$

Se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes, proporcionais, os dois triângulos são semelhantes e a correspondência é uma semelhança.

Se:

1) $\hat{A} \cong \hat{A}'$

$\hat{B} \cong \hat{B}'$

$\hat{C} \cong \hat{C}'$

2) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$ (razão de semelhança)

Então, os $\triangle$ ABC e $\triangle$ A'B'C' são semelhantes.

Indicamos: $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'}$

Daí:

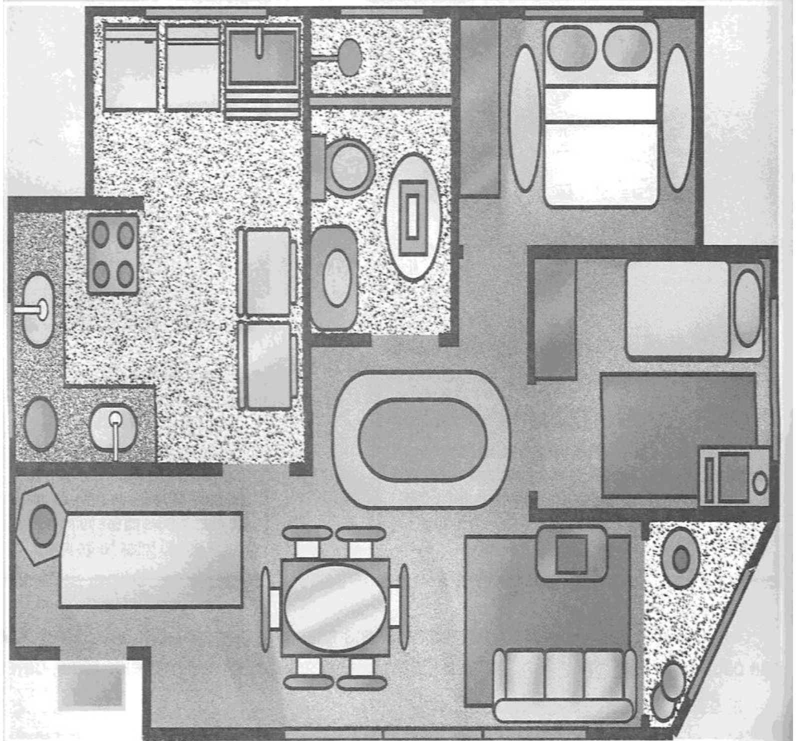
Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais

Esse tipo de correspondência é denominado semelhança.

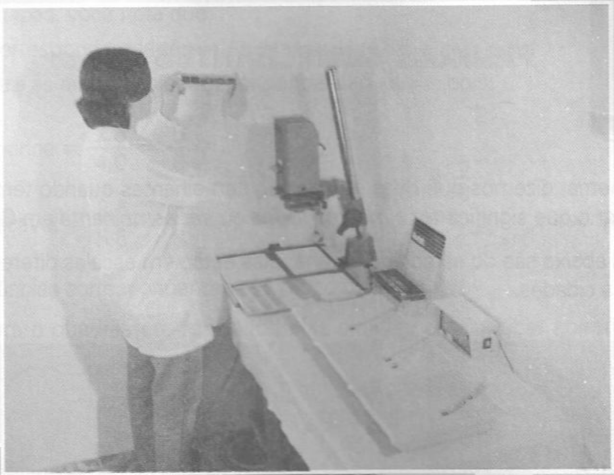
Anexo 05: Semelhança; livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*

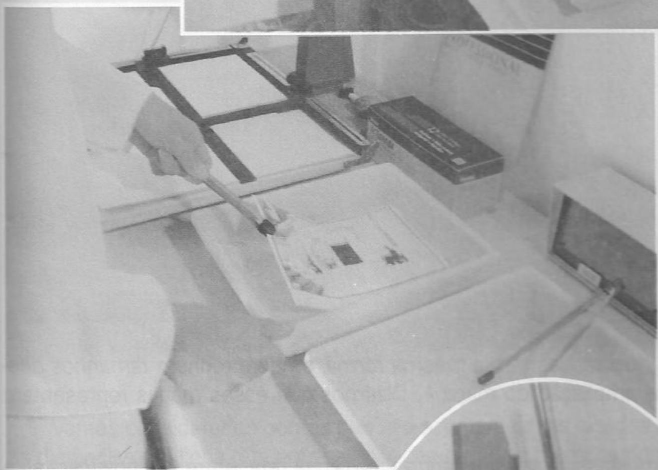
Semelhança

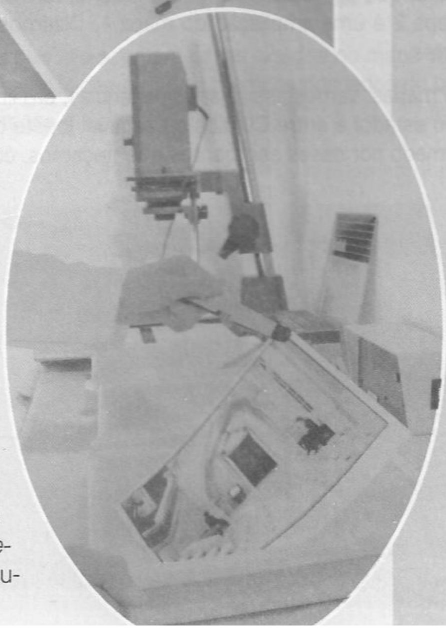
Engenheiros e arquitetos, antes da execução de seus projetos, freqüentemente desenham ou montam as obras que projetam em dimensões reduzidas, fazendo uso de plantas e maquetes. Nas maquetes os edifícios projetados mantêm a forma que terão originalmente, porém são construídos em dimensões bem reduzidas.



Anexo 06:Semelhança: livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*







Nos laboratórios fotográficos é conhecido o trabalho de reprodução de negativos em tamanho reduzido, para posterior ampliação das fotos de maior interesse. Fotos em tamanhos reduzido ou ampliado têm a mesma forma, mas os tamanhos são diferentes.

Quando dois objetos têm a mesma forma e tamanhos diferentes, dizemos que esses objetos representam *figuras semelhantes*. É o que vamos estudar nesta Unidade.

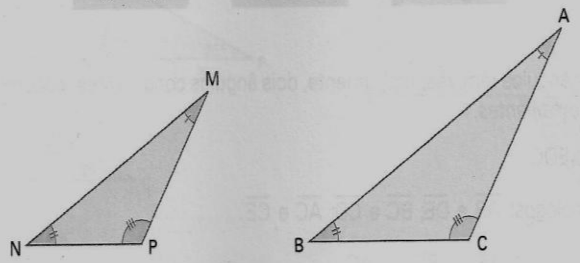
Anexo 07: Propriedade dos triângulos retângulos; livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*

Propriedade

Se dois triângulos são semelhantes, então os lados de um são proporcionais aos lados homólogos do outro.

Sejam os triângulos ABC e MNP abaixo, tal que:

$\hat{A} \cong \hat{M}$ $\hat{B} \cong \hat{N}$ $\hat{C} \cong \hat{P}$

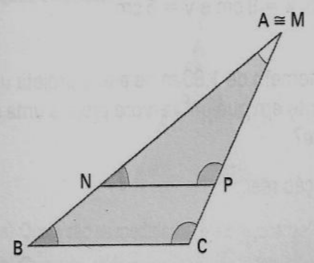


Nessas condições, $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

Vamos mostrar que são válidas as proporções:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

Como os ângulos $\hat{M}$ e $\hat{A}$ são congruentes, vamos sobrepor o ΔMNP ao ΔABC, de modo que $\hat{M}$ e $\hat{A}$ fiquem superpostos.

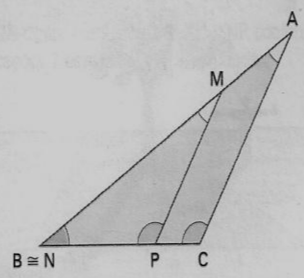


Nessas condições, $\overline{NP}$ é paralelo a $\overline{BC}$, pois $\hat{N} \cong \hat{B}$ e $\hat{N}$ e $\hat{B}$ são correspondentes.

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \quad \text{(I)}$$

Como os ângulos $\hat{N}$ e $\hat{B}$ são congruentes, vamos sobrepor o ΔMNP ao ΔABC, de modo que $\hat{N}$ e $\hat{B}$ fiquem superpostos.



Nessas condições, $\overline{MP}$ é paralelo a $\overline{AC}$, pois $\hat{M} \cong \hat{A}$ e $\hat{M}$ e $\hat{A}$ são correspondentes.

Pelo teorema de Tales:

$$\frac{BC}{NP} = \frac{AB}{MN} \quad \text{(II)}$$

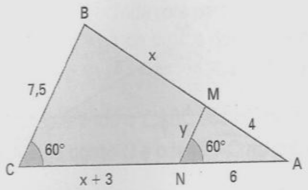
Das igualdades (I) e (II), concluímos que:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$$

Ou seja, os lados do $\triangle ABC$ são proporcionais aos lados correspondentes do $\triangle MNP$.

Anexo 08: Exercícios de triângulos semelhantes; livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*

2 Na figura abaixo, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Nessas condições, determine:



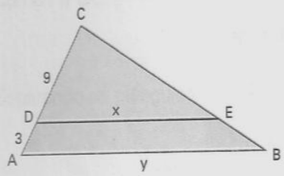
a) as medidas *x* e *y* indicadas.

b) as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

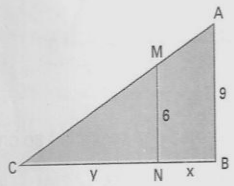
c) os perímetros dos triângulos ABC e AMN.

d) a razão de semelhança entre os triângulos ABC e AMN.

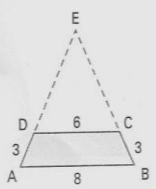
3 Na figura abaixo, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$. Nessas condições, qual o valor de $\frac{x}{y}$?



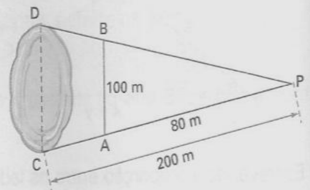
4 Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$. Qual a relação que podemos estabelecer entre *x* e *y*?



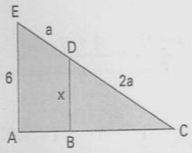
5 No trapézio ABCD, prolongamos os lados não-paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ até se encontrarem num ponto *E*. Nessas condições, verifique a semelhança entre os triângulos ABE e DEC e calcule as medidas de $\overline{DE}$, $\overline{CE}$ e $\overline{BE}$.



6 Para determinar a largura de um lago, foi utilizado o esquema representado pela figura abaixo. Qual é a largura do lago?



7 Na figura abaixo, $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$. Nessas condições, determine:

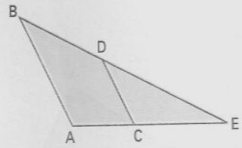


a) a razão de semelhança entre os triângulos BCD e AEC.

b) a medida de *x*.

c) a razão entre o perímetro do $\triangle BCD$ e do $\triangle AEC$.

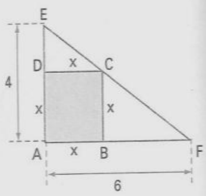
8 Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Se AB = 136 cm, CE = 75 cm e CD = 50 cm, determine a medida de $\overline{AE}$.



9 As bases de um trapézio medem 18 cm e 25 cm, e a altura mede 14 cm. Calcule a altura do menor triângulo que se obtém prolongando-se os lados não-paralelos até se encontrarem.

10 Um $\triangle ABC$ é isósceles, tal que AB = AC = 20 cm. Por um ponto *D* do lado $\overline{AB}$, tal que AD = 5 cm, traça-se uma paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo, que irá encontrar o lado $\overline{AC}$ no ponto *E*. Sabendo-se que DE = 4 cm, qual a medida da base do triângulo isósceles ABC?

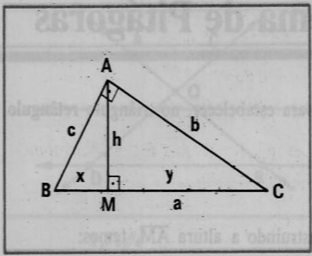
11 Na figura ao lado, ABCD é um quadrado inscrito no $\triangle AEF$. De acordo com as indicações, calcule a medida *x* do lado do quadrado ABCD.



Anexo 09: Relações métricas no triângulo retângulo; livro *Matemática.*

RELAÇÕES MÉTRICAS

Seja $\triangle$ ABC, retângulo:



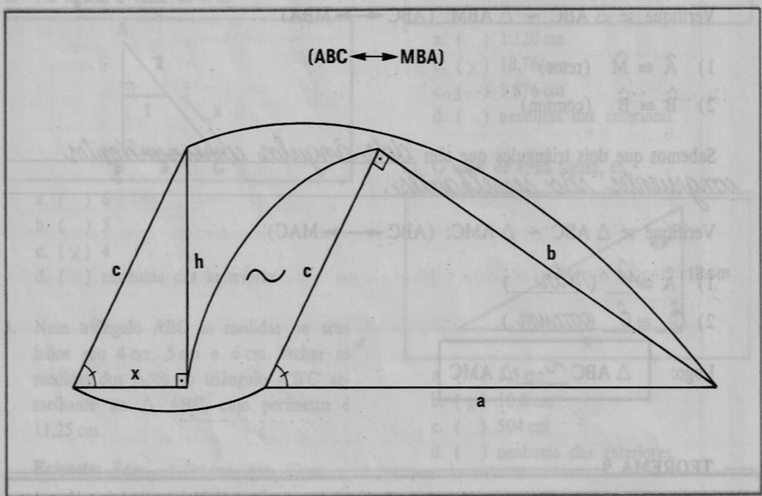
Consideremos:

1) $\overline{AB}$ (cateto), sendo $m(\overline{AB}) = c$
2) $\overline{AC}$ (cateto), sendo $m(\overline{AC}) = b$
3) $\overline{BC}$ (hipotenusa), sendo $m(\overline{BC}) = a$
4) $\overline{AM}$ (altura), sendo $m(\overline{AM}) = h$
5) $\overline{BM}$ (projeção do cateto $\overline{AB}$ na hipotenusa), sendo $m(\overline{BM}) = x$
6) $\overline{CM}$ (projeção do cateto $\overline{AC}$ na hipotenusa), sendo $m(\overline{CM}) = y$

Atenção: muitas vezes, para facilidade, falamos:

1) O cateto c, em vez de o cateto $\overline{AB}$, cuja medida é c.
2) O cateto b, em vez de o cateto $\overline{AC}$, cuja medida é b.
3) A hipotenusa a, em vez de a hipotenusa $\overline{BC}$, cuja medida é a.

Vamos considerar os triângulos ABM e ABC, separados, como no desenho:



Da semelhança (teorema 8) resulta:

$$\frac{c}{a} = \frac{x}{c}$$

$$\boxed{c^2 = ax}$$

Anexo 10: Relações métricas no triângulo retângulo; livro *Matemática*.

TEOREMA 10

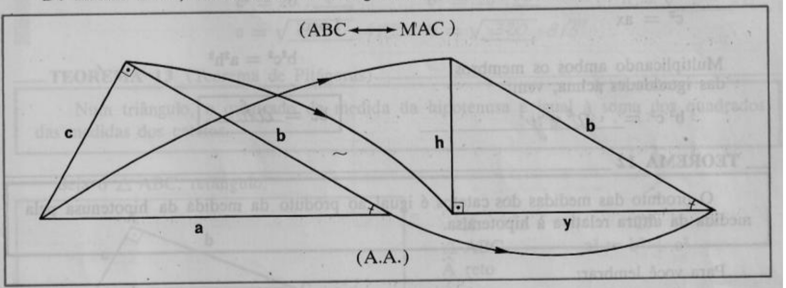
O quadrado da medida de um cateto é o produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto na hipotenusa.

Para você não esquecer:

$$\boxed{\text{Cat.}^2 = \text{hip.} \times \text{proj.}}$$

O mesmo teorema é dito: num triângulo retângulo, cada um dos catetos é a média geométrica (ou proporcional) entre o cateto e a sua projeção na hipotenusa.

Do mesmo modo, considerando os triângulos ABC e AMC, separados, temos:



Da semelhança (teorema 8) resulta:

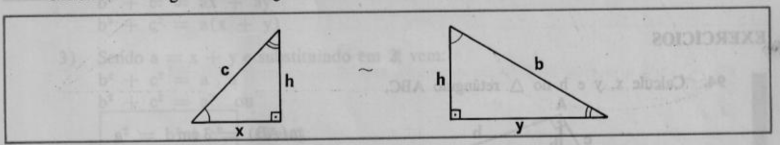
$$\frac{b}{y} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{b^2 = ay}$$

Ainda:

$$\boxed{\text{Cat.}^2 = \text{hip.} \times \text{proj.}}$$

Considerando agora os triângulos ABM e AMC, separados, temos:



(prop. transitiva — teorema 8)

Da semelhança (teorema 8) resulta:

$$\frac{h}{y} = \frac{x}{h}$$

$$\boxed{h^2 = xy}$$

127

Anexo 11: Relações métricas no triângulo retângulo; livro *Matemática*.

TEOREMA 11

O quadrado da medida da altura (relativa à hipotenusa) é o produto das medidas das projeções que ela determina na hipotenusa.

Para você não esquecer:

$$\boxed{\text{Alt.}^2 = \text{proj.} \times \text{proj.}}$$

Considerando o teorema 10, temos:

$b^2 = ay$

$c^2 = ax$

Multiplicando ambos os membros das igualdades acima, vem:

$b^2 c^2 =$ a^2xy

Pelo teorema 11, temos:

$h^2 = xy$

Logo:

$b^2c^2 = a^2h^2$

$\boxed{bc = ah}$

TEOREMA 12

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

Para você lembrar:

$$\boxed{\text{Cat.} \times \text{cat.} = \text{hip.} \times \text{alt.}}$$

RESUMO

1) $b^2 = ay$

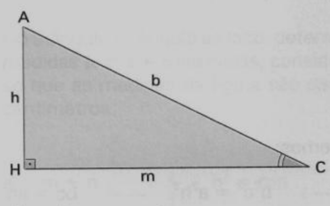
2) $c^2 = ax$

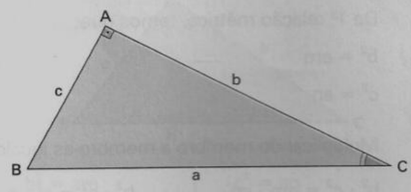
3) $h^2 = xy$

4) $bc = ah$

Anexo 12: Relções métricas no triângulo retângulo; livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*

Considerando os triângulos HAC e ABC, temos:





$$\left.\begin{array}{l}\hat{H} \cong \hat{A} \\ \hat{C} \cong \hat{C} \text{ (comum)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle HAC \sim \triangle ABC$$

Daí temos a proporção $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$.

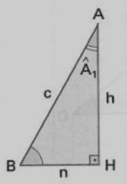
Dessa proporção podemos escrever: $b \cdot b = a \cdot m \quad \Rightarrow \quad b^2 = am$

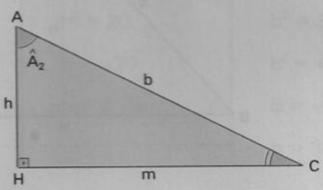
Fica, então, demonstrada a relação métrica:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção do cateto considerado sobre a hipotenusa.

$b^2 = am$ ou $c^2 = an$

2ª relação: Considerando os triângulos HBA e HAC, temos:





$$\left.\begin{array}{l}\hat{H} \cong \hat{H} \text{ (retos)} \\ \hat{A}_1 \cong \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle HBA \sim \triangle HAC$$

Daí temos a proporção $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$.

Dessa proporção, podemos escrever: $h \cdot h = m \cdot n \quad \Rightarrow \quad h^2 = mn$

Fica, assim, demonstrada a relação métrica:

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

Anexo 13: Relações métricas no triângulo retângulo; livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*

3ª relação:

Da 1ª relação métrica, temos que:

$b^2 = am$

$c^2 = an$

Multiplicando membro a membro as igualdades, temos:

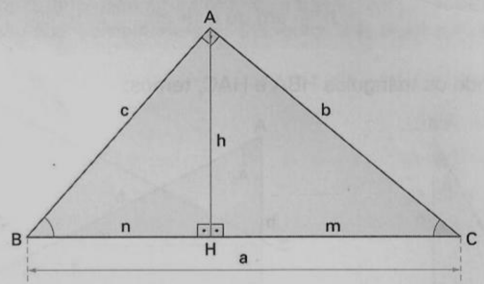
$$b^2 \cdot c^2 = am \cdot an \longrightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{n \cdot m}_{h^2} \longrightarrow b^2c^2 = a^2h^2 \longrightarrow bc = ah$$

Fica, assim, demonstrada a relação métrica:

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

4ª relação:

Vamos dar, agora, a demonstração algébrica do teorema de Pitágoras:



Da 1ª relação, temos:

$b^2 = am$

$c^2 = an$

Adicionando membro a membro as duas igualdades, temos:

$$b^2 + c^2 = am + an \longrightarrow b^2 + c^2 = a\underbrace{(m + n)}_{a} \longrightarrow b^2 + c^2 = a^2 \text{ ou } a^2 = b^2 +$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Anexo 14: Relações trigonométricas no triângulo retângulo; livro *MATEMÁTICA*.

Voltando aos △ ABC, △ AMN e △ ARS, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AR}}$$

O valor comum dessas razões é denominado **cosseno** do ângulo A.

Indica-se:

$$\cos \hat{A} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AR}}$$

Os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AN}$ e $\overline{AS}$ são os catetos adjacentes ao ângulo A e $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ e $\overline{AR}$, as hipotenusas dos triângulos.

Então:

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{ou}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

No △ ABC temos:

$$\cos \hat{A} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Voltando aos △ ABC, △ AMN e △ ARS, temos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{AS}}$$

O valor comum dessas razões é denominado **tangente** do ângulo A.

Indica-se:

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{AS}}$$

Então:

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \quad \text{ou}$$

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

No △ ABC temos:

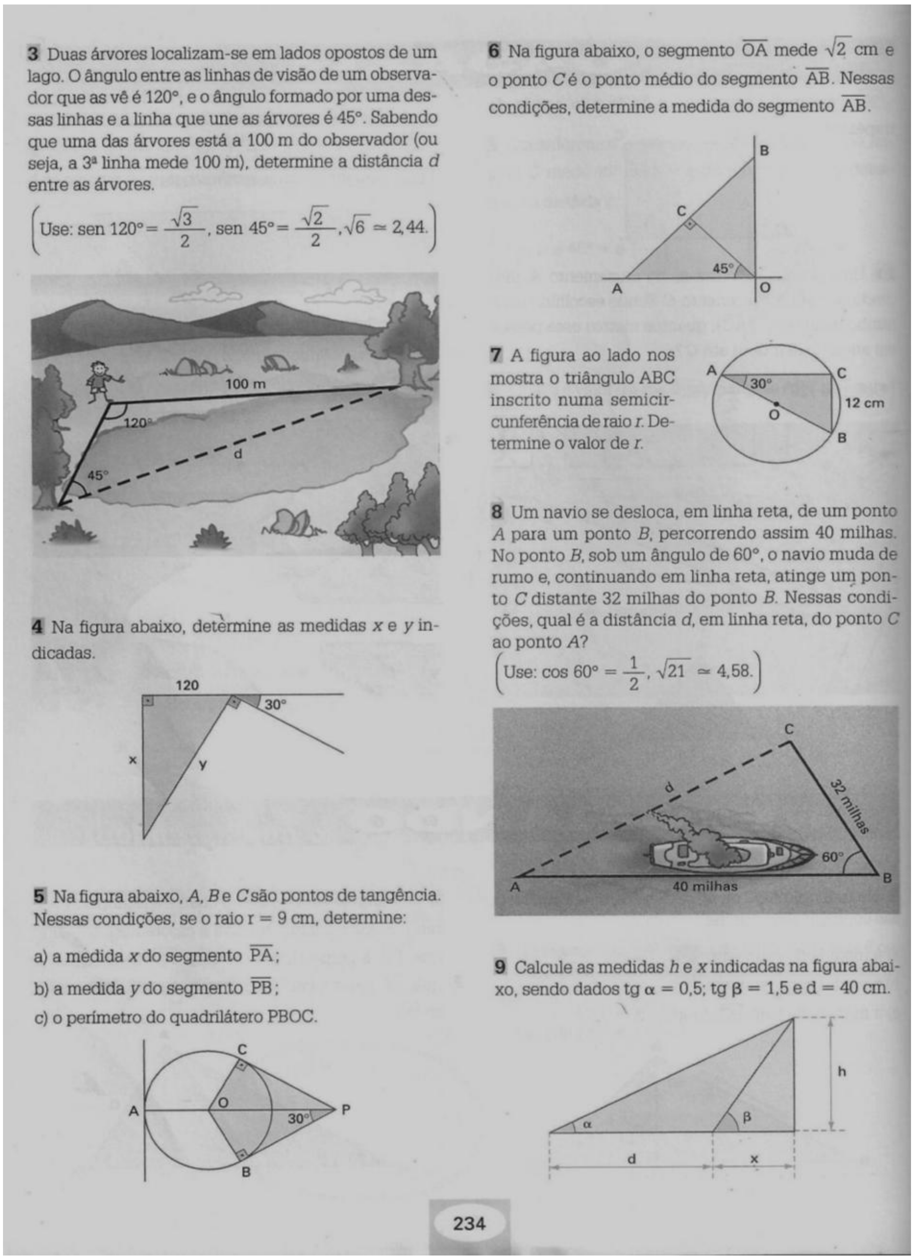
$$\text{tg } \hat{A} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

O seno, o cosseno e a tangente de um ângulo são chamados de **razões trigonométricas** do referido ângulo.

Essas **razões** podem ser obtidas através de construções geométricas.

120

Anexo 15: Exercícios de relações trigonométricas no triângulo retângulo; livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*



3 Duas árvores localizam-se em lados opostos de um lago. O ângulo entre as linhas de visão de um observador que as vê é 120°, e o ângulo formado por uma dessas linhas e a linha que une as árvores é 45°. Sabendo que uma das árvores está a 100 m do observador (ou seja, a 3ª linha mede 100 m), determine a distância *d* entre as árvores.

$\left(\text{Use: sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{6} \simeq 2{,}44.\right)$

4 Na figura abaixo, determine as medidas *x* e *y* indicadas.

5 Na figura abaixo, *A*, *B* e *C* são pontos de tangência. Nessas condições, se o raio r = 9 cm, determine:

a) a medida *x* do segmento $\overline{PA}$;

b) a medida *y* do segmento $\overline{PB}$;

c) o perímetro do quadrilátero PBOC.

6 Na figura abaixo, o segmento $\overline{OA}$ mede $\sqrt{2}$ cm e o ponto *C* é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Nessas condições, determine a medida do segmento $\overline{AB}$.

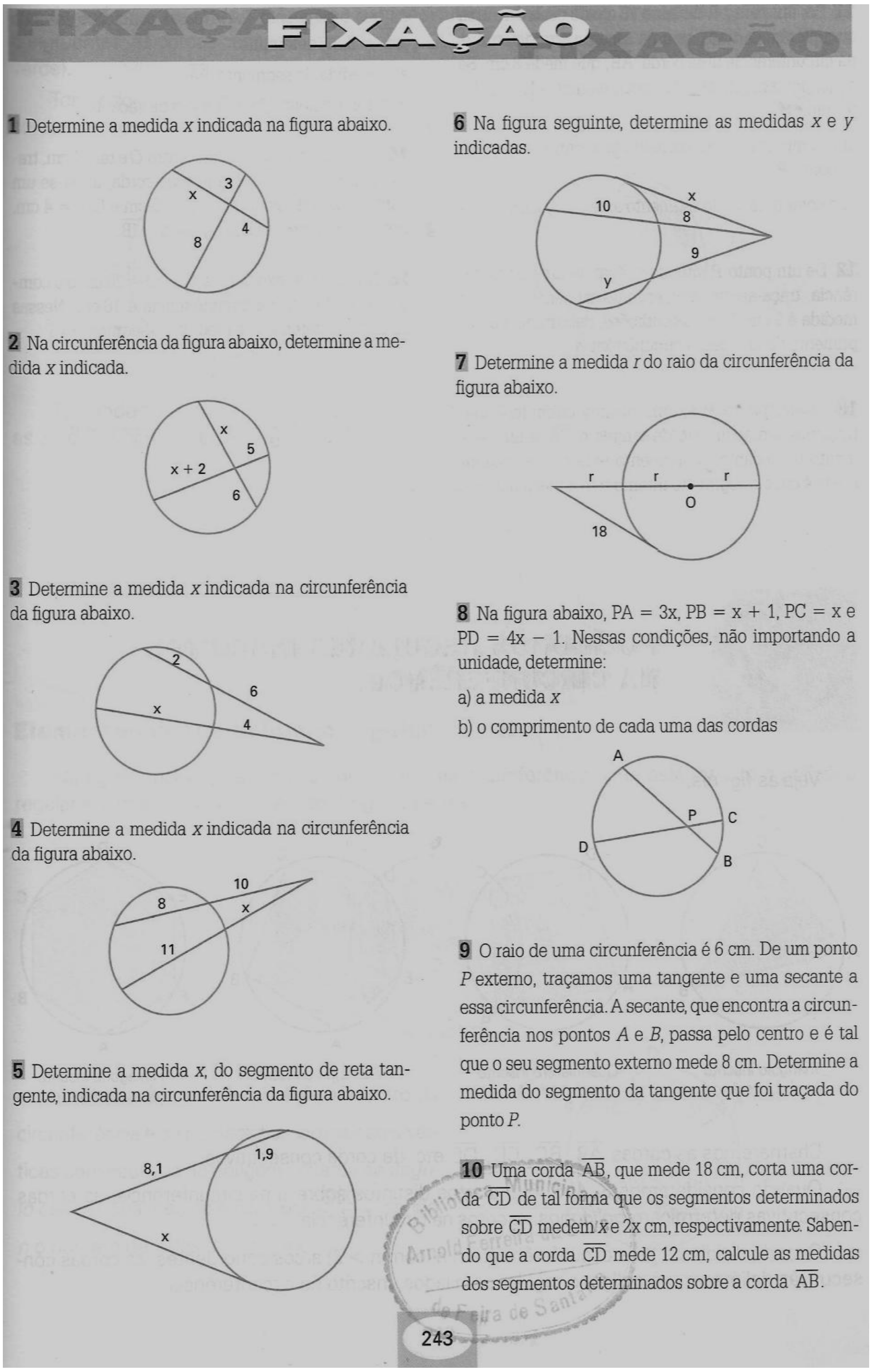
7 A figura ao lado nos mostra o triângulo ABC inscrito numa semicircunferência de raio *r*. Determine o valor de *r*.

8 Um navio se desloca, em linha reta, de um ponto *A* para um ponto *B*, percorrendo assim 40 milhas. No ponto *B*, sob um ângulo de 60°, o navio muda de rumo e, continuando em linha reta, atinge um ponto *C* distante 32 milhas do ponto *B*. Nessas condições, qual é a distância *d*, em linha reta, do ponto *C* ao ponto *A*?

$\left(\text{Use: cos } 60° = \frac{1}{2}, \sqrt{21} \simeq 4{,}58.\right)$

9 Calcule as medidas *h* e *x* indicadas na figura abaixo, sendo dados tg α = 0,5; tg β = 1,5 e d = 40 cm.

Anexo 16: Relações métricas na circunferência; livro *A CONQUISTA DA MATEMÁTICA.*



FIXAÇÃO

1 Determine a medida x indicada na figura abaixo.

2 Na circunferência da figura abaixo, determine a medida x indicada.

3 Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.

4 Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.

5 Determine a medida x, do segmento de reta tangente, indicada na circunferência da figura abaixo.

6 Na figura seguinte, determine as medidas x e y indicadas.

7 Determine a medida r do raio da circunferência da figura abaixo.

8 Na figura abaixo, $PA = 3x$, $PB = x + 1$, $PC = x$ e $PD = 4x - 1$. Nessas condições, não importando a unidade, determine:

a) a medida x

b) o comprimento de cada uma das cordas

9 O raio de uma circunferência é 6 cm. De um ponto P externo, traçamos uma tangente e uma secante a essa circunferência. A secante, que encontra a circunferência nos pontos A e B, passa pelo centro e é tal que o seu segmento externo mede 8 cm. Determine a medida do segmento da tangente que foi traçada do ponto P.

10 Uma corda $\overline{AB}$, que mede 18 cm, corta uma corda $\overline{CD}$ de tal forma que os segmentos determinados sobre $\overline{CD}$ medem x e $2x$ cm, respectivamente. Sabendo que a corda $\overline{CD}$ mede 12 cm, calcule as medidas dos segmentos determinados sobre a corda $\overline{AB}$.

243