



Pós-Graduação em **Astronomia**
MESTRADO PROFISSIONAL
UEFS



ALAILTON DAMIÃO OLIVEIRA SANTOS

**ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS E ASTRONÔMICOS CONTEXTUALIZADO
NA OBRA “PLANOLÂNDIA: UM ROMANCE DE MUITAS DIMENSÕES”**

**FEIRA DE SANTANA
2019**

ALAILTON DAMIÃO OLIVEIRA SANTOS

**ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS E ASTRONÔMICOS CONTEXTUALIZADO
NA OBRA “PLANOLÂNDIA: UM ROMANCE DE MUITAS DIMENSÕES”**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Astronomia, Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Astronomia

Orientador: Prof. Dr. Mirco Ragni
Coorientador: Prof. Dr. Marildo G. Pereira

FEIRA DE SANTANA

2019



ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CANDIDATO (A): ALAILTON DAMIÃO OLIVEIRA SANTOS

DATA DA DEFESA: 20 de dezembro de 2019 LOCAL: Sala 03 do LABOFIS - UEFS

HORÁRIO DE INÍCIO: 9:34

MEMBROS DA BANCA		FUNÇÃO	TÍTULO	INSTITUIÇÃO DE ORIGEM
NOME COMPLETO	CPF			
MIRCO RAGNI	752.912.581-87	Presidente	DR	DFIS - UEFS
PAULO CÉSAR DA ROCHA POPPE	926.229.257-00	Membro Interno	DR	DFIS - UEFS
EDWARD FERRAZ DE ALMEIDA JUNIOR	016.924.875-58	Membro Externo	DR	UFOB

TÍTULO DEFINITIVO DA DISSERTAÇÃO*:

ENSINO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS E ASTRONÔMICOS CONTEXTUALIZADO NA OBRA "PLANOLÂNDIA: UM ROMANCE DE MUITAS DIMENSÕES".

*Anexo: produto(s) educacional(is) gerado(s) neste trabalho.

Em sessão pública, após exposição de 40 min, o(a) candidato(a) foi argüido(a) oralmente pelos membros da banca, durante o período de 60 min. A banca chegou ao seguinte resultado**:

- APROVADO(A)
 INSUFICIENTE
 REPROVADO(A)

** Recomendações¹: CONSIDERAR AS RECOMENDAÇÕES DA BANCA

Na forma regulamentar, foi lavrada a presente ata, que é abaixo assinada pelos membros da banca, na ordem acima relacionada, pelo candidato e pelo coordenador do Programa de Pós-Graduação em Astronomia da Universidade Estadual de Feira de Santana.

Feira de Santana, 20 de DEZEMBRO de 2019

Presidente: Mirco Ragni
Membro 1: Paulo César da Rocha Poppe
Membro 2: Edward Ferraz de Almeida Junior
Membro 3: _____
Candidato (a): Alailton Damiano Oliveira Santos
Coordenador do PGAstro: Carlos Alberto de Almeida

¹ O aluno deverá encaminhar à Coordenação do PGAstro, no prazo máximo de 60 dias a contar da data da defesa, os exemplares definitivos da Dissertação, após realizadas as correções sugeridas pela banca.



**ANEXO DA ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE Mestrado:
PRODUTO(S) EDUCACIONAL(IS) GERADO(S) NO TRABALHO FINAL DE CURSO**

CANDIDATO (A): ALAILTON DAMIÃO OLIVEIRA SANTOS

DATA DA DEFESA: 20 de dezembro de 2019 **LOCAL:** Sala 03 do LABOFIS - UEFS

HORÁRIO DE INÍCIO: S. 34

- CADERNO DE ATIVIDADES
- MAQUETE DE PLANALTA E CAIXA COM FENDA
- PROJEITOR DE SOMBRAS
- ESTEROSCÓPIO
- TECIDO ESPAÇO-TEMPO
- CONSTELAÇÃO 3D
- LENTE GRAVITACIONAL

Feira de Santana, 20 de DEZEMBRO de 2019.

Presidente: Miguel Ragni

Membro 1: [assinatura]

Membro 2: Edward Siqueira de Almeida

Membro 3: _____

Candidato (a): Alailton Damiano Oliveira Santos

Coordenador do PGAstro: Carlos Alberto de Lima Ribeiro

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Santos, Alailton Damião Oliveira

S233e Ensino de conceitos geométricos e astronômicos contextualizado na obra “Planolândia: um romance de muitas dimensões”. / Alailton Damião Oliveira Santos. – 2019.
123f.: il.

Orientador: Mirco Ragni

Coorientador: Marildo G. Pereira

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Astronomia, 2019.

1.Geometria – Estudo e ensino. 2.Espacialidade. 3.Dimensões espaciais. I.Ragni, Mirco, orient. II.Pereira, Marildo G., coorient. III.Universidade Estadual de Feira de Santana. IV.Título.

CDU: 514

Ao meu filho Kauã Silva Santos e a minha esposa Nataline Silva de Queiroz, pelo tempo
que deixamos de estar juntos e pelo apoio incondicional...

Aos meus pais, irmãos e familiares por acreditarem sempre que seria capaz, a eles todos
os créditos...

Dedico

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador o Prof. Dr. Mirco Ragni pela sugestão do trabalho e atividades e pela dedicação nas correções e orientações neste período de aprendizado.

Ao Prof. Dr. Marildo Pereira, meu coorientador, pelas valiosas sugestões e orientações.

Ao Prof. Dr. Paulo Poppe, pelas sugestões de atividades, e pelas contribuições, juntamente com o Prof. Dr. Iranderly Fernandes, como participantes das bancas de avaliação.

A todos os professores e professoras vinculados ao mestrado em Astronomia da UEFS, que contribuíram em cada aprendizado, em especial a Profa. Dra. Vera Martin, pelo empenho, profissionalismo e carinho, por nós alunos do Programa.

Aos meus colegas de caminhada no curso (Turma Sirius) que tornaram um período de longa dedicação em algo prazeroso e com quem compartilhei angústias, desafios, conhecimentos e muitas alegrias.

“Melhor que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do ‘espaço intelectual’, já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, indo do que pode ser percebido para o que pode ser concebido”.

Wheeler.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
2 REFLEXÕES ACERCA DO ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	20
3 PLANOLÂNDIA E SUAS RELAÇÕES COM A GEOMETRIA E ASTRONOMIA ..	32
3.1 PLANOLÂNDIA	32
3.2 RELAÇÕES COM GEOMETRIA E ASTRONOMIA	35
4 METODOLOGIA	48
4.1 DELIMITANDO O LOCAL E PÚBLICO DE APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES.....	50
4.2 DELINEAMENTO DAS ATIVIDADES	52
4.2.1 Reconhecendo as Dimensões Espaciais	54
4.2.2 Planificação do Céu	57
4.2.3 Distância das Estrelas.....	59
4.2.4 Dando Formas às Sombras	61
4.2.5 O Espaço segundo a Teoria da Relatividade Geral de Einstein	63
4.3 DESENVOLVIMENTO DE MATERIAIS.....	66
4.3.1 Maquete de Planolândia e Caixa com Fenda	67
4.3.2 Projetor de Sombras.....	69
4.3.3 Estereoscópio.....	70
4.3.4 Tecido Espaço-Tempo	71
4.3.5 Constelação 3D	72
4.3.6 Lente Gravitacional.....	74
4.4 DESENVOLVIMENTO DO CADERNO DE ATIVIDADES	75
5 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	76
5.1 RECONHECENDO AS DIMENSÕES.....	77
5.2 PLANIFICAÇÃO DO CÉU	82
5.3 DISTÂNCIA DAS ESTRELAS	89
5.4 DANDO FORMAS ÀS SOMBRAS	95
5.5 O ESPAÇO SEGUNDO A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	97
6 ATIVIDADES PROPOSTAS NO PRODUTO EDUCACIONAL (CADERNO DE ATIVIDADES).....	107
7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
REFERÊNCIAS	115
APÊNDICES	118

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Percentual de estudantes por nível de proficiência em Matemática por unidade da federação, pisa 2015.....	21
Figura 2 – Dificuldade dos itens de Matemática segundo conteúdo por país e unidade da federação, pisa 2015.....	22
Figura 3 – Objetos de conhecimento relacionados à geometria presentes na BNCC, Ensino Fundamental I.	26
Figura 4 – Objetos de conhecimento relacionados à geometria presentes na BNCC, Ensino Fundamental II.	27
Figura 5 – Esquema síntese das competências e habilidades necessárias para o letramento matemático.....	29
Figura 6 – Visão de um habitante de Planolândia.....	33
Figura 7 – Visão do personagem quadrado durante a visita da esfera.	34
Figura 8 – Representação da visão estereoscópica.	37
Figura 9 – Paralaxe Heliocêntrica	38
Figura 10 – Esfera Celeste	40
Figura 11 – Galáxia de Andrômeda.	44
Figura 12 – Diagrama do Hubble.	45
Figura 13 – Diagrama do Hubble com dados modernos.	45
Figura 14 – Representação da expansão do espaço.	46
Figura 15 – Etapas do processo pelo qual a pesquisa foi realizada.	49
Figura 16 – Entrada do Colégio Estadual de Barrocas.....	51
Figura 17 – Localização do município de Barrocas no Território do Sisal.....	51
Figura 18 – Esquema de assimilação de novos conceitos segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.....	52
Figura 19 – Planejamento da atividade: Reconhecendo as dimensões espaciais.	54
Figura 20 – Questões sobre dimensões espaciais.	55
Figura 21 – Diferentes formas dispostas aleatoriamente.	56
Figura 22 – Planejamento da atividade: Planificação do Céu.	57
Figura 23 – Constelação do Cruzeiro do Sul em sistema de referências.	59
Figura 24 – Planejamento da atividade: Distâncias das Estrelas.....	60

Figura 25 – Planejamento da atividade: Dando Formas às Sombras.....	62
Figura 26 – Planejamento da atividade: O espaço segundo a Teoria da Relatividade Geral.....	64
Figura 27 – Questionário para levantamento de concepções sobre espaço e gravidade. .	65
Figura 28 – Representação da deformação tridimensional do espaço.....	66
Figura 29 – Maquete de Planolândia.	68
Figura 30 – Caixa com fenda.....	68
Figura 31 – Projetor de sombras.	69
Figura 32 – Sombra projetada.	69
Figura 33 – Estereoscópio	70
Figura 34 – Esquema básico de montagem de um estereoscópio.	70
Figura 35 – Representação plana do espaço-tempo.	71
Figura 36 – Representação do tecido espaço-tempo.	72
Figura 37 – Posição da estrela Delta Crux na maquete.	73
Figura 38 – Vista frontal e lateral da constelação 3D.	74
Figura 39 – Representação do desvio da luz por um buraco negro.	74
Figura 40 – Etapas de aplicação das atividades.	76
Figura 41 – Estudante realizando teste com formas de diferentes dimensões.....	78
Figura 42 – Estudantes presentes na aula sobre dimensões espaciais.....	81
Figura 43 – Organização dos materiais segundo o número de dimensões.	81
Figura 44 – Identificação das coordenadas x e y das estrelas.....	83
Figura 45 – Materiais disponibilizados para o estudo do céu.....	84
Figura 46 – Estudantes participantes na atividade planificação do céu.	85
Figura 47 – Estudantes montando um modelo tridimensional de constelação.	92
Figura 48 – Maquete tridimensional da constelação do Cruzeiro do Sul.....	93
Figura 49 – Vista lateral da maquete da constelação do Cruzeiro do Sul.....	94
Figura 50 – Sombra projetada por um cone.	96
Figura 51 – Registro da atividade com uso de representação bidimensional do tecido do espaço-tempo.	99
Figura 52 – Imagem do eclipse solar de 29 de maio de 1919, foto tirada pela equipe brasileira.....	100
Figura 53 – Estudante visualizando uma representação de lente gravitacional.	101
Figura 54 – Comentário de uma estudante sobre a atividade.....	104

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Respostas dos estudantes para primeira questão.....	78
Gráfico 2 – Respostas dos Estudantes Sobre Visualização da Terceira Dimensão.....	79
Gráfico 3 – Respostas Dos Estudantes Sobre Reconhecimento das Dimensões	80
Gráfico 4 – Respostas dos estudantes sobre a distâncias das estrelas.....	90
Gráfico 5 – Respostas dos estudantes sobre diferenças das distâncias entre planetas e estrelas.....	91
Gráfico 6 – Respostas dos estudantes sobre TRG.....	102
Gráfico 7 – Respostas dos estudantes sobre movimento dos planetas.	103
Gráfico 8 – Respostas dos estudantes sobre a abordagem do tema.	104
Gráfico 9 – Respostas dos estudantes sobre os materiais utilizados.	105

RESUMO

O ensino de muitos conceitos de Geometria está sendo deixado de lado ou tem recebido tratamento superficial na escolarização básica no Brasil. As causas podem estar relacionadas a reformas curriculares, como a ocorrida com o movimento da Matemática Moderna, com a falta de preparo dos professores, de tempo ou mesmo com o desconhecimento da importância do desenvolvimento da noção espacial e do pensamento geométrico dos estudantes. Deficiências de entendimentos de conceitos de geometria provoca dificuldade de abstração geométrica e diminui a capacidade de interpretação e representação do espaço. Diante disso, o nosso problema de pesquisa consistiu em pensar quais atividades podem ser elaboradas com vistas a desenvolver nos estudantes uma melhor compreensão da Geometria Espacial. Visando realizar intervenções no sentido de contribuir para uma melhora no entendimento de conceitos geométricos, foram desenvolvidas estratégias metodológicas afim de auxiliarem no desenvolvimento da noção de espacialidade dos estudantes, com a utilização de experimentos sensoriais e elementos teóricos de Astronomia a partir do livro “Planolândia” de Edwin Abbott. Dentro de uma perspectiva metodológica intervencionista, a pesquisa teve como público alvo estudantes do Ensino Médio do Colégio Estadual de Barrocas – Ba. Neste sentido, a proposta consistiu na realização de um conjunto de ações que levaram a realização de cinco atividades envolvendo temáticas ligadas ao conceito de espacialidade norteadas por recortes do livro Planolândia, contextualizadas com tópicos de Astronomia. Com as aplicações foi possível discutir elementos do espaço bi e tridimensional, promovendo uma maior familiaridade com termos geométricos para melhor entendimento dos conceitos de eixos coordenados, plano cartesiano, figuras geométricas planas e espaciais e do espaço segundo a Teoria da Relatividade Geral. Ao longo do processo de planejamento das estratégias metodológicas foram criados materiais experimentais específicos relacionados a cada uma das atividades. Deste modo, os produtos educacionais gerados nesse trabalho são os kits didáticos, constituídos pelos materiais experimentais desenvolvidos para serem utilizados nas atividades e um caderno de atividades, composto de estratégias metodológicas capazes de promoverem o estudo de conceitos geométricos, contribuindo para a ampliação da noção espacial dos estudantes.

Palavras-chave: ensino de geometria, espacialidade, dimensões espaciais.

ABSTRACT

The teaching of many concepts of Geometry is being neglected or has received superficial treatment in basic schooling in Brazil. The causes may be related to curricular reforms, such as the one that occurred with the Modern Mathematics movement, with the lack of preparation of teachers, time or even with the ignorance of the importance of the development of the spatial notion and geometric thinking of students. Deficiencies in the understanding of concepts of geometry causes difficulty in geometric abstraction and decreases the ability to interpret and represent space. Therefore, our research problem was to think about what activities can be developed with a view to developing in students a better understanding of Spatial Geometry. Aiming to accomplish interventions in order to contribute to an improvement in the understanding of geometric concepts, methodological strategies were developed in order to assist in the development of the notion of spatiality of students, with the use of sensory experiments and theoretical elements of Astronomy from the book "Planolândia" by Edwin Abbott. Within an interventionist methodological perspective, the research was aimed at high school students from the Colégio Estadual de Barrocas - Ba. In this sense, the proposal consisted of carrying out a set of actions that led to the realization of five activities involving themes related to the concept of spatiality guided by clippings from the book Planolândia, contextualized with Astronomy topics. With the applications it was possible to discuss elements of bi and three-dimensional space, promoting greater familiarity with geometric terms for a better understanding of the concepts of coordinated axes, Cartesian plane, flat and spatial geometric figures and of space according to the Theory of General Relativity. Throughout the methodological strategy planning process, specific experimental materials related to each activity were created. In this way, the educational products generated in this work are the didactic kits, consisting of the experimental materials developed to be used in the activities and an activity notebook, composed of methodological strategies capable of promoting the study of geometric concepts, contributing to the expansion of the spatial notion of students.

Key words: teaching of geometry, spatiality, spatial dimensions.

1 INTRODUÇÃO

Assim como descrito na famosa “Alegoria da Caverna” ou “Mito da Caverna”, escrito pelo filósofo grego Platão, a percepção do mundo está associada às experiências vivenciais de cada indivíduo. A interação do homem com o espaço é feita por meio dos sentidos e a partir disso busca seu entendimento, passando a atribuir significados.

A descrição racional do mundo e o entendimento dos fenômenos há muito tempo move a humanidade. Ao longo de sua história, na busca da compreensão do espaço em que vive, o ser humano passou a utilizar-se de formas geométricas e relacioná-las com os objetos a sua volta, numa espécie de descrição geométrica da natureza. Na faixa de uma casa ou prédio, nas formas dos móveis, quadros, objetos e até mesmo nos astros celestes, em todo lugar é possível perceber figuras geométricas, além de localizá-las no espaço.

Sob o ponto de vista educacional, torna-se importante que o estudante desenvolva uma noção espacial bem como o pensamento geométrico pois ajudarão no entendimento do espaço em que vive, além de possibilitar desenvolvimento de conceitos cada vez mais abstratos. Segundo as orientações presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Fundamental,

[...] o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes (BRASIL, 2017, p. 271).

Assim, o estudante deve reconhecer propriedades das diferentes formas geométricas e relacionar as concepções planas e espaciais.

Esse reconhecimento por parte do estudante é fundamental para a descrição e entendimento espaço a sua volta. Segundo as orientações contidas nos PCN+ para o Ensino Médio, a Geometria

[...] presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços (BRASIL, 2002, p. 120).

Além desses aspectos, o pensamento geométrico auxilia na compreensão espacial do Universo como um todo, pois fenômenos que envolvem movimentos dos astros

no espaço como fases da Lua, eclipses e estações do ano exigem certo grau de abstração geométrica, uma vez que vemos apenas os movimentos aparentes e seus deslocamentos reais no espaço não são percebidos pela observação direta.

Apesar da posição privilegiada nos documentos oficiais que indicam que a mesma deve ser inserida desde as séries iniciais e estar presente em todos os níveis subsequentes, nem sempre seu ensino é tratado com prioridade, sendo que com frequência “os alunos chegam ao Ensino Médio (e saem dele) com restrito conhecimento de Geometria” (CARVALHO; FERREIRA, 2015, pág. 1, grifo nosso).

Sobre o ensino de Geometria, Pavanello (2004) alerta para o cenário de descaso, afirmando que na maioria das escolas está sendo deixado de lado pelos professores, ou então é feito de forma superficial. Para a autora, dentre os principais motivos apresentados, estão a falta de domínio no conteúdo por parte de muitos professores, a falta de tempo para explorar os assuntos ou mesmo o desconhecimento da importância do desenvolvimento do pensamento geométrico nos estudantes. Dessa forma, na maioria das vezes, o conteúdo não é apresentado para os estudantes. Quando é feito, o ensino de Geometria na escolarização básica encontra desafios como o de transpor o alto grau de abstração e uso de muitas relações matemáticas prontas.

Os problemas com o ensino de Geometria não são recentes, como sinalizado por Lorenzato (1995):

[...] apresentada aridamente, desligada da realidade, não integrada com as outras disciplinas do currículo e até mesmo não integrada com as outras partes da própria Matemática, a Geometria, a mais bela página do livro dos saberes matemáticos, tem recebido efetiva contribuição por parte dos livros didáticos para que ela seja realmente preterida na sala de aula (LORENZATO, pág. 4, 1995).

Estes aspectos muitas vezes fazem com que os estudantes se sintam desmotivados, pois precisam fazer interpretações abstratas sem antes reconhecer os elementos de modo concreto.

Além das razões citadas acima para justificar a ausência do estudo da Geometria, Lorenzato (pág. 5, 1995) cita que, dentre os fatores, “Talvez, o maior de todos eles seja o fato da Geometria exigir do aluno uma maneira específica de raciocinar”, sendo essa uma barreira intrínseca da própria disciplina.

Tendo em vista os desafios para o desenvolvimento da compreensão espacial e do pensamento geométrico dos estudantes, este trabalho busca

apresentar alguns produtos educacionais na forma de sugestões de atividades alternativas e materiais experimentais, desenvolvidos com a finalidade de promover novas práticas durante o ensino de Geometria na Educação Básica. Debruçamos na seguinte problemática: **quais atividades podem ser elaboradas a partir da obra Planolândia com vistas a desenvolver nos estudantes uma melhor compreensão da Geometria Espacial?**

Buscou-se explorar a obra literária Planolândia: um romance de muitas dimensões do autor inglês Edwin A. Abbott, que utilizou conceitos de Geometria para satirizar os preconceitos existentes na sociedade vitoriana. Trata-se de um romance satírico com uma narrativa que envolve, essencialmente, elementos matemáticos geométricos e aspectos sociais, mas com possibilidades de associações com a Física e Astronomia. Essa obra tem sido utilizada em outros trabalhos no Brasil como em Bonete (2013) e Sampaio (1996) para estimular a aprendizagem de Geometria.

Nossa hipótese é que o estudo do espaço bi e tridimensional, a partir do contexto do livro Planolândia e estimulados por temas de Astronomia ajudará o estudante no desenvolvimento da noção de espacialidade.

A Astronomia, devido seu caráter interdisciplinar, tem sido utilizada como meio motivador para o ensino de conteúdo de diversas disciplinas. Especialmente em Matemática, seus conhecimentos permitem contextualizar historicamente aplicações de elementos geométricos e trigonométricos que possibilitaram o melhor entendimento da natureza.

Complementando a metodologia de aplicação das atividades, será feito o uso de recursos experimentais que possibilitem a visualização e entendimento de conceitos ligados ao contexto de Planolândia e a percepção do espaço. O uso de materiais manipuláveis é defendido por muitos autores (ROCHA, 2014; SCHONS, 2012; SILVA; RIBAS; FREITAS, 2008), pois ajudam no entendimento dos conceitos.

Entendemos que muitas dificuldades com o entendimento de conceitos de Geometria Espacial, frequentemente apresentadas pelos estudantes do Ensino Médio, advém da falta de estímulos afim de desenvolver o pensamento geométrico espacial em níveis anteriores. Nesse sentido, acredita-se que as atividades propostas podem ser aplicadas tanto no Ensino Fundamental quanto Ensino Médio para minimizar a referida carência.

Com uma perspectiva interdisciplinar de associar o uso de uma obra literária ao estudo de conceitos geométricos e suas aplicações na Astronomia, buscou-se desenvolver materiais instrucionais e atividades que estimulem o desenvolvimento da visão espacial bem como do pensamento geométrico dos estudantes. Algumas atividades foram aplicadas durante as aulas de Física com estudantes da primeira e segunda séries do nível médio, com faixa etária média entre 15 e 16 anos. As aplicações ocorreram no Colégio Estadual de Barrocas, escola de médio porte, situada no município de Barrocas, sertão da Bahia. Os estudantes em sua maioria são oriundos de escolas públicas municipais da zona rural e urbana.

O objetivo principal é desenvolver e aplicar, a partir da obra Planolândia, atividades e materiais que possibilitem a abordagem de conceitos ligados as dimensões espaciais como: eixos ordenados, plano, espaço, figuras bi e tridimensionais, projeções, paralaxe, deformação do espaço-tempo, entre outros. A realização das atividades se deu por meio de metodologia prática, envolvendo temas de Astronomia e a manipulação de materiais, afim de que o estudante perceba a Geometria como um tema amplo, com aplicações em outras áreas e presente no seu cotidiano.

Os objetivos específicos são: promover o estudo das dimensões espaciais em objetos; ampliar a noção espacial do estudante por meio de representações no plano e no espaço; discutir como ocorre a percepção do espaço; refletir sobre os posicionamentos dos astros no espaço tridimensional; abordar a concepção de espaço-tempo deformável e desenvolver estratégias didáticas que promovam o estudo da espacialidade. As aplicações das atividades e materiais experimentais desenvolvidos servirão de base para a elaboração de um caderno de atividades que será o principal produto educacional associado à presente dissertação, desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Astronomia na Universidade Estadual de Feira de Santana. As atividades envolvem conceitos das áreas de Geometria, Física e Astronomia, sendo assim pautadas na interdisciplinaridade.

O Capítulo 2 deste trabalho será apresentado com objetivo de contextualizar o problema do ensino de Matemática e em particular da Geometria no Brasil, expondo o que preconiza os documentos oficiais e apresentando justificativas para o uso da Literatura e de temas de Astronomia nas aulas de Matemática. No Capítulo 3 é feita uma discussão de apresentação do livro Planolândia seguida de um

levantamento das relações entre Planolândia, Geometria e Astronomia, buscando-se evidenciar os aspectos ligados ao ensino de Geometria Espacial e as associações que podem ser feitas para o desenvolvimento da noção espacial dos estudantes. A metodologia empregada e o delineamento das atividades e materiais desenvolvidos para abordar a percepção do espaço e o desenvolvimento da noção espacial são descritos no Capítulo 4. O quinto capítulo é dedicado a descrição das aplicações feitas e análise de alguns resultados obtidos com a utilização das estratégias e materiais desenvolvidos. No sexto capítulo apresenta-se as atividades propostas em um caderno de atividades que visa auxiliar professores na abordagem dos conteúdos, constituindo assim o principal produto educacional gerado com esta pesquisa. Por fim, dedicamos o sétimo e último capítulo a uma avaliação dos resultados e potencialidades dos materiais desenvolvidos e a apresentação das conclusões e considerações finais.

2 REFLEXÕES ACERCA DO ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

O ensino de Geometria na Educação Básica pode promover o desenvolvimento de muitas competências que ajudam o estudante a conhecer melhor o espaço no qual está inserido, além de ajudar no entendimento de conteúdos de outras áreas. Este capítulo busca apresentar uma abordagem geral de aspectos que envolvem o ensino de Geometria, refletindo sobre o desempenho dos estudantes brasileiros e apresentando as perspectivas presentes nos documentos oficiais para esta área bem como algumas possibilidades de abordagem na sala de aula.

O comum desinteresse, e até aversão à Matemática, pode ser um indício de que o trabalho com esta disciplina não está atingindo seus propósitos. A falta de estímulos com os conteúdos escolares muitas vezes é gerada pelo distanciamento entre o que é visto na escola e o que faz parte do cotidiano do estudante. Desta forma o estudante não é capaz de atribuir significado às informações, o que acaba refletindo no seu desempenho.

Como uma das formas de avaliar o desempenho de seus estudantes o Brasil, juntamente com outros países, participa do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) — *Programme for International Student Assessment* —, coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). No Brasil sua execução é de responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).

Com foco nas áreas de Leitura, Matemática e Ciências os questionários são aplicados a cada três anos a estudantes na faixa etária de 15 anos, matriculados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, sendo que em cada edição uma dessas áreas é priorizada com maior número de questões. De acordo com o Inep, o principal objetivo do PISA é:

“[...] produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação nos países participantes, de modo a subsidiar políticas de melhoria do ensino básico (PORTAL INEP-PISA).”

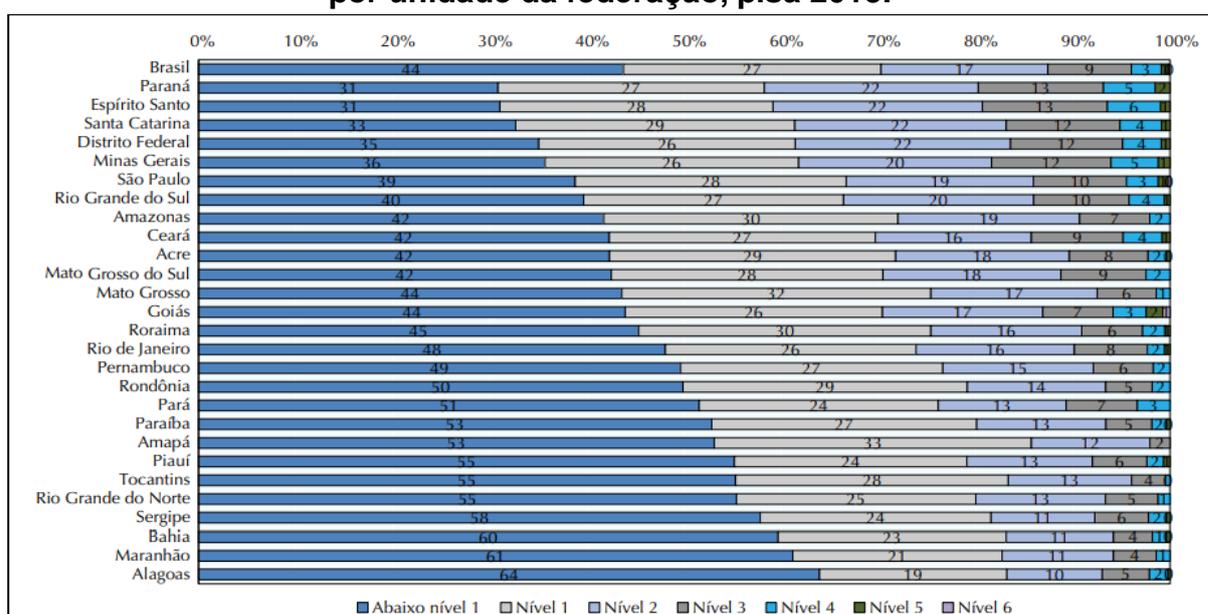
Esses indicadores levam em consideração variáveis demográficas, socioeconômicas e educacionais, com dados obtidos em questionários específicos. Dessa forma os governos podem definir estratégias de investimentos, elaborar projetos com atenção aos pontos críticos e assim refinar sua política educativa, visando aos jovens uma

formação que possibilite sua participação ativa na sociedade com preparação para a vida futura.

Em relação ao desempenho de seus estudantes, o Brasil tem ocupado as últimas posições, quando comparado com os demais países participantes. Em relação ao rendimento em Matemática no ano de 2015 o Brasil ocupou a posição 59^o no ranking mundial e em Ciências e Leitura, ocupou a 60^a posição (LOPES, 2017, p. 35). Associado ao rendimento dos estudantes brasileiros, os resultados sobre repetência de defasagem idade-série também mostram o Brasil ocupando as últimas posições no ranking (SILVEIRA, 2019, p. 16).

Na edição realizada em 2015 o Brasil teve rendimento abaixo da média dos alunos em países da OCDE nas três áreas. Em Matemática apenas 377 pontos (média nos países da OCDE: 390), em Leitura 407 pontos (média nos países da OCDE: 493 pontos) e em Ciências o Brasil obteve 401 pontos, comparados à média de 493 pontos nos países da OCDE. A situação alarmante em que se encontram os resultados em relação à Matemática é apresentada na Figura 1. No Brasil, em 2015, mais de 70% dos estudantes estavam abaixo do nível 2 de proficiência em matemática. Para a OCDE, o nível 2 é o patamar necessário para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania. Na Bahia o resultado é ainda mais preocupante, ocupando o antepenúltimo lugar dentre os estados brasileiros.

Figura 1 – Percentual de estudantes por nível de proficiência em Matemática por unidade da federação, pisa 2015.



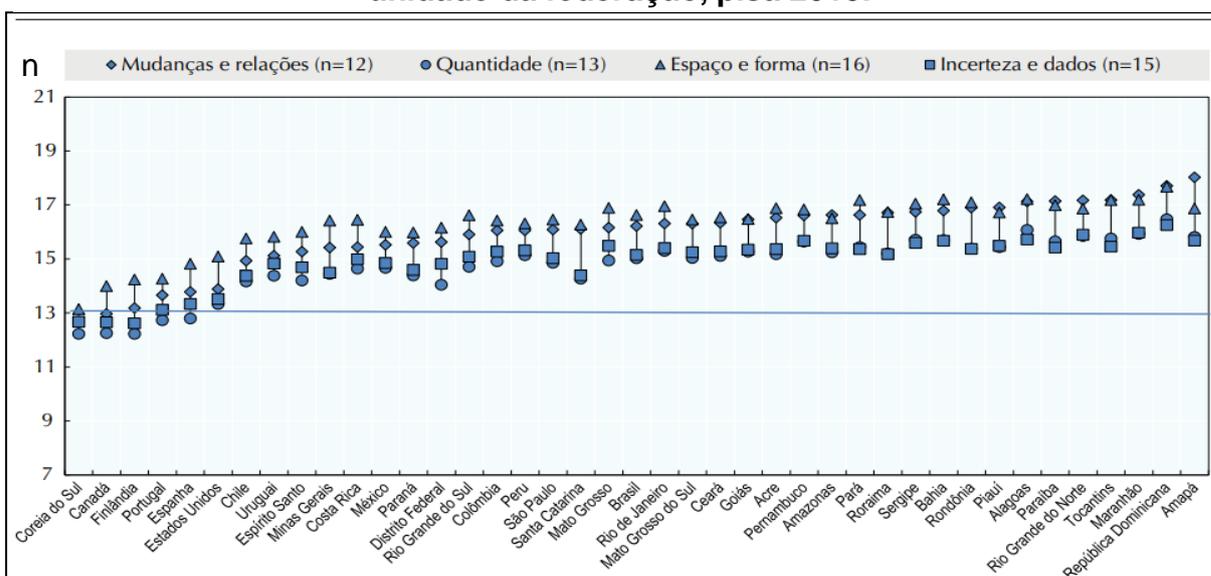
Fonte: OCDE, INEP

Alguns resultados do PISA 2018 foram publicados em dezembro de 2019 pela OCDE em um relatório preliminar. De acordo com o relatório, a pontuação média obtida pelos estudantes em Matemática foi de 384 pontos, já em Leitura e Ciências, os alunos brasileiros obtiveram as médias de 413 e 404 pontos, respectivamente. Em relação ao nível de proficiência em Matemática, 68,1% dos estudantes brasileiros que participaram do PISA 2018 se encontram abaixo do nível 2 (BRASIL, 2019).

Apesar do pequeno crescimento no número de pontos na edição de 2018 em relação aos resultados de 2015, o relatório alerta para uma estagnação do Brasil desde o ciclo avaliativo de 2009. Estes resultados apontam para a necessidade de investimento em inovações pedagógicas, associando a valorização e capacitação dos professores com novas metodologias de ensino que possibilitem o aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem.

Na Figura 2 é apresentado o nível de dificuldade nos itens de Matemática, segundo o conteúdo por país e unidade de federação de acordo com o PISA 2015. O índice Delta usado para identificar o nível de dificuldade relaciona o percentual de acerto e o nível de dificuldade dos itens. O valor de n varia entre 1 e 25, de forma que quanto maior o índice, mais difícil é o item para determinada população. O valor $n=13$ (referência) significa que o percentual de acerto do item é de 50%.

Figura 2 – Dificuldade dos itens de Matemática segundo conteúdo por país e unidade da federação, pisa 2015.



Nota-se que dentre as categorias a que os estudantes apresentaram menor nível de dificuldade foi “quantidade”, este item está relacionado a valor em dinheiro, razão e proporção e cálculos aritméticos. Para o Inep esses aspectos fazem parte da realidade mais próxima dos estudantes. A categoria “incerteza e dados” envolve a resolução de situações-problema utilizando estatística e probabilidade, sendo a segunda categoria com menor nível de dificuldade. Com o segundo maior nível de dificuldade está a categoria “mudanças e relações” que trata de fenômenos como transformação dos organismos à medida que crescem, fenômenos cíclicos (estações do ano, marés, etc.) e mudanças climáticas. Alguns processos tratados nessa categoria podem ser descritos por funções simples (linear, exponencial, periódica).

A categoria com o conteúdo “espaço e forma” foi a que os estudantes apresentaram maior nível de dificuldade, não só no Brasil como também na maioria dos países. Aborda-se nessa categoria as propriedades das figuras geométricas, como o perímetro ou a área, as características das figuras espaciais, etc. Ressalta-se que muitas dessas propriedades são encontradas em vários lugares no mundo físico e visual, porém *“a interação dinâmica com formas reais, bem como suas representações, mostrou-se, na avaliação do PISA 2015, como um conteúdo mais difícil e trabalhoso para os estudantes de 15 anos”* (BRASIL, 2016).

O cenário para qual aponta os resultados do PISA, no que tange os conteúdos geométricos, constatam a falta de prioridade e a omissão ao ensino de Geometria sinalizadas por muitos pesquisadores (LORENZATO, 1995; PAVANELLO, 2004; CARVALHO; FERREIRA, 2015).

Para Lorenzato (1995), o movimento da Matemática Moderna¹ contribuiu para o abandono do ensino da Geometria. Para o autor a proposta do movimento no não teve sucesso no Brasil, porém acabou com o modelo de ensino da Geometria que existia até então, marcado por demonstrações e uso do pensamento lógico-dedutivo. Esse fato criou então uma lacuna de práticas pedagógicas, estabelecendo um círculo vicioso: *“[...] a geração que não estudou Geometria não sabe como ensina-la”* (LORENZATO, 1995, p. 4).

No final da década de 1990, com princípios baseados na Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1996 (LDB), são criados documentos como os Parâmetros

¹ Movimento internacional que buscou reformular o ensino de Matemática com início na década de 1960. Esse movimento tinha como proposta um ensino baseado na rigorosidade dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra com excesso de abstrações (BRASIL, 1997).

Curriculares Nacionais e Diretrizes Curriculares Nacionais. Esses documentos visavam efetivar mudanças pretendidas pela referida lei, fornecendo orientações para a organização escolar e articulando conhecimentos disciplinares com competências gerais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são um conjunto de orientações teórico-metodológicas que estabelecem os princípios norteadores para propostas de ensino pautadas no desenvolvimento de competências e habilidades. Esses princípios preveem a exploração do contexto histórico-social e interdisciplinaridade, visando a promoção dos indivíduos para participação e transformação social.

Os PCN dão grande importância ao estudo da Geometria estando presente desde as séries iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio. Os conteúdos de Geometria aparecem nos PCN para o Ensino Fundamental dentro do bloco de conteúdo “espaço e forma”. Segundo o documento, os conceitos geométricos são importantes porque *“por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”* (BRASIL, 1998, p. 51). Além disso, seu estudo permite que o estudante seja estimulado a fazer observações, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades.

Para o desenvolvimento do pensamento geométrico sugere-se a exploração de propriedades e objetos de medidas para a resolução de problemas, porém não deve restringir-se a isso, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas, além de fazer conexões com outras áreas como a Arte e Artesanato.

Para o Ensino Médio a área de Matemática é apresentada juntamente com os conhecimentos de Biologia, Física, Química e das tecnologias a elas associadas. Descreve-se um conjunto de competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes nesse nível em cada categoria. A categoria representação e comunicação envolve, por exemplo, ler, interpretar e utilizar representações matemáticas. Já na categoria investigação e compreensão o aluno deve ser capaz de distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos, fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. Por fim, as competências ligadas à contextualização sociocultural que

objetivam o desenvolvimento da capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no mundo real, aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento, além de relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

Como novo marco para a Educação Básica no Brasil a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define “*o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica*” (BRASIL, 2017, p. 7). De caráter normativo e fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, o documento é orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Considerando o princípio constitucional que define a educação como direito de todos e dever do Estado e da família e amparada na LDB, a BNCC tem como finalidade orientar a construção dos currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum entre os estudantes brasileiros. Tal formação deve considerar as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes, assim como suas identidades linguísticas, étnicas e culturais (BRASIL, 2017).

Em relação aos PCN, a BNCC, no que tange o ensino de Matemática, aprofunda e amplia alguns dos objetivos, recomendando a abordagem de novos temas desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, como é o caso da Álgebra e Probabilidade e Estatística. Além disso, a BNCC mostra uma maior preocupação em aproximar os conteúdos das tecnologias digitais, reconhecendo a programação e robótica como campos cada vez mais presentes no convívio social e profissional.

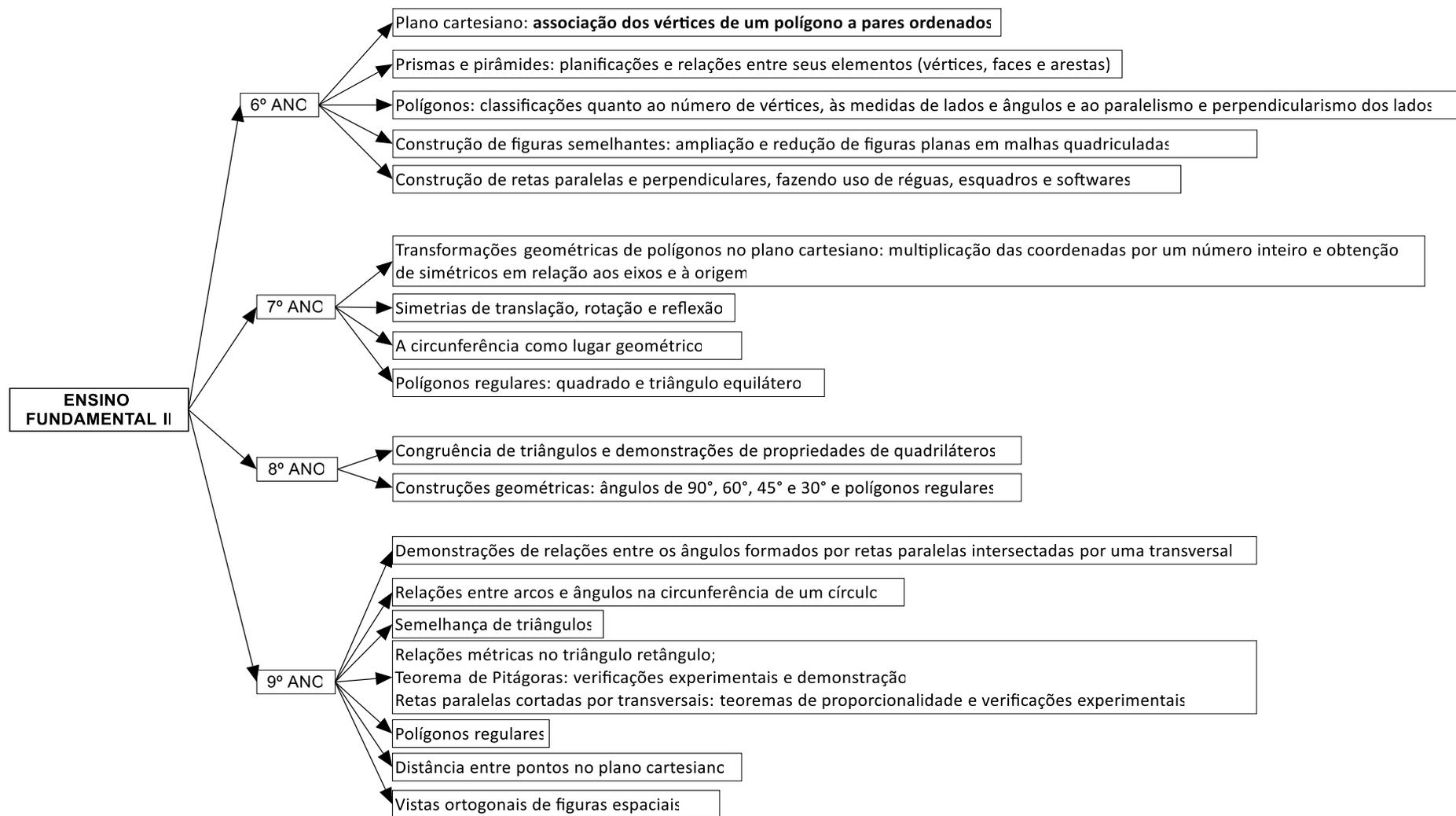
O novo documento também apresenta algumas mudanças no que se refere a terminologia. Os antigos eixos temáticos passam a se chamar unidades temáticas, os conteúdos são chamados de objetos de conhecimento e os objetivos são tratados como habilidades. Apresentada como uma das unidades temáticas, a Geometria deve estar presente em todas as séries da Educação Básica, desde as séries iniciais. As Figuras 3 e 4 apresentam os objetos de conhecimento relacionados à unidade temática Geometria, recomendados na BNCC para cada série do Ensino Fundamental.

Figura 3 – Objetos de conhecimento relacionados à geometria presentes na BNCC, Ensino Fundamental I.



Fonte: Brasil, 2017.

Figura 4 – Objetos de conhecimento relacionados à geometria presentes na BNCC, Ensino Fundamental II.



Fonte: Brasil, 2017.

De acordo com os esquemas apresentados nas Figuras 3 e 4, nota-se que um mesmo tema volta a ser tratado em diferentes momentos da trajetória escolar, mas com maior grau de profundidade e aumento da complexidade a cada ano escolar. Dessa forma a aprendizagem dos conceitos geométricos se dá de maneira gradual, pois envolve o desenvolvimento de habilidades de visualização e representação, bem como articulação com outras unidades temáticas como grandezas e medidas.

Percebe-se que, especialmente na segunda parte do Ensino Fundamental, há uma ênfase no trabalho com plano cartesiano e no estudo das transformações, que envolvem a identificação de elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança, fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo (BRASIL, 2017).

Em relação à Geometria, o documento sugere-se que seu estudo no Ensino Fundamental possibilite os estudantes resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. O ensino por meio da resolução de problemas, também previsto nos PCN, ganha maior enfoque com a BNCC, uma vez que a resolução de problemas aparece como uma das macro competências da área de Matemática.

Para o Ensino Médio a Base Nacional Comum Curricular propõe que o estudo da Matemática e suas tecnologias promova a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas nos níveis anteriores, com foco na construção de uma visão integrada da Matemática com a realidade e sua aplicação em diferentes contextos. A continuidade dos estudos deve ampliar o letramento matemático, ou seja,

[...] novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (BRASIL, 2017, p. 529).

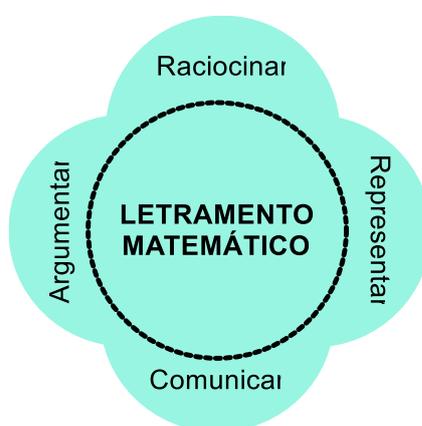
Desse modo, as ações devem considerar o que foi constituído pelos estudantes no Ensino Fundamental com vistas no desenvolvimento de competências específicas relacionadas a área de Matemática.

Para o letramento matemático os estudantes devem mobilizar competências e habilidades associadas ao raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, favorecendo, segundo a BNCC,

[...] o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2017, p. 266).

O esquema da Figura 5 representa como o letramento matemático depende da união das competências e habilidades.

Figura 5 – Esquema síntese das competências e habilidades necessárias para o letramento matemático.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Utilizando-se a linguagem dos conjuntos, pode-se pensar que o letramento matemático é fruto da mobilização dos processos de raciocínio, representação, comunicação e argumentação, utilizando para isso elementos matemáticos e tecnológicos. As competências e habilidades que deles derivam estão relacionadas a processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas.

No Ensino Médio os diferentes campos da Matemática, tratados no Ensino Fundamental como unidades temáticas, são reorganizados em pares de ideias fundamentais visando promover a integração entre os campos de forma mais consistente. Os pares são: variação e constância, certeza e incerteza, movimento e posição e por fim relações e inter-relações.

Com esses pares de ideias fundamentais busca-se produzir articulações entre os vários campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística,

Grandezas e Medidas – possibilitando assim uma compreensão mais ampla dos elementos matemáticos e como eles se articulam para análise, descrição e solução de situações problemas.

A articulação entre conteúdos de Geometria que deve ser feita pelos estudantes é descrita por uma teoria proposta pelo casal Dina e Peter Van Hiele na década de 1950. A referida teoria propõe uma progressão para o ensino de Geometria, estabelecendo cinco diferentes níveis de pensamentos.

De acordo com Villiers (2010), os quatro primeiros níveis são os mais relevantes para o Ensino Médio. No primeiro nível (Visualização ou reconhecimento) os estudantes conseguem fazer a identificação ou reconhecem as figuras visualmente, porém não identificam suas propriedades. No nível dois (Análise) os estudantes são capazes de analisar propriedades das figuras e utilizar terminologia mais técnica. Além da aquisição de linguagem, os estudantes passam a reconhecer novas relações e os conceitos existentes são refinados. Já no terceiro nível (Ordenação ou classificação) são efetuadas relações entre figuras como a inclusão de classes, além de curtas deduções e ordenação lógica. O estudante que alcança o quarto nível (Dedução) é capaz de desenvolver sequências longas de enunciados, entende a significância das deduções e o papel das provas, teoremas e axiomas.

Para o casal Van Hiele, o insucesso do ensino de Geometria estava ligado principalmente a uma discordância entre o nível em que os estudantes estavam e o nível em que lhes eram apresentados os conteúdos (VILLIERS, 2010).

Em se tratando de propostas para o ensino de Geometria Espacial no nível básico muitos trabalhos vêm sendo publicados nas últimas décadas. Na revisão de literatura realizada por Sena e Dorneles (2013), os autores sinalizaram que houve um crescimento no número de propostas que buscam auxílio em ferramentas de informática, associando o uso de programas desenvolvidos com essa finalidade como o *Poly*, o *Cabri* e o *Geogebra*, e outros como o *Google Sketchup* criado para uso na Arquitetura teve seu uso incorporado pela educação (MACHADO; GIRAFFA, 2011). De acordo com as propostas, a utilização das tecnologias possibilita a criação e manipulação de elementos geométricos e estudo de suas propriedades, o que favorece a compreensão dos conceitos e relações.

O uso de recursos virtuais como programas de visualização e manipulação de objetos geométricos tem grandes contribuições e desempenham um papel

importante no ensino de Geometria, especialmente em casos onde os materiais reais não são disponíveis. Como discutido por Rocha (2014), o uso de recursos experimentais ou computacionais são duas tendências de abordagens didático-pedagógicas para o ensino de Geometria no Brasil. Atividades que proporcionam o contato e a manipulação de formas variadas de representação espacial, planificação e desenho, favorecem o desenvolvimento de habilidades ligadas a percepção e à representação espacial, reconhecimento e classificação de objetos, além de estimularem a observação de diferenças, semelhanças e regularidades de figuras e sólidos geométricos (ROCHA, 2014).

Uma outra abordagem possível para o ensino de Matemática é obtida por meio da aproximação com a leitura e Literatura. Como argumenta Roedel (2016), por meio da história é possível envolver o estudante de forma a estimular a interpretação de modo que ele possa compreender o mundo, a realidade ao seu redor, aquela onde as capacidades são ampliadas e a percepção sobre a vida olhada de um ponto de vista diferente.

Dentre os aspectos positivos que podem ser obtidos com a utilização de recursos literários estão o aumento da interação entre os estudantes e a promoção do uso da imaginação, uma vez que por meio do contexto apresentado no livro o estudante é convidado pensar como um habitante de um universo novo e levado a desenvolver raciocínios e fazer projeções.

Com este trabalho objetivamos promover o desenvolvimento da visão espacial dos estudantes a partir do estudo progressivo das dimensões espaciais. Como meio motivador para o estudo, além do contexto apresentado no livro Planolândia, serão abordados problemas de Astronomia, como a medida de distâncias das estrelas e a modificação do espaço devido um campo gravitacional intenso. Associado a isto, busca-se fazer uso de aparatos com experimentos de manipulação e visualização, numa tentativa de envolver os estudantes com atividades práticas, apresentando uma possível abordagem para enfrentamento do problema do desinteresse do aluno em aprender Geometria e com isso promover aprendizagens, pois acreditamos que a motivação é fator fundamental para a produção do conhecimento.

3 PLANOLÂNDIA E SUAS RELAÇÕES COM A GEOMETRIA E ASTRONOMIA

Este capítulo se dedica a apresentar a obra Planolândia: um romance de muitas dimensões e evidenciar algumas relações que podem ser feitas com o ensino de conteúdos de Geometria e Astronomia, além de aspectos sociais. A obra possui muitos elementos de diversas naturezas, como científica, filosóficas e até religiosas, podendo-se utilizar novos olhares para se obter outras associações. Portanto, nesse trabalho não se pretende esgotar as possibilidades de relações e discussões com esta rica obra.

3.1 PLANOLÂNDIA

Nesta seção será feita uma apresentação da obra Planolândia, utilizada como pilar para o desenvolvimento deste trabalho. Sua escolha se justifica pela capacidade de promover com sua trama o uso da imaginação e por relacionar elementos de diversas áreas por meio de uma leitura empolgante e divertida.

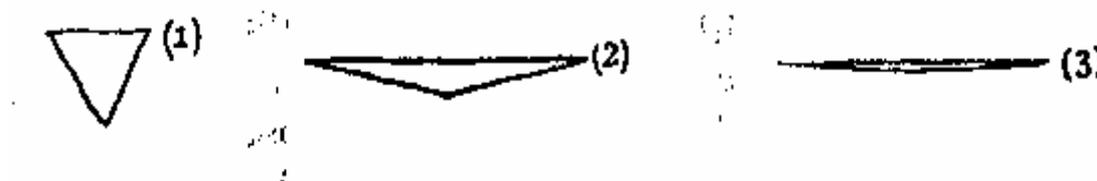
O livro de título original “Flatland: A Romance of Many Dimensions”, foi escrito pelo inglês Edwin Abbott em 1884. A edição brasileira com o título: “Planolândia: um romance de muitas dimensões” só foi feita mais de cem anos depois, como cita Alessandro Greco no prefácio à edição brasileira. A obra é um romance no qual o autor aparece incorporado em um personagem que vive em um mundo de duas dimensões – Planolândia – e faz uso das regras do referido mundo para satirizar os muitos preconceitos existentes na sociedade Vitoriana.

A obra é dividida em duas partes. Na primeira delas o autor apresenta o mundo plano, no qual todos os habitantes e objetos são formas geométricas bidimensionais e são diferentes, essencialmente, pelo seu número de lados. O autor, incorporado ao personagem do quadrado, descreve detalhadamente o clima, as casas, como é feita a localização e os métodos de reconhecimento de uns aos outros.

Para entendermos a natureza de Planolândia o autor nos leva a um exercício. Imaginando uma figura recortada em papel ultrafino e posta sobre uma mesa, abaixamos a visão até que os olhos estejam próximos a borda da mesa. A Figura 6 (1) mostra como seria nossa visão antes de abaixarmos, na condição de habitantes do mundo tridimensional veríamos todos os seus lados e as regiões de

fora e dentro da figura. Com o movimento de descida veríamos a figura mudar de forma e se aproximar cada vez mais de uma linha reta, como representa a os pontos (2) e (3) da Figura 6.

Figura 6 – Visão de um habitante de Planolândia.



Fonte: Abbott (2002).

É dessa forma que um habitante de Planolândia percebe o mundo. Além disso seus movimentos são restritos as direções: norte-sul e leste-oeste, não existe para cima e para baixo. Os habitantes de Planolândia e suas respectivas classes sociais são descritas a partir do número de lados e à perfeição de suas formas. Na classe mais baixa estão as mulheres, estas são apenas linhas retas e possuem capacidade intelectual bastante limitada. Por possuírem tal formato, são obrigadas entoar um canto de paz sempre que se movimentarem, reduzindo assim a possibilidade perfurar um outro ser que possa estar distraído.

Os soldados e os trabalhadores de classes mais baixas são triângulos isósceles que possuem um dos ângulos muito agudo, sendo também muito perigosos. A classe média por sua vez é composta pelos triângulos equiláteros. Figuras de quatro ou cinco lados (quadrados ou pentágonos) pertencem a classe dos profissionais e cavalheiros.

Seguindo dessa maneira, quanto mais ângulos um cidadão de Planolândia possuir, tanto mais alta será a classe à qual pertence, até receber o título de polígono. Finalmente, ao possuir um número muito grande de lados, de forma que já não se pode distinguir de um círculo, inclui-se na mais alta classe, a ordem circular.

O reconhecimento pela visão em Planolândia é uma habilidade melhor executada pelas classes mais altas, polígonos e círculos. Entre as casses mais baixas o método ensinado as crianças e praticado é o toque. A partir do tato e de muito treinamento o reconhecimento dos ângulos de outra figura permite identificar a qual classe pertence.

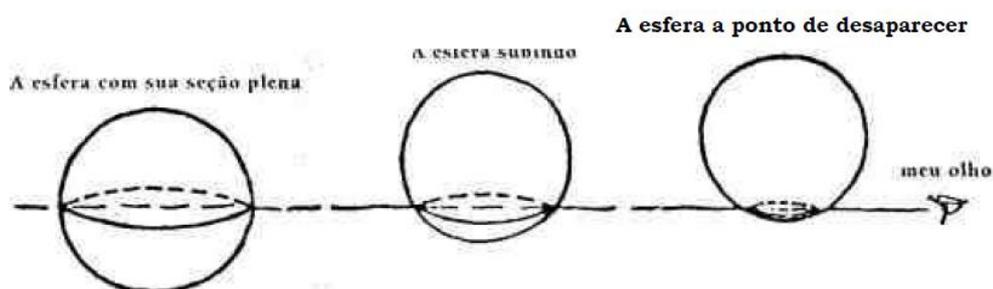
O autor, ao atribuir à mulher a mais simples das formas geométricas existentes em Planolândia, satiriza como a figura feminina era vista na sociedade Vitoriana. Percebe-se que, historicamente, a mulher foi vista durante muito tempo apenas como genitora do lar, incapaz de contribuir socialmente com seu intelecto.

Em Planolândia a progressão de uma classe para outra obedece uma lei da natureza a qual determina que uma criança do sexo masculino sempre terá um lado a mais que seu pai, elevando a cada geração uma categoria entre as classes. A crítica ao preconceito entre as classes sociais é evidenciada pelo autor no momento que a referida lei só é válida para as classes mais altas, dessa forma um filho de um triângulo isóscele também será um isóscele, não podendo assim um descendente das classes mais baixas atingir às classes mais nobres.

A segunda parte do livro, denominada de “Outros Mundos”, tem início com a descrição de uma visão que o personagem – Quadrado – tem do mundo unidimensional. Em Linhalândia, como chamou o autor, os personagens são segmentos de retas e pontos que podem se deslocar, com restrições de vizinhança, apenas em uma direção. Esse último aspecto é motivo de um fervoroso debate do personagem com um habitante unidimensional, ao tentar convencê-lo da existência de outra direção, além da já conhecida.

Depois da visão, no ápice de suas experiências, o habitante bidimensional recebe a visita de um forasteiro da terceira dimensão, uma esfera que tenta convencê-lo da existência de uma outra direção espacial. Preso em seu plano, o personagem é surpreendido por um ponto que aparece em sua frente e aumenta de tamanho, formando o mais perfeito círculo. A Figura 7, retirada do livro, representa a visão do personagem ao receber a visita.

Figura 7 – Visão do personagem quadrado durante a visita da esfera.



Fonte: Abbott (2002).

Percebe-se que a esfera é vista pelo personagem apenas parcialmente, um círculo que aumenta e diminui de tamanho na medida que a esfera se movimenta perpendicularmente ao plano.

Assim como aconteceu com o habitante de Lilhalândia, a dificuldade em pensar em dimensões superiores também é experimentada pelo personagem. Para convencê-lo da existência da terceira dimensão a esfera recorre à experiência no mundo tridimensional, levando-o para o espaço. Ao tomar consciência é preenchido pelo desejo de conhecer cada vez mais, chegando a levantar hipóteses sobre a quarta, quinta e sexta dimensão.

Retornando à Planolândia, tenta explicar para seus conterrâneos sobre a existência da terceira dimensão. Novamente vem à tona a limitação de um ser que vive em determinada dimensão conceber uma dimensão superior, pois teria que apontar para uma direção totalmente nova. A frustração toma conta do personagem principal, assim é condenado a viver preso ao seu espaço e a suas ideias.

3.2 RELAÇÕES COM GEOMETRIA E ASTRONOMIA

Na obra o autor se utiliza, essencialmente, elementos geométricos e matemáticos, desde a concepção de um universo plano e a forma de seus habitantes até a inferência da quarta, quinta e sexta dimensão. Entende-se que a noção de espacialidade é essencial para uma melhor compreensão do universo que nos cerca. Diante disso, essa seção busca o estabelecimento de relações com a Geometria e a Astronomia, focalizando os aspectos ligados à percepção e entendimento do espaço.

Imagine que diante de você existe uma figura geométrica plana recortada de um papel ultrafino. Quando esta é observada por um dos seus lados apenas uma linha pode ser vista. Antes de ser informado sobre qual polígono está a sua frente, como seria possível inferir sobre ele algumas de suas características? Este é um problema enfrentado pelos habitantes de Planolândia!

O mundo bidimensional imaginado por Edwin Abbott nos coloca frente a um grande desafio que envolve o reconhecimento do espaço e dos elementos presentes

nele sem que tenhamos informações visuais suficientemente precisas. Esse aspecto tratado na obra pode ser relacionado ao ensino de Geometria.

Extraímos informações do mundo por meio dos sentidos, sendo a visão, dentre os demais sentidos, o que nos permite obter o maior número de informações sobre o espaço. Mesmo sendo essencial, o nosso sistema visual é limitado e necessita que haja interações entre o indivíduo e espaço para um completo conhecimento acerca do mesmo.

Apesar dessa interação acontecer a todo instante, é preciso que em algum momento da vida escolar o indivíduo seja apresentado sobre como o conhecimento acerca do espaço é construído e como ocorre sua descrição. Do ponto de vista das habilidades a serem desenvolvidas, é importante o reconhecimento de representações em suas formas bi e tridimensionais, além de avaliar uma situação mudando-se o referencial.

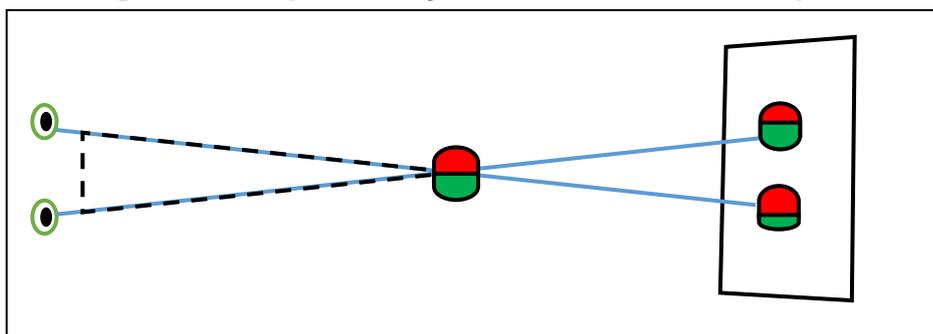
A todo momento estamos interagindo com mundo a nossa volta. Fazemos observações, deslocamentos, manipulamos objetos, estudamos fenômenos, entre outras coisas. No entanto, geralmente não refletimos sobre como ocorre a percepção do espaço dos objetos contidos nele.

Quando se fala em espaço geralmente pensamos em algo muito longe, onde estão localizados o Sol, a Lua e as estrelas. Essa é a noção de espaço sideral. Pode-se pensar que o espaço está em toda parte, sendo muitas vezes chamado de vazio, é nele que todo fenômeno acontece e que todos objetos e pessoas estão inseridos.

Estimar bem a distância de um objeto ou inferir sua forma envolve o conhecimento do espaço. Para uma pessoa comum, que possui o pleno funcionamento do mecanismo da visão, esse conhecimento depende de habilidades que combinam aparelhos sensores, cérebro e experiências anteriores (Leite 2006).

Ao segurar um objeto frente ao rosto e piscar alternadamente os olhos percebe-se um deslocamento aparente do objeto face a uma paisagem de fundo. Tal fato ocorre devido a separação existente entre os olhos (em média 65 milímetros, Siscoutto et al, 2004), assim cada olho captura a imagem de uma perspectiva, como mostra a Figura 8, resultando em formação de imagens ligeiramente diferentes em cada retina. Essas imagens são processadas pelo cérebro gerando a chamada visão estereoscópica.

Figura 8 – Representação da visão estereoscópica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A visão estereoscópica é responsável por proporcionar melhor avaliação da distância de um objeto estando assim relacionada à percepção da profundidade ou terceira dimensão.

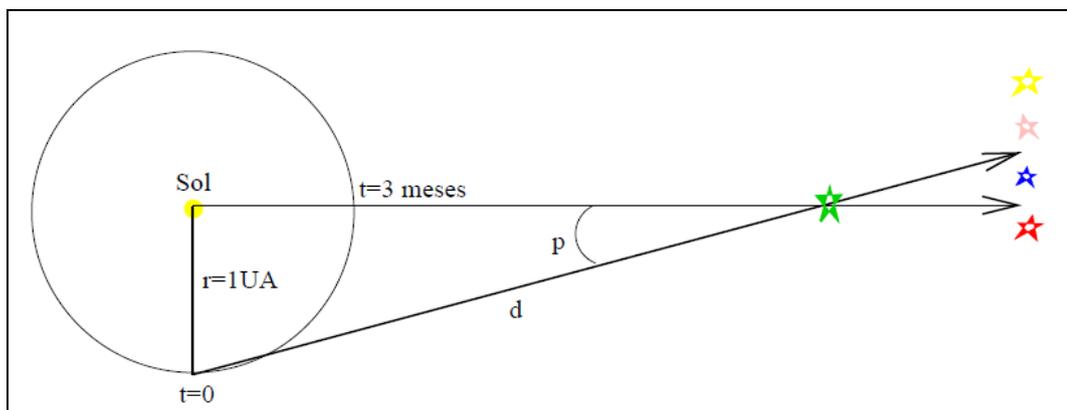
O deslocamento aparente do objeto, também chamado de paralaxe, depende da distância que se encontra do observador, de forma que quanto maior for a distância menor será o deslocamento aparente. De fato, quando nos deslocamos em uma rodovia, é mais difícil notar movimento aparente para árvores mais distantes.

Esse fato mostra que há um limite para a percepção do movimento, uma vez que para objetos muito distantes não será possível perceber deslocamentos e conseqüentemente avaliar sua distância. Para se estimar a distância de planetas e estrelas por meio desse efeito por exemplo, algumas técnicas devem ser empregadas.

Quanto maior a separação entre os pontos de observação maior será a distância que poderá ser medida. Assim é possível utilizar da rotação da Terra para calcular a distância de planetas ou ainda utilizar sua órbita para calcular a distância de estrelas próximas. Essas técnicas são chamadas de paralaxe geocêntrica e heliocêntrica, respectivamente.

Na paralaxe heliocêntrica utiliza-se a órbita terrestre para observação dois momentos distintos, como mostra a Figura 9. Dessa forma o triângulo formado pelas linhas que passam pelos dois pontos da órbita da Terra (nos quais são feitas as observações) e o astro que se deseja estabelecer a distância tem um lado de 1 UA que equivale à distância média entre a Terra e o Sol, e forma um ângulo p .

Figura 9 – Paralaxe Heliocêntrica



Fonte: Kepler e Saraiva (2015).

Ao comparar as observações nos dois pontos percebe-se o deslocamento aparente do astro. O valor do deslocamento é um ângulo geralmente medido em segundos de arco ($''$). Para ângulos pequenos o valor da distância é dado obtendo-se a tangente do ângulo p . Para pequenos ângulos pode-se considerar $\tan(p) \sim p$, logo:

$$\text{Distância da estrela} = 1\text{UA}/p,$$

sendo p expresso em radianos ($1 \text{ rad} = 206265''$). Para a paralaxe de 1 segundo de arco tem-se que o objeto está a uma distância de 206.265 UA que equivale a definição de 1 parsec (pc). Essa técnica pode ser usada para determinar a paralaxe de estrelas de até 100 pc distância, acima disso é preciso o emprego de outras técnicas, como a paralaxe espectroscópica ou diagrama cor-magnitude (PICAZZIO et al., 2011).

Mesmo podendo medir a paralaxe de uma estrela a partir da observação em dois pontos diferentes, a noção de que esta não está tão distante quanto as demais estrelas não é direta, pois o que é observado é o deslocamento em um plano. A espacialidade do céu, portanto, não é uma noção obtida diretamente das observações, devendo a mesma ser construída.

Ao discutir a percepção da profundidade ou terceira dimensão Leite (2006) argumenta que, além de depender da visão estereoscópica, a percepção tridimensional do espaço também envolve as experiências vivenciadas anteriormente, inclusive informações táteis.

Nesse sentido, autores como Piaget e Inhelder (1993), Thillier (1994), Robilotta (1985) e Carvajal (1991) citados por Leite (2006), interpretam a espacialidade como uma construção cultural que envolve fatores psicológicos, fisiológicos e mentais.

No nosso cotidiano identificar num objeto a presença das três dimensões, ou seja sua largura, altura e profundidade é natural devido a observação contínua e de vários ângulos dos objetos. Porém, essa tarefa torna-se complexa para objetos de grandes dimensões, distantes ou cujos movimentos temporais são grandes. Diante disso, pensemos em uma relação que pode ser estabelecida entre Planolândia e Astronomia: devido as distâncias envolvidas, percebemos no céu constelações e demais astros como elementos planos.

A observação do céu e dos movimentos de seus astros teve papel crucial para o desenvolvimento da humanidade. A percepção da regularidade do movimento aparente do Sol e da Lua levou ao estabelecimento de ciclos como estações do ano e fases da Lua que permitiram as civilizações antigas² contar melhor o tempo e criar calendários, possibilitando o domínio da agricultura caça e pesca. Além disso, o conhecimento dos movimentos dos astros contribuiu para que o homem pudesse navegar, fornecendo a orientação necessária (KEPLER; SARAIVA, 2015).

Os conhecimentos dos povos antigos e a busca para o entendimento dos fenômenos naturais permitiram os gregos dá grandes contribuições na Astronomia. A crença de que era possível descrever qualquer fenômeno por meio da matemática permitiu a criação das primeiras ideias para elaboração do conceito de esfera celeste (KEPLER; SARAIVA, 2015).

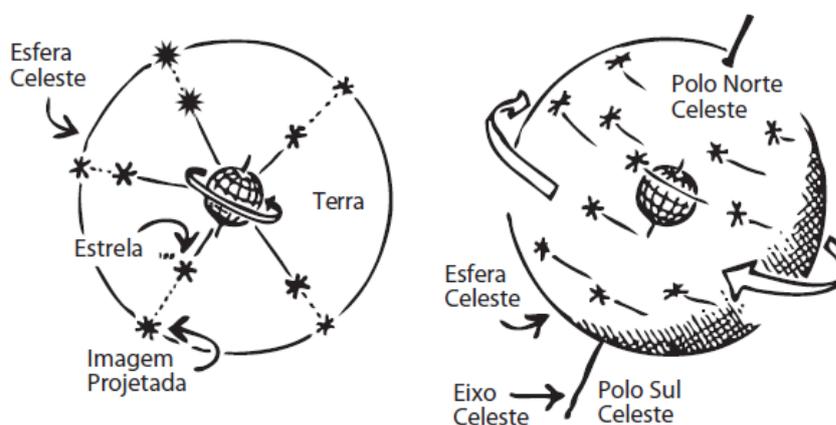
Diariamente as estrelas possuem um movimento aparente que equivale a uma volta. Fazendo se a projeção de todas as estrelas na superfície de uma esfera de raio unitário que gira sobre num eixo que é uma prolongação do eixo terrestre e com a Terra no centro, obtém-se a chamada esfera celeste (Figura 10).

Nessa superfície todos os objetos vistos no céu e seus movimentos aparentes e relativos podem ser representados. Porém as informações tanto dos movimentos quanto da forma de alguns astros são apenas bidimensionais. Isso se

² Os registros mais antigos de observações do céu para obter conhecimentos práticos datam de aproximadamente 3000 a.C. e se devem aos chineses, babilônios, assírios e egípcios.

dá devido as grandes distâncias envolvidas, que impede a percepção da profundidade.

Figura 10 – Esfera Celeste



Fonte: Picazzio et al. (2011).

Como representado na Figura 10, o sentido de rotação da Terra é de oeste para leste. Imaginando-se a Terra fixa, a esfera celeste e os astros devem parecer girar de leste para oeste. A localização de cada astro é dada pela medida angular em relação a outro astro ou a linhas imaginárias na esfera celeste.

Na esfera celeste a projeção das estrelas permite a criação de desenhos ou figuras que nos leva ao conceito de constelação. Portanto, uma constelação é o agrupamento aparente das estrelas em uma dada região da esfera celeste. Atualmente são reconhecidas pela União Astronômica Internacional (IAU) 88 constelações oficiais, sendo que cada estrela faz parte de uma constelação (KEPLER; SARAIVA, 2015).

A observação direta do céu nos fornece uma primeira impressão de que as estrelas e outros objetos como planetas estão situados à mesma distância da Terra e próximos uns dos outros. Essa noção de que há uma esfera celeste na qual as estrelas estão fixas existe desde os primeiros modelos para Universo propostos pelos gregos e esteve presente na maioria dos demais modelos cosmológicos até a revolução copernicana. As interpretações para os movimentos dos astros partiam então da pressuposição de que a Terra não se movia no espaço.

Devido as grandes distâncias geralmente envolvidas, o sentido da visão captura informações imprecisas. Astros como estrelas e planetas são vistos como pontos, já no caso da Lua e do Sol são percebidos apenas como figuras planas, em

forma de discos. As constelações são vistas apenas como um agrupamento de estrelas em uma região plana do céu.

Apesar de percebermos diferentes brilhos para as estrelas do céu noturno, não somos capazes de fazer diferenciações quanto as suas distâncias da Terra. Além disso, o fato de não observarmos movimento relativo a partir da visão contribui para uma concepção plana e distorcida do céu.

Estudos realizados por Leite e Hosoume (2009) mostraram que alunos e professores geralmente possuem uma visão distorcida do céu e explicam os fenômenos baseados no senso comum e na percepção imediata destes. Um aspecto a ser observado é que a noção de astros fixos em uma esfera revela uma concepção geocêntrica do universo, além de localizar outras estrelas como parte do Sistema Solar.

Esses resultados revelam que é preciso um olhar especial para a formação dos professores visto que muitos dos erros presentes nos livros didáticos e em imagens bidimensionais contribuem e reforçam a concepção plana do céu.

O caráter bidimensional das constelações repousa no fato das estrelas estarem a grandes distâncias se comparados com o raio da Terra, assim são vistas sempre por um único ângulo. Reconhecer que as estrelas de uma constelação estão a diferentes distâncias pode ser um ponto de partida para a ampliação da percepção da terceira dimensão espacial.

Em uma breve pesquisa na literatura encontramos diversos trabalhos (RENNER, 2018; LONGHINI, 2009; SILVA, RIBAS; FREITAS, 2008) que apresentam montagens de constelações em modelos tridimensionais feitos com materiais simples que podem ser reproduzidos por professores e estudantes. Atividades dessa natureza envolvem a utilização de um terceiro eixo espacial e discussões a respeito das unidades de medida de distâncias, contribuindo desenvolvimento da noção espacial.

A interpretação para a natureza do espaço é um aspecto importante a ser destacado nas teorias da Física, especialmente quando se busca explicar o movimento dos corpos, pois para isso é fundamental o estabelecimento de sistemas de referências.

Para a mecânica newtoniana o espaço é descrito predominantemente como absoluto, ou seja, os fenômenos e os elementos da natureza como massa e energia

não o modificam. Esse espaço tem caráter estrutural permitindo a descrição dos movimentos segundo as leis de Newton e sua medida está dissociada das medidas de tempo.

Com a interpretação dada pela Teoria da Relatividade Restrita o espaço e o tempo passam a ser entendidos como algo indissociável, assim as descrições dos movimentos reúnem as três coordenadas de espaço e o tempo, dando origem ao espaço-tempo quadridimensional. As medidas de espaço e tempo passam a depender da velocidade, ocorrendo dilatações no tempo ou contrações no espaço quando os referenciais se movem com velocidades comparáveis com a da luz.

Na Teoria da Relatividade Geral (TRG), Einstein parte da impossibilidade de diferenciar os efeitos da aceleração dentro de um sistema fechado daquele experimentado em um campo gravitacional. Com isso descreve a gravitação como a ação das massas nas propriedades do espaço e do tempo, ou seja, apresenta um espaço no qual a presença de matéria ou energia modificam sua forma (KEPLER; SARAIVA, 2015).

Nessa nova concepção de espaço a menor distância entre dois pontos não é mais uma reta, como no espaço euclidiano, e sim uma curva chamada de geodésica que segue o espaço. Dessa forma, os deslocamentos dos corpos nas geodésicas são determinados pela presença de matéria e energia no espaço.

Com a nova interpretação, o movimento dos corpos no espaço não é determinado pela atração entre duas massas, mas pelo próprio espaço que se encurva, a luz também segue uma trajetória que pode ser encurvada pela presença de objetos de grande massa, chamados de fontes gravitacionais.

Esses efeitos foram verificados experimentalmente durante um eclipse solar em 1919 em observações realizadas por astrônomos da Grã-Bretanha na ilha africana de Príncipe e na cidade de Sobral, no Brasil. As equipes foram capazes de medir o desvio da luz proveniente de uma estrela situada atrás do Sol, obtendo grandes concordâncias com os valores indicados pela Teoria Geral da Relatividade (PORTO; PORTO, 2008).

O universo para os habitantes de Planolândia é bidimensional uma vez que, presos no plano, possuem apenas movimentos para frente e para trás, para direita e para a esquerda, não existe em cima e em baixo para um planolandês. Se considerarmos que as dimensões de universo em Planolândia são muito maiores

que as dimensões de seus habitantes podemos supor que tal universo pode encurvar-se numa terceira dimensão, o que seria imperceptível localmente.

Como analogia imaginemos uma malha esticada de forma a permanecer plana. Figuras desenhadas nessa malha seriam como os habitantes de Planolândia, estes poderiam se mover livremente, porém sem sair da malha. Nessa situação a medida da distância entre dois pontos é dada pelo comprimento da reta que os une.

Sem o conhecimento dos seus habitantes o universo bidimensional é encurvado em uma terceira dimensão espacial - Isso pode ser feito colocando-se uma massa sobre a malha. Localmente, para um habitante de Planolândia o universo ainda parecerá plano, porém a medida entre os dois pontos será maior, pois o espaço foi deformado pela massa. Com isso pode se discutir como o espaço é modificado por um buraco negro, por exemplo.

Ainda utilizando a analogia, podemos imaginar que a malha pode ser encurvada para o formato de uma esfera. Um habitante que caminhe por muito tempo em linha reta chegará em algum momento ao mesmo ponto de partida. Mesmo não sabendo que seu universo aparentemente plano é curvo em uma esfera enorme, poderá deduzir a existência de uma terceira dimensão, mesmo sem poder apontar para ela.

A situação descrita acima pode ser ampliada em uma dimensão a fim de se levantar um questionamento para os estudantes sobre a possibilidade de existência de uma quarta dimensão espacial ou mesmo de uma viagem interdimensional por um buraco de minhoca.

No episódio da visão do mundo unidimensional o som é utilizado pelos habitantes de Linhalândia para a comunicação, já que não podem deixar sua vizinhança. Portanto, a partir da emissão e recepção de ondas é possível obter informações das características dos habitantes como localização, tamanho e movimento. Com esse episódio é possível estabelecer relações com a forma como obtemos informações sobre a expansão do Universo.

Apesar de Planolândia tratar de dimensões espaciais, sob o ponto de vista de expansão do Universo, além das três dimensões espaciais, deve ser considerada uma quarta dimensão, que é o tempo. Isso pode ser vislumbrado por meio da Lei de Hubble.

Depois de utilizar um telescópio de 2,5 metros de diâmetro do Monte Wilson (Califórnia) para enxergar e medir as estrelas individuais na galáxia de Andrômeda (Figura 11), Edwin Hubble, juntamente com seu colaborador Milton Humason, concluiu em 1923 que a Via-Láctea não é a única galáxia do Universo. Mais tarde, em 1929, Hubble publicou um artigo no qual relacionou a distância e a velocidade radial entre as nebulosas extra-galácticas, mostrando que o universo está se expandindo, o que mudou a história da compreensão do Universo (KEPLER; SARAIVA, 2015).

Figura 11 – Galáxia de Andrômeda.

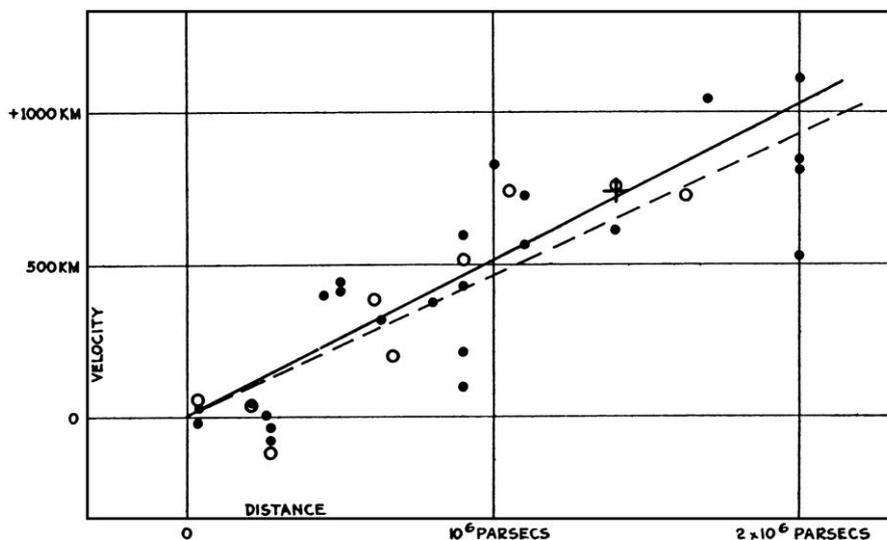


Fonte: ESA / Hubble³.
Créditos: R. Gendler (2002).

A Figura 12 mostra o diagrama do estudo de 24 galáxias realizado por Hubble. Além de mostrar que a maior parte das galáxias estavam se afastando, o diagrama revela que esse afastamento ocorre mais rapidamente em proporção à sua distância. Portanto, a Lei de Hubble afirma que quanto maior a distância de uma galáxia maior é sua velocidade de afastamento e estabelece uma constante de proporcionalidade conhecida como constante de Hubble. Além de Hubble, outros teóricos como Georges-Henri Édouard Lemaître (1894-1966) e Milton La Salle Humason (1891-1972) também se dedicaram nesse período ao estudo da expansão do Universo.

³ Disponível em: <https://www.spacetelescope.org/images/heic0512d/>

Figura 12 – Diagrama do Hubble.

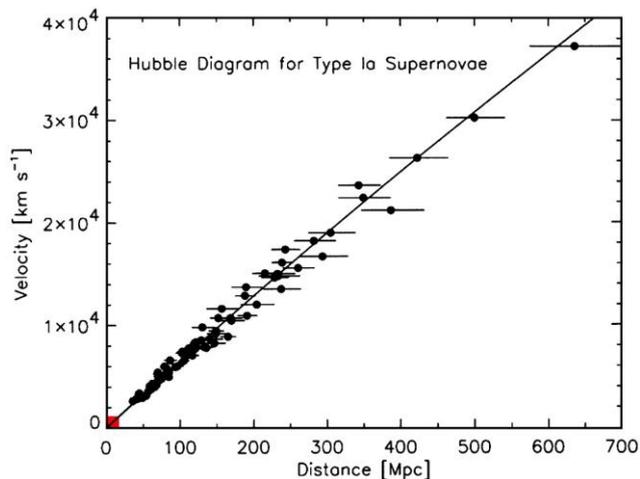


Fonte: Kirshner (2004).

Com o passar dos anos as medidas para a constante de Hubble foram sendo refinadas a partir da medida de redshift – deslocamento dos espectros para maiores comprimentos de ondas – de objetos cada vez mais distantes, ampliando assim a compreensão de idade e tamanho do Universo observável. A Figura 13 mostra o diagrama de Hubble com dados modernos.

Com novas técnicas de observação obtém-se um aumento da distância observada de 2Mpc do diagrama original do Hubble de 1929 para aproximadamente 700 Mpc. A pequena região vermelha no canto inferior esquerdo da Figura 13 refere-se ao intervalo do primeiro diagrama feito por Hubble.

Figura 13 – Diagrama do Hubble com dados modernos.

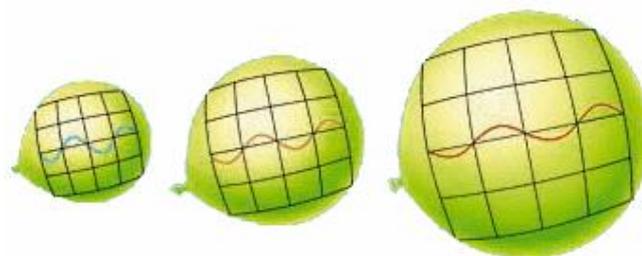


Fonte: Kirshner (2004).

A expansão do Universo ocorre em todas as direções e sem um lugar privilegiado, de modo que qualquer observador em qualquer posição deve observar a expansão. Assim, não se deve pensar que essa expansão é devido ao movimento próprio das galáxias, uma vez que é o espaço que contém as galáxias que se expande (SARAIVA, MULLER; KEPLER, 2014).

Quando o Universo se expande o tamanho das galáxias, estrelas e outros objetos não é afetado devido a ação gravitacional, já com a luz o mesmo não ocorre. Quando uma onda de luz viaja no espaço e este se expande o comprimento de onda é esticado, causando assim um desvio para o vermelho ou redshift. A Figura 14 ilustra essa mudança.

Figura 14 – Representação da expansão do espaço.



Fonte: IAG / USP⁴.

A respeito da dimensão do Universo, a história mostra que depende das informações que a humanidade tem acesso. Como a velocidade da Luz possui valor finito e leva um tempo para se propagar no espaço, o que observamos refere-se a um estágio passado do nosso Universo. Portanto, assim como acontece em Planolândia, o tamanho do Universo é limitado às nossas percepções. O avanço tecnológico permitiu a construção de telescópios cada vez mais potentes e o desenvolvimento de novas técnicas de obtenção e análise de dados. Com isso, além das galáxias, outros objetos e fenômenos passam a ser observados, como cefeidas e supernovas, que permitiram maior precisão dos dados.

A tradução literal do título do livro pode remeter a uma discussão sobre a forma da Terra. Nos últimos anos esse tema tem se tornado motivo de interesse com

⁴ Imagem obtida no glossário do curso de Introdução à Cosmologia oferecido pelo Departamento de Astronomia do Instituto de Astronomia, Geofísicas e Ciências Atmosféricas (IAG/USP). Disponível em: <http://www.astro.iag.usp.br/~ronaldo/intrcosm/Glossario/Redshift.html>.

o retorno da concepção insensata de uma Terra Plana. Difundida especialmente nas mídias sociais, essa concepção ignora dezenas de séculos de produção de conhecimento teórico e experimental, além de desconsiderar aplicações tecnológicas amplamente utilizada pela sociedade.

O combate a esse tipo de concepção envolve a discussão das evidências da esfericidade da Terra, com a abordagem das soluções encontradas para determinação da circunferência da Terra desde Eratóstenes (247 a.C. - 194 a.C.), as grandes navegações e a apresentação do funcionamento de tecnologias baseadas no modelo global, como Sistema de Posicionamento Global (GPS) (SILVEIRA, 2017).

As relações entre Planolândia, Geometria e Astronomia apresentadas na presente seção buscaram destacar alguns aspectos ligados à percepção e entendimento do espaço, constituindo a base para o desenvolvimento de estratégias e materiais pedagógicos.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, será apresentada a trajetória a ser percorrida durante a realização desse trabalho. As etapas envolvem a identificação e estudo do problema e as estratégias e experimentos por meio dos quais são propostas atividades que objetivam reduzir dificuldades dos estudantes relacionadas a conteúdos e habilidades básicas necessárias para o melhor entendimento da Geometria Espacial.

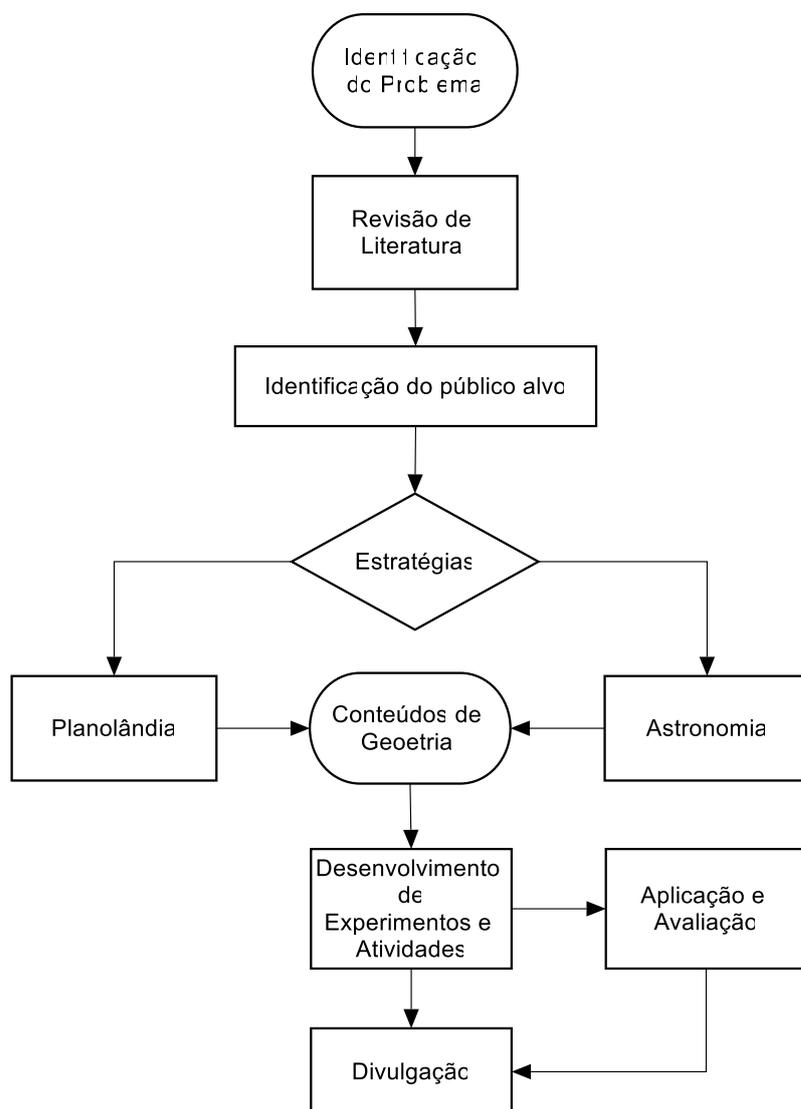
Com frequência, durante as aulas de Física faz-se necessário o uso de conhecimentos matemáticos e geométricos. Elementos como referencial, figuras planas e não planas, projeções, gráficos, entre outros, são fundamentais para o entendimento de muitos conceitos e fenômenos não só da Física, mas também de outras áreas. Portanto, o domínio desses e de outros aspectos como leitura e interpretação torna-se imprescindível para uma boa aprendizagem no nível médio.

No cotidiano escolar nota-se que é cada vez mais comum, especialmente no ensino público, estudantes com elevado nível de dificuldade em utilizar linguagem matemática e mobilizar o pensamento geométrico, seja para resolução de problemas ou para o entendimento dos conteúdos. No ano letivo de 2017 um questionário aplicado a estudantes da terceira série do Nível Médio do Colégio Estadual Professor Plínio Carneiro, localizado no município de Barrocas – BA, mostrou que muitos estudantes tiveram dificuldades em reconhecer características figuras geométricas básicas e usar propriedades como o cálculo de área e volume.

A revisão de literatura realizada evidenciou que essa carência não é um problema pontual da referida escola. Os indicadores educacionais obtidos com o PISA e SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) mostram que o nível de proficiência em matemática da maioria dos estudantes da Educação Básica está muito abaixo do adequado, preenchendo os níveis de classificação básico e insuficiente.

Diante dessa constatação convém buscarmos meios que ajudem na superação dos problemas. Ressalta-se que este trabalho se dedica especialmente ao campo da Geometria Espacial, buscando estratégias que visem o desenvolvimento da noção espacial e pensamento geométrico dos estudantes. A Figura 15 destaca o esquema das etapas pelas quais o estudo foi estruturado.

Figura 15 – Etapas do processo pelo qual a pesquisa foi realizada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o esquema apresentado na Figura 15, com a identificação do problema buscou-se fazer leituras no sentido de obter um entendimento das causas e levantar trabalhos publicados com finalidade de apresentar e discutir estratégias metodológicas usadas no ensino de Geometria. Dessa forma a revisão bibliográfica permitiu melhor compreensão do problema e das possíveis formas abordá-lo.

A partir da leitura da obra Planolândia: um romance de muitas dimensões foi possível estabelecer relações entre aspectos tratados na obra e o ensino de Geometria Espacial que, associados a temas de Astronomia permitiram vislumbrar algumas possibilidades de atividades práticas. Algumas dessas atividades foram aplicadas durante as aulas de Física do autor do trabalho em um colégio da rede

estadual de ensino da Bahia ao longo do ano 2019. As aplicações possibilitaram a avaliação das estratégias e materiais experimentais, contribuindo para a elaboração do caderno de atividades práticas.

Em relação ao tipo de pesquisa desenvolvida, este trabalho utiliza aspectos da pesquisa descritiva, uma vez que busca, por meio do emprego de métodos como o levantamento bibliográfico e aplicações de questionários, a descrição e entendimento da problemática que envolve o ensino de Geometria no Brasil. O levantamento de informações, por meio da revisão bibliográfica, e as aplicações didáticas em sala de aula se constituirão como as fontes de dados. Já em relação a abordagem metodológica este trabalho utilizará elementos previstos na pesquisa-intervenção.

Na perspectiva defendida por Damiani (2012), pesquisas do tipo intervenção, quando aplicadas em educação, envolvem uma ação pedagógica com intencionalidade de investigar a viabilidade de práticas inovadoras, frente a um problema de ensino-aprendizagem. Enfatiza-se assim a capacidade de produção de conhecimento que poderá ser utilizado por professores para promover melhorias em suas atividades didáticas.

Nas seções a seguir são apresentados o local e contexto de aplicação, o planejamento das atividades e os materiais experimentais desenvolvidos. Por fim, na última seção deste capítulo, apresenta-se as expectativas de criação de um caderno de atividades como um dos produtos associado a esta dissertação.

4.1 DELIMITANDO O LOCAL E PÚBLICO DE APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

O Colégio Estadual de Barrocas – CEB – antigo Colégio Estadual Professor Plínio Carneiro, encontra-se na região do semiárido do Estado da Bahia, no Território do Sisal, município de Barrocas – Bahia. O prédio possui 7 salas de aula, laboratório de informática, sala de vídeo, quadra poliesportiva, área administrativa: sala da direção, vice direção, sala dos professores, secretaria, sala do Sistema de Gestão Escolar (SGE) e biblioteca. A Figura 16 mostra a entrada do referido estabelecimento.

Com IDEB de 3,5 (2017), o colégio faz parte da Rede Estadual de Educação da Bahia, classificada como escola de médio porte, com 594 estudantes

matriculados no ano letivo de 2019, oferecendo o Ensino Médio regular nos três turnos.

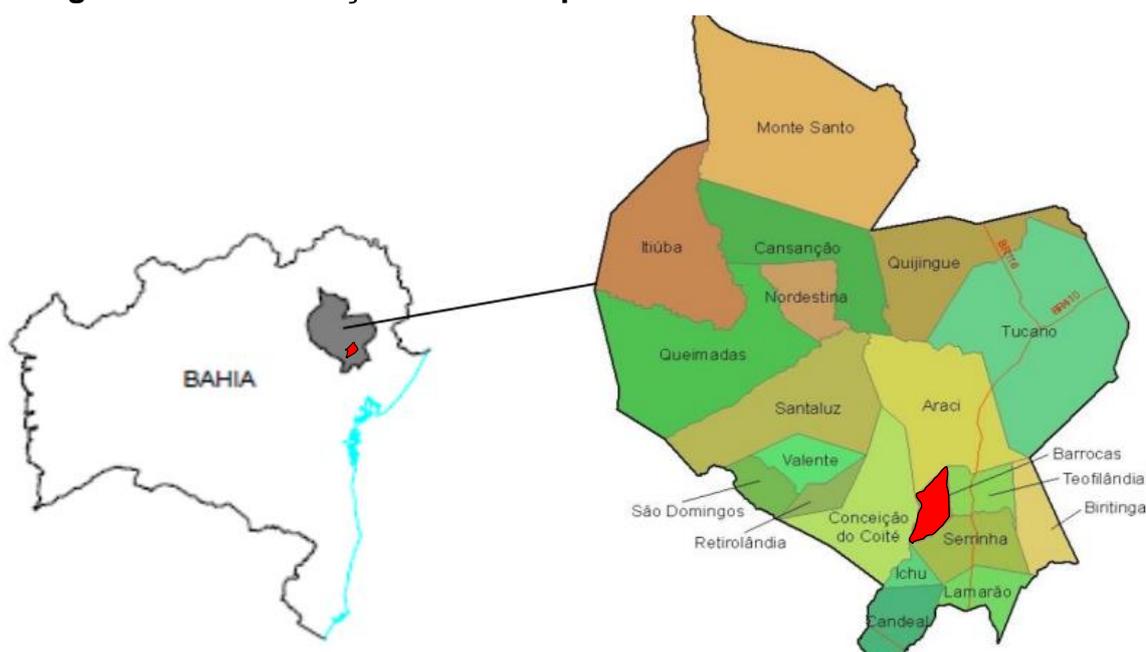
Figura 16 – Entrada do Colégio Estadual de Barrocas.



Fonte: Arquivo pessoal.

Os estudantes são provenientes de comunidades rurais (cerca de 65%) e da sede do município (35%, aproximadamente). A principal atividade econômica está ligada ao plantio de milho e feijão e extração da fibra do sisal. Além disso, há instalada no município uma empresa canadense de extração de ouro.

Figura 17 – Localização do município de Barrocas no Território do Sisal.



Fonte: Adaptado de Júnior e Júnior (2012).

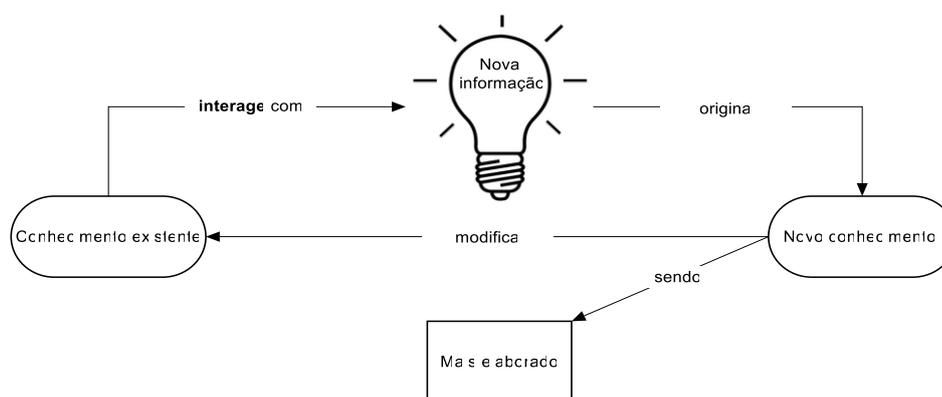
Como mostra a Figura 17, o município de Barrocas possui localização distantes dos grandes centros, estando a 191 Km da capital baiana.

4.2 DELINEAMENTO DAS ATIVIDADES

Em educação, ao propor uma atividade deve-se levar em consideração muitos aspectos que envolvem a prática pedagógica. Aspectos como o conhecimento do público alvo, a definição dos conteúdos e dos conhecimentos prévios necessários para que este seja assimilado de forma significativa pelos estudantes e a ciência dos recursos e materiais necessários e do tempo disponível são essenciais para o desenvolvimento da estratégia metodológica. Nesta seção serão apresentados os planejamentos que nortearam a aplicação de algumas atividades em turmas do Ensino Médio.

Para as aplicações das atividades busca-se utilizar como orientação teórico-metodológica pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Essa teoria foi proposta na década de 1960 em oposição a uma aprendizagem verbal por memorização. Segundo a teoria, para que a aprendizagem se torne significativa, os conhecimentos presentes na estrutura cognitiva do estudante devem interagir com o novo conhecimento, que por meio da assimilação de novos conceitos, modifica o conceito existente na estrutura cognitiva do estudante. O esquema da Figura 18 representa, de uma forma simplificada, como essa assimilação ocorre.

Figura 18 – Esquema de assimilação de novos conceitos segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a teoria, o novo conhecimento modifica e é modificado pela interação com o conhecimento existente dando origem a um conhecimento mais elaborado. Ausubel (2003) considera ainda que o mais importante é que ambos os conhecimentos modificados, também chamados de produtos interativos, permanecem em relação um com o outro, ligados ao conhecimento mais elaborado.

Essa interação entre conhecimento existente e nova informação é um ponto chave da teoria de Ausubel, sendo essencial que ocorra de forma não arbitrária e não literal, ou seja, o aprendiz precisa atribuir significados à nova informação a partir dos conhecimentos que já possui, e não apenas memorizar de forma aleatória e literal.

Para que a aprendizagem significativa realmente ocorra algumas condições são fundamentais, como o material instrucional ser potencialmente significativo e existir por parte do sujeito uma predisposição ao aprendizado do conteúdo. Em relação a potencialidade refere-se primeiramente ao material de instrução *“poder relacionar-se, numa base não arbitrária e não literal, a ideias relevantes correspondentes que se situam no âmbito daquilo que os seres humanos são capazes de aprender”*, sendo esse aspecto chamado de significação lógica. (AUSUBEL 2003, p.73). Além disso, a potencialidade do material instrucional também depende da estrutura cognitiva do aprendiz, para Ausubel (2003, p.74),

[...] também é necessário para a aprendizagem significativa que o conteúdo ideário relevante esteja disponível na estrutura cognitiva do aprendiz em particular, para satisfazer esta função de subsunção e de ancoragem.

Desse modo o processo de ancoragem de um novo conceito é feito por meio de um subsunção ou ideia ancora presente de forma não arbitrária e não literal na estrutura cognitiva do aprendiz. Para o autor esse aspecto tem importância ainda maior que o primeiro no estabelecimento de um material potencialmente significativo.

A outra condição para a ocorrência da aprendizagem significativa é que os aprendizes manifestem uma disposição para relacionarem o novo material a ser apreendido de forma não arbitrária e não literal e não apenas buscando a memorização. Esse aspecto está relacionado a motivação dos estudantes em apreender os conteúdos e, nesse sentido, a contextualização a partir da Astronomia poderá ajudar despertando o interesse.

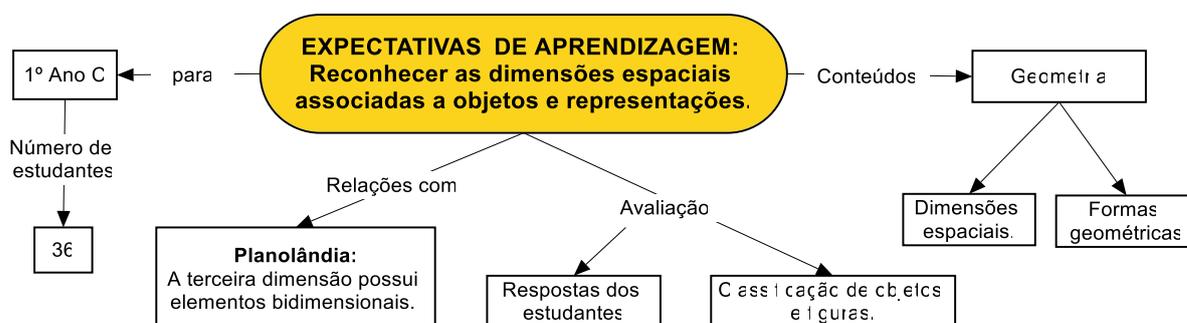
O autor Edwin Abbott, ao escrever Planolândia, utiliza-se de elementos matemáticos e geométricos que, associados a uma crítica social humorada, conduzem o leitor a uma jornada por diferentes dimensões físicas, tornando-se um campo fértil para a imaginação e promoção do interesse.

A leitura da obra motivou o estabelecimento de relações com o ensino de conceitos geométricos e astronômicos, associados a compreensão espacial. Neste sentido, nas seções subsequentes será apresentado o planejamento das atividades, evidenciando-se os objetivos de aprendizagem e as relações com Planolândia, Astronomia e em alguns casos, com a Física. Essas relações integram, juntamente com os materiais desenvolvidos, as estratégias de abordagem dos conteúdos de Geometria Espacial.

4.2.1 Reconhecendo as Dimensões Espaciais

Com o objetivo de levar o estudante a um melhor entendimento de princípios básicos de Geometria Espacial e identificar o número de dimensões espaciais em objetos e representações de figuras em uma, duas ou três dimensões, essa subseção se dedica ao desenvolvimento de atividades norteadas para este fim. Apesar de todos os objetos possuírem três dimensões espaciais, em alguns casos, como em um papel ultrafino ou uma linha, na prática uma ou duas dimensões podem ser desprezadas. Essa atividade busca relacionar o contexto de Planolândia com a representação de formas geométricas com diferentes números de dimensões. A Figura 19 mostra um mapa conceitual pelo qual a atividade está estruturada.

Figura 19 – Planejamento da atividade: Reconhecendo as dimensões espaciais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A atividade começará com a aplicação de um questionário (Figura 20) para levantamento das noções dos estudantes sobre dimensões espaciais. Na primeira questão busca-se identificar se os estudantes apresentam algum conhecimento sobre dimensões espaciais, para isso devem indicar qual dos objetos listados na questão possui maior número de dimensão. Na sequência é feita uma afirmação sugerindo que não enxergamos o mundo em três dimensões e que, para isso, é necessário o uso de uma tecnologia especial. A concordância com essa afirmação indicará que o estudante ainda não consegue relacionar as dimensões espaciais nos elementos a sua volta. Por fim, questiona-se sobre o número de dimensões associadas em uma sombra, o que exigirá do estudante certo grau de abstração para desprezar uma dimensão.

Figura 20 – Questões sobre dimensões espaciais.

1. Avalie as afirmações a seguir marque UMA das opções:

Dos objetos abaixo, qual representa um maior número de dimensões?

- () Um CD
- () Grão de areia
- () Linha comprida e muito fina
- () Não sei

Para enxergarmos as três dimensões é preciso usar óculos especial, igual aos encontrados em cinemas.

- () Concordo
- () Concordo parcialmente
- () Discordo

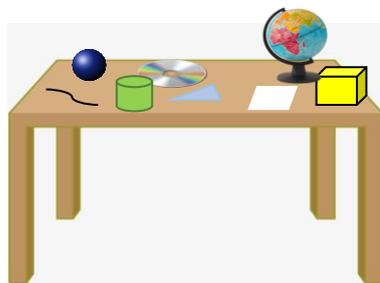
A sua sombra possui quantas dimensões?

- () Nenhuma
- () Uma
- () Duas
- () Três
- () Não sei

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para complementar o levantamento iniciado com as questões, será feita um teste no qual os estudantes deverão selecionar, dentre diversos objetos disponibilizados aleatoriamente (Figura 21), qual deles possuem uma, duas ou três dimensões. Para isso o professor deve providenciar previamente diversos materiais em variados formatos, como fios, discos, esferas, cilindros, cubos, papel muito fino e película.

Figura 21 – Diferentes formas dispostas aleatoriamente.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez identificado o nível de conhecimento dos estudantes e verificada alguma dificuldade no reconhecimento do número de dimensões, será abordado o conceito de dimensão espacial por meio da apresentação de Planolândia, com a utilização de uma maquete e formas geométricas, representando os personagens. A utilização de uma caixa com fenda muito fina poderá possibilitar melhor entendimento e visualização do mundo de duas dimensões.

Um pensamento descrito num diálogo entre o personagem principal – Quadrado – e uma esfera será útil para ampliar o entendimento e avançar no número de dimensões. A seguir é apresentado o trecho:

- “- [...] se um ponto se move na direção norte e deixa um rastro luminoso, que nome o senhor daria para o rastro?
 - Linha reta.
 - E uma linha reta tem quantas extremidades?
 - Duas.
 - Agora, imagine a linha reta que vai para o norte movendo-se em paralelo a si mesma no sentido leste-oeste, de modo que cada ponto dela deixe atrás de si como rastro uma linha reta. Que nome o senhor dará para a figura assim formada? Vamos supor que ela se mova por uma distância igual à linha reta original. Qual seu nome?
 - Quadrado.
 - E quantos lados tem um quadrado? Quantos ângulos? (ABBOTT, 2002, p.57).

Continuando-se com o pensamento, o movimento de um quadrado na direção perpendicular dará origem a formas que possuem três dimensões.

Na sequência desta atividade busca-se discutir como as dimensões espaciais estão associadas a elementos matemáticos como eixos, planos, formas geométricas e representações espaciais, além de suas relações com as medidas de comprimento, área e volume. Relações como a forma aproximadamente plana do

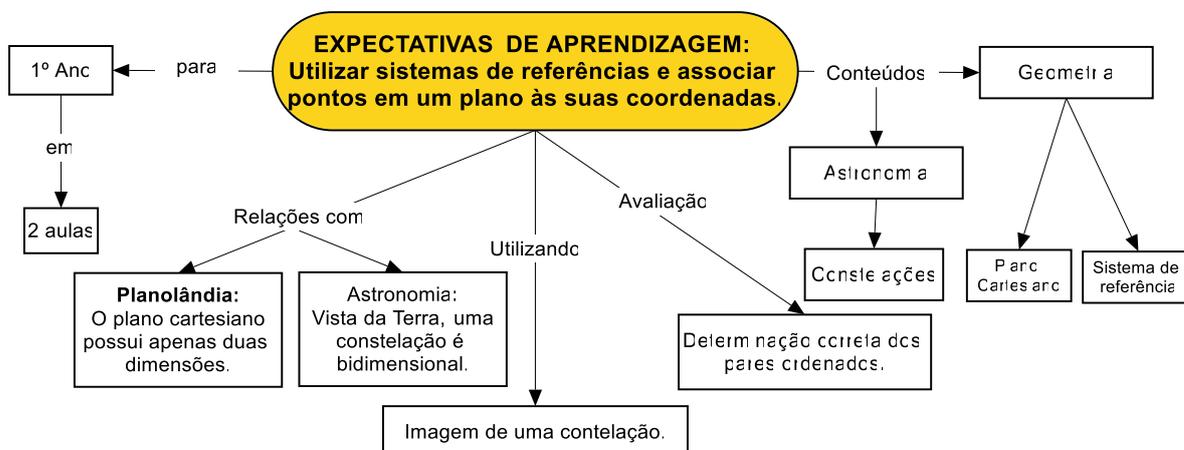
Sistema Solar ou o mapa de uma cidade podem ser utilizados como exemplos de aplicação da noção de dimensões em outras áreas.

Essa atividade deve possibilitar que os estudantes façam correta identificação do número de dimensões em objetos do dia-a-dia. Ao final, com os diversos materiais dispostos aleatoriamente sobre uma mesa, os estudantes devem fazer a organização segundo o número de dimensões associadas, o que possibilitará uma avaliação do nível de compreensão obtido com esta atividade.

4.2.2 Planificação do Céu

Esta subseção se dedica a apresentar os elementos que compõem o planejamento da atividade denominada “Planificação do Céu”. O nome da atividade se justifica pelo fato de ao observarmos uma constelação fazermos a projeção das estrelas em um plano. O objetivo principal dessa atividade consiste em discutir e praticar a representação de pontos no plano por meio de pares ordenados. Para isso, busca-se relacionar as posições das estrelas em uma dada constelação com as coordenadas de pontos no plano cartesiano, de modo que, estabelecendo-se um sistema de referência na imagem de uma constelação, o estudante possa determinar a posição de cada estrela por meio de um par ordenado. A Figura 22 mostra o planejamento dessa atividade.

Figura 22 – Planejamento da atividade: Planificação do Céu.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A atividade será iniciada com o levantamento sobre o interesse dos estudantes em observar o céu noturno e quais são das constelações conhecidas pelos mesmos. Será apresentada a definição de constelação e como suas construções estão ligadas com elementos mitológicos particulares de cada povo, sendo assim uma construção humana e cultural. Em seguida será abordando que a observação direta de estrelas no céu não permite afirmar qual está mais próximo ou mais distante e que a formação das constelações é feita a partir da projeção das estrelas na superfície bidimensional de uma esfera de raio indefinido.

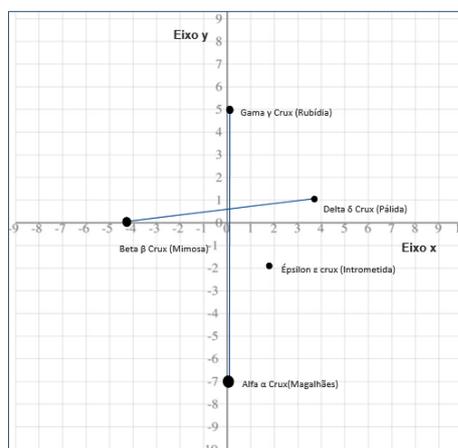
Uma superfície bidimensional se caracteriza por possuir duas direções como a largura e altura ou, no caso do plano cartesiano, coordenada x e coordenada y. Em Planolândia essa característica determina o espaço e os habitantes, limitado tanto seus movimentos quanto suas percepções de universo. Nessa atividade com a apresentação de Planolândia expõe-se que qualquer movimento dos habitantes pode ter apenas duas componentes, uma na direção x (direita-esquerda) e outra y (frente-trás), não existindo movimentos para cima ou para baixo. Como ilustra o autor ao apresentar a natureza de Planolândia,

“Imagine uma grande folha de papel sobre a qual linhas retas, triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos e outras figuras, em vez de ficarem fixos em seus lugares, movem-se livremente em uma superfície, mas sem o poder de se elevarem sobre ela ou de mergulharem abaixo dela [...]. “ (ABBOTT, 2002, p.8-9).

Essa analogia feita pelo autor utiliza representações em uma folha de papel para abordar características do espaço plano. Fazendo-se uma associação com essa passagem da obra será utilizada uma folha representando o espaço bidimensional, porém como a finalidade dessa atividade é determinar a localização de pontos no sistema de coordenadas cartesianas busca-se associar à localização desses pontos às posições das estrelas em uma constelação.

Utilizando uma representação da constelação do Cruzeiro do Sul (Figura 23) impressa em uma folha de papel, os estudantes devem usar o sistema de referência com dois eixos perpendiculares e identificar as posições de cada estrela no plano, escrevendo o par ordenado associado em uma tabela.

Figura 23 – Constelação do Cruzeiro do Sul em sistema de referências.



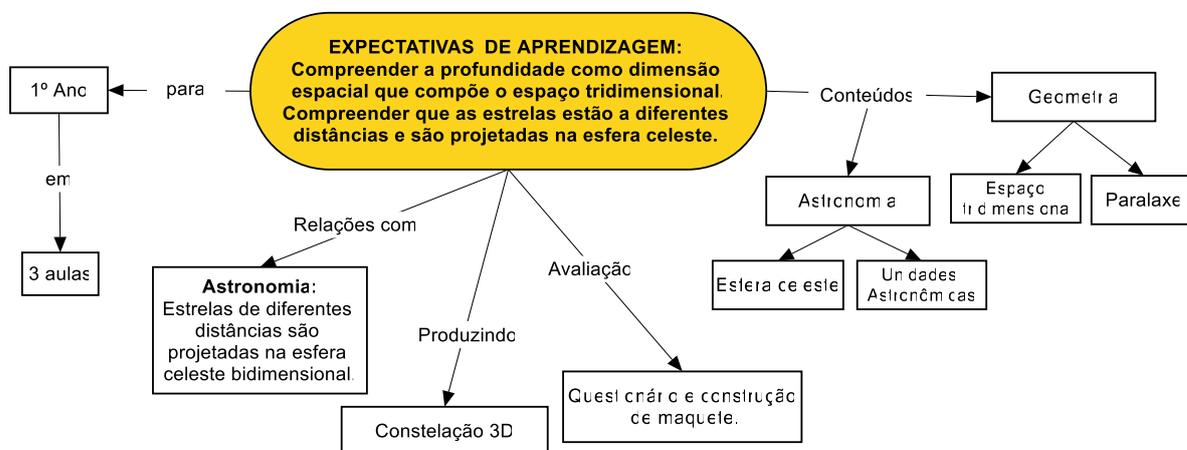
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao final da atividade propõe-se discutir o posicionamento (distâncias) e as formas dos astros no céu, além dos fenômenos que envolvem seus deslocamentos. Tendo como base uma parte da metodologia utilizada em Leite (2006), na qual fixa-se cordões pendurados no teto para que os estudantes posicionem objetos que representem bem os astros, possibilitando o professor identificar como os estudantes imaginam o céu e discutir possíveis equívocos.

4.2.3 Distância das Estrelas

A compreensão do espaço celeste e dos fenômenos que envolvem o movimento dos astros muitas vezes é dificultada pela necessidade do uso da abstração, uma vez que estes movimentos são percebidos de forma relativa. Partindo-se da noção de espaço bidimensional apresentado em Planolândia e utilizando as noções de projeção das estrelas na esfera celeste, essa atividade objetiva ampliar a compreensão espacial dos estudantes discutindo o posicionamento das estrelas e construindo uma representação de uma constelação no espaço tridimensional. A Figura 24 mostra o planejamento dessa atividade.

Figura 24 – Planejamento da atividade: Distâncias das Estrelas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O planejamento da atividade envolve, inicialmente, a utilização de duas questões nas quais são feitas afirmações a respeito do posicionamento das estrelas e planetas, sendo que o estudante deve assinalar entre as opções: “concordo”, “concordo parcialmente” e “discordo”. Busca-se identificar se os estudantes possuem uma visão espacial correta de suas distâncias, demonstrando capacidade de diferenciar estrelas de planetas bem como as distâncias envolvidas para cada tipo de astro.

Na primeira questão afirma-se que *numa constelação as estrelas estão muito longe de nós, porém próximas umas das outras*. A noção de espaço descrita com essa afirmação é uma consequência da observação direta do céu, pois vista da Terra, a separação angular entre as estrelas é muito pequena, porém estão a diferentes distâncias de nós. Assim espera-se que os estudantes concordem de forma parcial, considerando a segunda parte da afirmação está incorreta.

A segunda afirmação trata da diferenciação em relação as distâncias entre planetas e estrelas, afirmando que *os planetas, assim como as estrelas, estão muito distantes de nós quando observados a noite no céu*. Considerando que as estrelas estão muito mais distantes que os planetas, os estudantes devem discordar da afirmação.

Retomando-se a atividade anterior onde se propõe a identificação dos pares ordenados das estrelas em uma representação da constelação do Cruzeiro do Sul, deve-se levantar o seguinte questionamento: *como é determinada a distância de*

uma estrela? Visando apresentar a paralaxe como um dos métodos de obtenção dessas distâncias discute-se a importância da visão estereoscópica para a percepção da terceira coordenada espacial (z), que pode ser entendida como a profundidade.

Apresentando-se como o efeito de paralaxe está associando a percepção da terceira dimensão será abordado por meio de demonstração como é feito o cálculo da distância das estrelas utilizando-se o método da paralaxe trigonométrica. Deve-se discutir a necessidade de se utilizar a unidade ano-luz (AL) e como a mesma é definida.

Com os valores relativos às distâncias das estrelas da constelação do Cruzeiro do Sul pode-se fazer a conversão para unidade de centímetros por meio da equação apresentada na subseção 4.3.4, determinando assim a posição de cada estrela na maquete tridimensional. Essa atividade deverá ajudar os estudantes no desenvolvimento da noção de espaço sideral e na compreensão de como se forma uma constelação, por meio da projeção das estrelas em um plano. Ao final os estudantes deverão verificar, a partir da rotação da maquete, que a constelação como a conhecemos é uma visão a partir do referencial terrestre, caso o referencial mude toda a constelação mudará também.

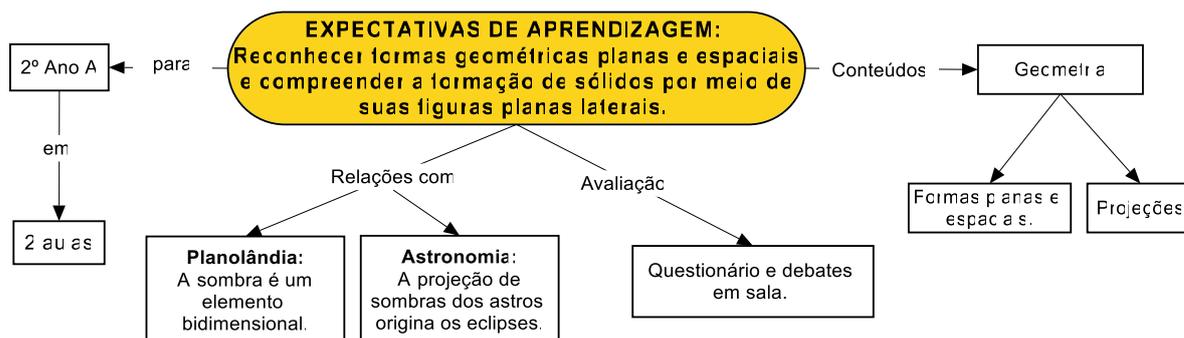
4.2.4 Dando Formas às Sombras

O fenômeno de formação das sombras ocorre devido a propagação em linha reta dos raios luminosos que ao encontrar um objeto opaco tem sua passagem bloqueada fazendo com que apenas uma parte dos raios luminosos sejam projetados em uma superfície. Os raios projetados formam uma figura bidimensional que é definida pelos contornos do objeto, sendo possível extrair informações sobre sua forma. A presente subseção apresenta o desenvolvimento de uma atividade que utiliza, essencialmente, informações presentes nas sombras de objetos para o estudo de suas formas geométricas.

O contato com objetos e ambientes que possuem formas geométricas variadas é um fenômeno que ocorre diariamente e a todo instante. Dentre as maneiras que essas formas podem ser classificadas uma das mais comuns em planas ou espaciais. Em muitos casos pode-se interpretar que uma forma espacial é

composta por várias figuras planas conhecidas, obtendo-se relações entre as formas. Partindo-se dessa perspectiva, a presente atividade tem como objetivo principal levar os estudantes a identificar formas planas e sólidos por meio da projeção de sombras. O planejamento para a atividade está disposto na Figura 25.

Figura 25 – Planejamento da atividade: Dando Formas às Sombras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A atividade será iniciada com a discussão do conceito de espaço bidimensional por meio da apresentação de Planolândia e seus personagens, visando estimular os estudantes no reconhecimento de figuras planas. A relação com Astronomia é feita ao se apresentar a sombra como um elemento bidimensional, utilizando-se exemplos como fases da Lua e formação dos eclipses, que são explicados a partir da formação e projeção de sombras.

Como parte principal da atividade os estudantes devem utilizar os conhecimentos sobre figuras planas para compor formas espaciais. Inicialmente o professor, utilizando o projetor de sombras descrito na subseção 4.3.2, deverá fazer projeções para identificação das figuras planas formadas pelas sombras. Os estudantes devem registrar o nome das figuras observadas usando termos geométricos. O procedimento de colocar o sólido na posição para que tenha sua sombra projetada exige cuidado e deve ser feito com a fonte de luz desligada, evitando-se que seja revelado prematuramente aos estudantes. A identificação das formas planas poderá indicar o nível de familiaridade dos estudantes com este conteúdo.

Cada sólido posto deve ter sua sombra projetada de diferentes ângulos, que deverá ser feito por meio da rotação do mesmo. Com a observação das características geométricas, os estudantes deverão inferir qual sólido está

projetando a sombra. Esse procedimento exigirá o uso da abstração uma vez que será necessário a projeção mentalmente de quais sólidos podem gerar o conjunto de sombras observadas.

O estudante deve perceber que a visualização tridimensional de um objeto depende da observação de mais de um ângulo, como ocorre na visão estereoscópica. Este aspecto é retratado no livro Planolândia quando o personagem principal relata uma aula de reconhecimento pela visão dada a um neto promissor:

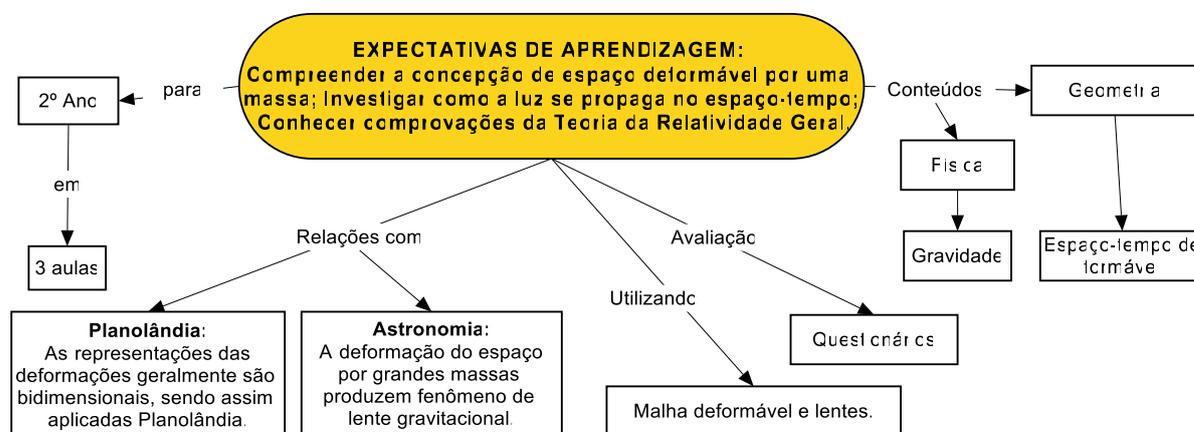
“Seus tios e eu estávamos dando uma aula prática de reconhecimento pela visão, girando em torno de nossos centros, ora depressa, ora mais devagar, e fazendo perguntas quanto a nossas posições. E suas respostas tinham sido tão satisfatórias que eu fora induzido a recompensá-lo dando algumas indicações sobre Aritmética aplicada à Geometria (ABBOTT, 2002, p. 50).

Assim o método de reconhecimento por meio da visão exige que um habitante observe outro por diferentes ângulos para seu completo reconhecimento.

4.2.5 O Espaço segundo a Teoria da Relatividade Geral de Einstein

O ensino de conceitos relativos ao campo da Física Moderna ainda se constitui um desafio a ser superado na Educação Básica brasileira. Muitas vezes os estudantes concluem esse nível de ensino com uma noção restrita do espaço na qual os corpos estão localizados e os fenômenos acontecem, sem ser influenciado ou influenciar a dinâmica de seus movimentos. Deste modo, nessa subseção descreve-se o planejamento de uma atividade pela qual busca-se apresentar a nova concepção de espaço e de gravidade dada pela Teoria da Relatividade Geral (TRG), elaborada no início do século 19 pelo físico Albert Einstein. Essa atividade também objetiva abordar como deformações do espaço produzem as lentes gravitacionais. A Figura 26 mostra o planejamento dessa atividade.

Figura 26 – Planejamento da atividade: O espaço segundo a Teoria da Relatividade Geral.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com o esquema da Figura 26, a atividade será aplicada para estudantes do segundo ano no tempo previsto de três aulas. A escolha da série a ser aplicada deve-se ao fato dos estudantes já terem estudado o conteúdo de gravitação universal na série anterior, sendo assim uma oportunidade de ampliar os conhecimentos sobre espaço e gravidade.

A atividade será iniciada com o levantamento das concepções dos estudantes sobre espaço e gravidade por meios das questões apresentadas na Figura 27. Busca-se identificar inicialmente quais cientistas são conhecidos pelos estudantes, seja por meio da escola ou por outras formas. Em seguida os estudantes devem informar se já tiveram contato com os conhecimentos da TRG indicando, em caso afirmativo, do que essa teoria trata. A experiência como docente indica que os estudantes, apesar de reconhecerem a imagem de Albert Einstein, geralmente têm dificuldades em falar minimamente sobre suas teorias e contribuições para a ciência.

Na parte final do questionário o estudante deve marcar, dentre as explicações Newtoniana e Einsteiniana, qual delas melhor explica o movimento dos astros. Com isso objetiva-se identificar se os estudantes possuem conhecimentos a respeito de como a Teoria de Einstein interpreta o espaço.

Figura 27 – Questionário para levantamento de concepções sobre espaço e gravidade.



Pós-Graduação em **Astronomia**
MESTRADO PROFISSIONAL
UEFS



Um espaço para a especialidade!

Inicialmente pedimos que se identifique preenchendo as informações abaixo:

NOME: _____ SÉRIE: _____

1. Avalie as afirmações a seguir marque UMA das opções:

Dos cientistas a seguir, marque com um (x) aquele (s) que você conhece:



() () () () () () ()

Você já ouviu falar da Teoria da Relatividade Geral?

- () Sim, sei do que ela trata.
() Sim, mas não sei do que ela trata.
() Não.

Se você respondeu a primeira opção na afirmação anterior responda: A Relatividade Geral é uma teoria que pode explicar:

- () o movimento das pequenas partículas.
() o movimento de grandes massas no espaço.
() a composição das estrelas.
() Não sei.

Como você explica a Lua girar ao redor da Terra e os planetas girarem ao redor do Sol?

- () a presença de uma grande massa deforma o espaço-tempo, passando a determinar a trajetória de outros corpos.
() devido suas massas, os corpos se atraem com forças de natureza gravitacional, o que mantém os corpos presos em suas órbitas.
() Não sei.

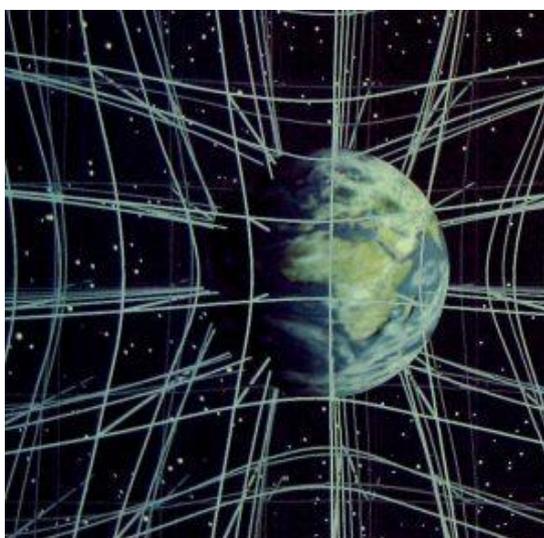
Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante das respostas dos estudantes será abordada a concepção de espaço absoluto utilizada pela teoria da gravitação de Newton e o problema de instantaneidade da ação a distância, indicando a necessidade de uma nova interpretação já que para Einstein nada deveria viajar mais rápido que a velocidade da luz no vácuo. A partir dessa problematização apresenta-se a concepção de

espaço e gravidade segundo a TRG utilizando-se de uma malha deformável e esferas com diferentes massas para fazer demonstrações.

Uma relação com Planolândia é obtida a partir da reflexão sobre a concepção simplificada encontrada nas representações de deformações em um espaço bidimensional, como representado numa malha deformável. Apesar dessas representações bidimensionais ajudarem na compreensão do espaço-tempo deformável, é preciso discutir com os estudantes que essas deformações ocorrem nas três dimensões espaciais (Figura 28) e uma temporal.

Figura 28 – Representação da deformação tridimensional do espaço.



Fonte: cafeeciencia.com.br.

Por fim, apresenta-se como consequência da nova interpretação do espaço o efeito de lente gravitacional, visualizando em uma representação com lentes. Será oportuno discutir a importância da observação do eclipse solar ocorrido na cidade de Sobral (CE) em 29 de maio de 1919, como fato determinante para a confirmação da referida teoria.

4.3 DESENVOLVIMENTO DE MATERIAIS

Ao tratarmos do ensino de conceitos e fenômenos que exigem certo grau de abstração devido a observação deste ser impossível de ser realizada é conveniente buscar sua representação por meio de modelos ou protótipos. A seguir é feita uma breve descrição dos materiais desenvolvidos que possibilitaram a execução das

atividades. O desenvolvimento dos protótipos teve como base a leitura do livro Planolândia e associações feitas com temas de Geometria e Astronomia. Buscou-se utilizar materiais de fácil acesso e com baixo custo, como caixas de papelão, o que não impede de serem reproduzidos a partir de outros materiais, como madeira ou acrílico que desempenham a mesma função.

A prototipagem é entendida nesse trabalho como o desenvolvimento de recursos materiais que buscam a representação de fenômenos, relações e/ou conceitos que, devido a escalas de tempo ou distâncias envolvidas, tem sua visualização direta impossibilitada, oferecendo assim para os estudantes protótipos em escalas manipuláveis.

De acordo com Aduino (2018, p.9), o uso de modelos físicos e protótipos rápidos *“ajudam o estudante a experimentar visual e tátilmente o espaço do objeto no seu tamanho real ou de forma reduzida, a reconhecer elementos e suas características, inter-relações e sequências espaciais. Dessa forma “o manuseio dos materiais permite que o aluno sinta, analise e julgue os aspectos que a visão à distância não permite e a consequência disso é um senso de orientação espacial.”* (ADAUUTO, 2018, p.9).

A utilização dos materiais deve estar associada ao estudo dos conteúdos de forma a complementar, facilitando a visualização e entendimento dos conceitos e fenômenos. Foram desenvolvidos: um projetor de sombras, um estereoscópio, testes de percepção de profundidade, maquete de uma constelação em três dimensões, uma montagem com tecido deformável e um kit que representa o fenômeno de lente gravitacional.

4.3.1 Maquete de Planolândia e Caixa com Fenda

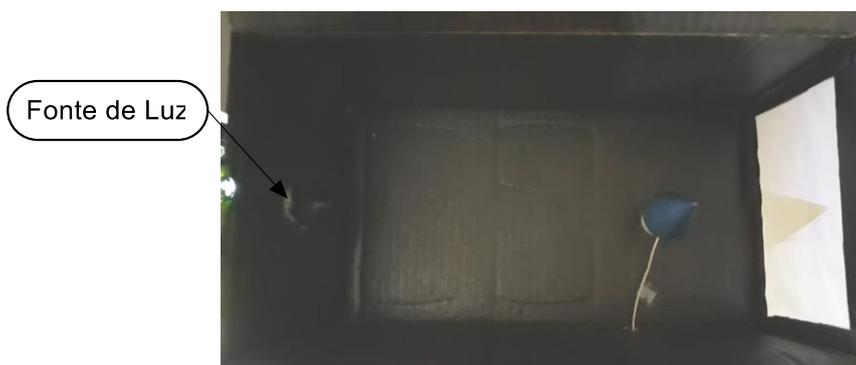
Ao apresentar Planolândia para os estudantes, alguns recursos podem ajudar na compreensão de suas características. Com esse objetivo foram construídas uma maquete e uma caixa com fenda. A maquete contendo personagens e cenários de Planolândia (Figura 29) foi confeccionada utilizando um pedaço retangular de madeirite (41cm por 43cm) e formas recortadas em acrílico fino. Como alternativa para a construção da maquete pode ser utilizado isopor ou mesmo papelão e para as formas papel ou cartolina.

seria a visão em Planolândia. Essas atividades permitem que o estudante utilize a imaginação, possibilitando a compreensão da natureza de Planolândia.

4.3.2 Projetor de Sombras

Para qualquer sólido geométrico a projeção de sua sombra gera uma forma que é bidimensional. Se iluminado em direções bem determinadas a projeção de sombras de sólidos de formas simples gera figuras geométricas conhecidas. Como exemplos imaginemos um cilindro, figuras como retângulo ou círculo podem ser geradas com sua sombra sendo assim possível reconhecê-lo por meio de suas sombras. Partindo dessa ideia foi desenvolvida uma montagem com uma fonte de luz, um suporte giratório e um anteparo feito de papel vegetal e posicionado do lado oposto ao da fonte de luz (Figura 31).

Figura 31 – Projetor de sombras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A sombra do sólido colocado sobre o suporte é projetada no papel vegetal e pode ser vista pelo estudante na lateral externa da caixa (Figura 32).

Figura 32 – Sombra projetada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao observar as sucessivas partes de um objeto, além de poder obter informações sobre o conhecimento dos estudantes a respeito das figuras e dos sólidos, a atividade pode propiciar a construção da terceira dimensão das formas observadas. Também é possível mostrar que é preciso mais de uma imagem para que se possa concluir sobre qual a forma do sólido dentro da caixa.

4.3.3 Estereoscópio

Um estereoscópio é um instrumento composto por dois espelhos perpendiculares que refletem duas imagens ligeiramente diferentes (estereoscópicas), uma para cada olho. Com isso é possível demonstrar como ocorre a formação de imagens tridimensionais no nosso sistema visual. A Figura 33 mostra um estereoscópio feito a partir de uma caixa de sapatos.

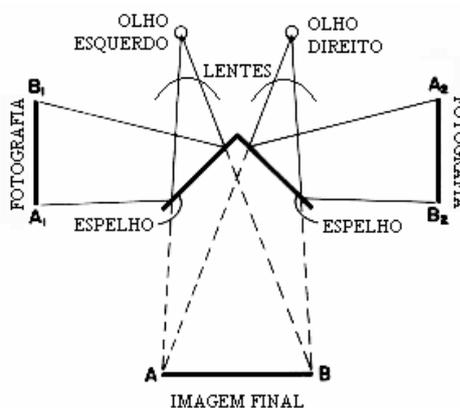
Figura 33 – Estereoscópio



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um esquema da montagem de um estereoscópio é mostrado na Figura 34.

Figura 34 – Esquema básico de montagem de um estereoscópio.



Fonte: Siscoutto et al. (2004).

Um aspecto positivo desse material é a facilidade em mostrar que a imagem tridimensional é virtual e formada por duas imagens diferentes.

4.3.4 Tecido Espaço-Tempo

O conceito de espaço passou por mudanças ao longo da história. Teorias como a da Gravitação Universal de Newton consideram que o movimento dos corpos ocorre num espaço indeformável e independente dele. Já as Teorias da Relatividade Geral e Restrita consideram um espaço no qual suas medidas podem depender da velocidade de seus observadores. Para o estudo do novo conceito de espaço foi confeccionada uma montagem com tecido radiosa, pois tem boa elasticidade (Figura 35). Foi montada a estrutura a partir de tubos de pvc de 20mm para o aro e 25mm para as bases.

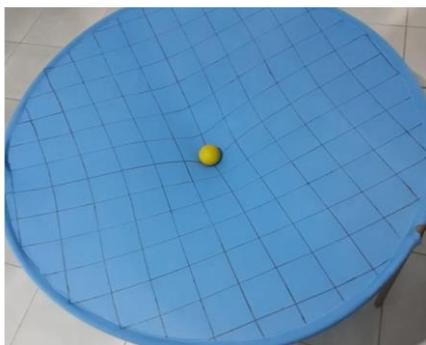
Figura 35 – Representação plana do espaço-tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O tecido pode representar Planolândia pois, numa aproximação, pode ser considerado bidimensional. A maioria das representações de deformações do espaço devido a presença de um buraco negro ou estrela não descrevem bem a realidade, uma vez que tal deformação é mostrada apenas de forma bidimensional. Assim, tais representações equivalem, devido ao número de dimensões, ao que aconteceria em Planolândia.

Figura 36 – Representação do tecido espaço-tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como mostra a Figura 36, a malha feita de tecido “radiosa” permite boa deformação e as linhas paralelas e perpendiculares desenhadas na malha ajudam na visualização. Utiliza-se esferas pequenas como bolinhas de gude para representar os movimentos dos planetas e seus satélites naturais no espaço.

4.3.5 Constelação 3D

A limitação que o ser humano tem de perceber a diferença de distâncias entre objetos muito afastados como as estrelas pode levar a construção do pensamento de que estão todas à mesma distância de nós. É o que ocorre numa constelação.

Para possibilitar o desenvolvimento de uma visão espacial do céu sugere-se colocar numa maquete as estrelas separadas em ordem de distância. Partindo-se de um sistema plano de coordenadas (x e y), adicionamos uma terceira coordenada (z) ou distância das estrelas.

Utilizando a imagem de uma constelação pode-se estabelecer um sistema de referência (x,y). O estudante deve identificar e relacionar as respectivas coordenadas em uma tabela. A terceira dimensão, a profundidade, é a distância até as estrelas, que no sistema cartesiano corresponde à coordenada z . Com os dados das distâncias das estrelas define-se o tamanho máximo da maquete e obtém-se um fator de conversão de Anos-luz para centímetros. Para a construção da maquete utilizou-se a constelação do Cruzeiro do Sul e a altura definida foi de 20 cm. Esse valor corresponde a posição da estrela mais distante (Beta Crux: 4424 anos-luz), de acordo com a Equação 1.

Equação 1 – Cálculo da coordenada z.

$$z = 20(\text{cm}) - \frac{\text{Distância média da estrela}(AL) * 20(\text{cm})}{424(AL)}$$

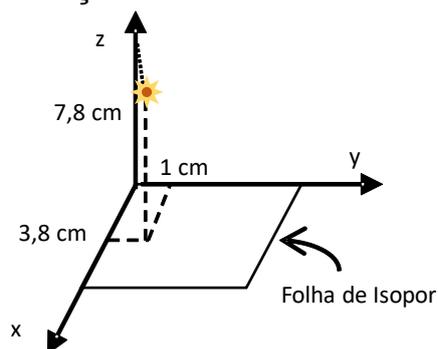
O primeiro termo da Equação 1 é necessário, uma vez que se pretende utilizar o isopor como plano de projeção das estrelas, de modo que o estudante fique posicionado em frente a esse plano. Utilizando uma placa de isopor quadrada de 20 cm de lado, nosso espaço representativo é um cubo imaginário de 20 cm de lado. A partir da tabela com os dados das distâncias utiliza-se a Equação 1 para obter os tamanhos dos palitos de churrasco e fixa-os no isopor no ponto correspondente.

Como exemplo tomemos a estrela Delta Crux. Sua distância média da Terra é 257 anos-luz, logo:

$$z_{\text{Delta Crux}} = 20(\text{cm}) - \frac{257(AL) * 20(\text{cm})}{424(AL)} = 7,8(\text{cm})$$

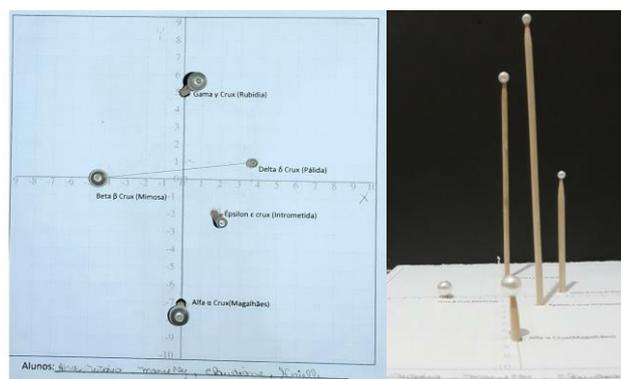
A Figura 37 ilustra como deve ser feito o posicionamento dessa estrela na maquete, enquanto que a Figura 38 mostra o aparato em duas perspectivas após a montagem.

Figura 37 – Posição da estrela Delta Crux na maquete.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Vista frontal e lateral da constelação 3D.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com essa montagem é possível mostrar para os estudantes de modo concreto que as estrelas de uma constelação não estão todas no mesmo plano. O que fazemos é uma projeção de suas posições, porém essa é uma visão particular obtida a partir da nossa perspectiva.

4.3.6 Lente Gravitacional

Uma consequência da deformação do espaço pelas massas é que ao seguir o espaço a luz pode ser sua trajetória desviada ao passar próximo de uma estrela. Para essa montagem é necessário apenas de uma caixa de papelão com a imagem de uma constelação fixada ao fundo e uma lente de lupa (Figura 39).

Figura 39 – Representação do desvio da luz por um buraco negro.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao passar uma lente paralelamente ao plano da constelação presa ao fundo é possível observar o deslocamento aparente das estrelas. O objetivo principal da montagem é mostrar o desvio da luz no fenômeno de lente gravitacional e que a

deformação no espaço-tempo não é apenas bidimensional, mas ocorre em todo o espaço em volta do corpo.

4.4 DESENVOLVIMENTO DO CADERNO DE ATIVIDADES

O uso de livros didáticos em aulas de matemática é uma prática comum entre professores da área. Contudo, muitas vezes esses professores não encontram o suporte necessário à prática docente, visto que em alguns casos apresentam divergências de conceitos e até omissão de conteúdos fundamentais. Além disso, nem sempre é possível encontrar sugestões de atividades que possibilitem uma abordagem mais contextualizada dos conteúdos com outras áreas.

O livro didático tem papel fundamental no ensino de qualquer conteúdo, porém utilizá-lo como único recurso pedagógico pode restringir as possibilidades de aprendizagem dos estudantes. Considerando a diversidade geralmente presente nas salas de aulas brasileiras e a variedade de recursos que podem ser empregados, o professor deve buscar meios de diversificar a abordagem dos conteúdos, visando oferecer para os estudantes novos olhares sobre os conteúdos.

Com essa perspectiva, as atividades e materiais desenvolvidos na presente pesquisa irão compor um caderno de atividades que terá como objetivo fornecer sugestões de atividades que ajudem professores e estudantes no desenvolvimento das noções básicas de Geometria com foco na espacialidade. As atividades, motivadas pela leitura da obra *Planolândia*, devem relacionar aspectos geométricos presentes no livro com temas de Astronomia e experimentos manipuláveis, visando a contextualização e motivação no processo de ensino-aprendizagem.

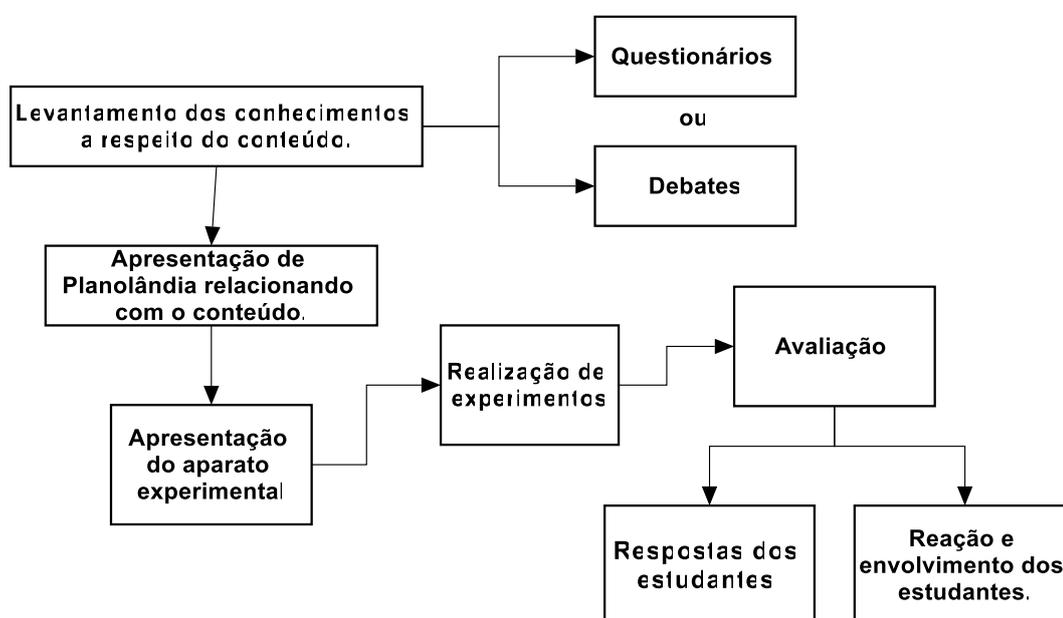
5 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Esta seção se dedica a apresentar e analisar os resultados referentes às aplicações das atividades descritas na seção 4.2. O principal objetivo das aplicações foi investigar as reais potencialidades das estratégias estabelecidas por meio de relações entre conteúdos de Geometria, aspectos de Planolândia e temas Astronomia e Física. Buscou-se também observar o envolvimento dos estudantes com os experimentos utilizados com vistas em melhorias e adaptações.

As estratégias e materiais foram desenvolvidos ao longo dos anos de 2018 e 2019 e as aplicações ocorreram no ano letivo de 2019. Durante as aulas da disciplina de Física, o autor flexibilizou o planejamento curricular inserindo as atividades no conteúdo programático. O esquema da Figura 40 destaca a sequência de passos utilizada nas aplicações que ocorreram em turmas de primeiro e segundo ano do Ensino Médio.

Figura 40 – Etapas de aplicação das atividades.

ESQUEMA DE APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como descrito no esquema apresentado na Figura 40, as aplicações iniciaram com um breve levantamento de conhecimentos que os estudantes

possuíam a respeito do conteúdo abordado em cada atividade. Esses levantamentos foram realizados por meio de debates motivados por questionamentos ou aplicação de questionários.

Como forma de evolver o estudante na temática, utilizou-se a apresentação de Planolândia fazendo-se destaques para os aspectos relacionados com os conteúdos de Geometria a serem abordados. Assim, a aplicação das atividades pressupõe que o professor realize a leitura prévia da obra, além de sugerir aos estudantes.

Com a realização dos experimentos buscou-se possibilitar aos estudantes o exercício da visualização e representação dos conteúdos estudados. Apesar da avaliação aparecer no final do esquema, o envolvimento dos estudantes e as respostas dadas durante os momentos da aplicação são indicadores essenciais das potencialidades que a atividade possui.

5.1 RECONHECENDO AS DIMENSÕES

A realização dessa atividade foi motivada pela necessidade de os estudantes utilizarem, em diversos momentos de sua vida escolar, as noções de dimensões espaciais. Nas disciplinas de Física e Matemática, por exemplo, é comum em resolução de problemas o uso dessas noções envolvendo medidas e cálculos referentes ao comprimento, a área ou volume de figuras. Assim, essa atividade teve como objetivo ajudar os estudantes a desenvolverem a noção de dimensões espaciais, reconhecendo-as em objetos e representações. Para isso foi utilizada, com forma de contextualizar a atividade, a apresentação do livro Planolândia.

A atividade RECONHECENDO AS DIMENSÕES ESPACIAIS foi realizada na turma de primeiro ano e teve a participação de 31 estudantes. No início desta atividade foi feito um levantamento da compreensão dos estudantes a respeito do conceito de dimensão espacial por meio da aplicação de um questionário e realização de testes com objetos. A Figura 41 mostra uma estudante durante a seleção de objetos segundo o número de dimensões espaciais associadas. Escolhidos de forma aleatória, seis estudantes participaram dos testes realizados na biblioteca da escola.

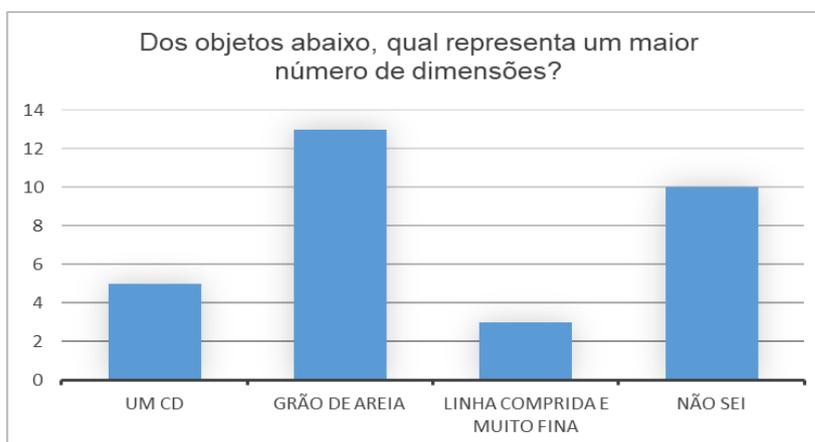
Figura 41 – Estudante realizando teste com formas de diferentes dimensões.



Fonte: Arquivo pessoal.

Em relação ao questionário, composto por três questões de múltipla escolha, os resultados para cada questão são descritos a seguir. A primeira questão buscou identificar se os estudantes conseguiam relacionar o número de dimensões em objetos. As alternativas marcadas pelos estudantes para essa questão são apresentadas no Gráfico 1.

Gráfico 1 – Respostas dos estudantes para primeira questão.

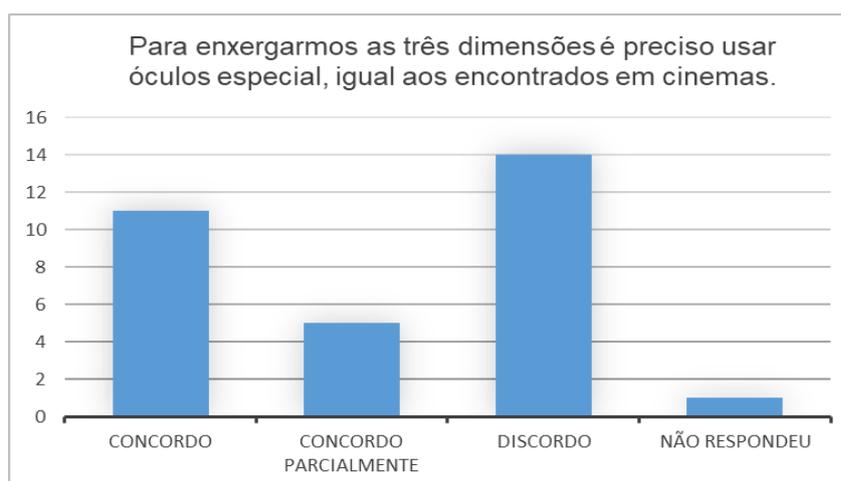


Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com a Gráfico 1, dos 31 estudantes apenas 5 marcaram a opção desejada, um CD. Por ter forma plana, um CD está associado a duas dimensões espaciais, maior número entre as opções. Em termos percentuais, pelo menos 84% dos estudantes não conseguiram identificar corretamente o número de dimensões nos objetos apresentados.

Na afirmativa seguinte buscou-se identificar se o estudante reconhece que vive no mundo de três dimensões. Assim, afirma-se que há necessidade de utilização de dispositivo tecnológico para que se possa enxergar a tridimensionalidade, se espera que discordem da afirmação. O Gráfico 2 mostra as respostas dos estudantes.

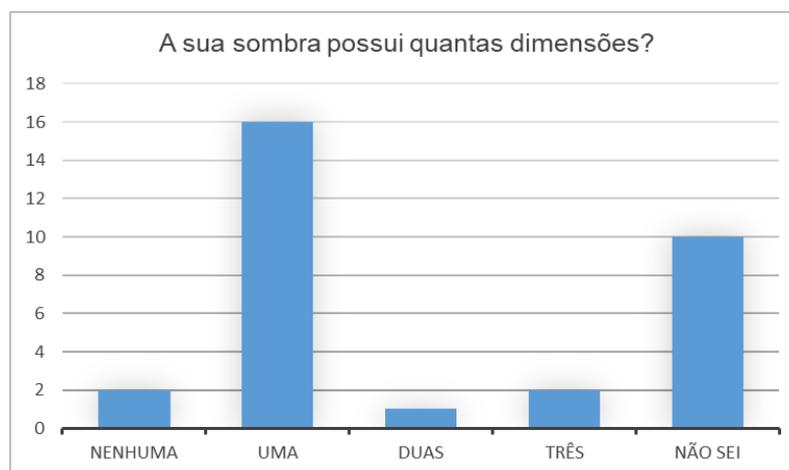
Gráfico 2 – Respostas dos Estudantes Sobre Visualização da Terceira Dimensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Menos da metade discordou, no entanto, 11 estudantes afirmaram ser necessário o uso de óculos 3D para se obter visão tridimensional. Reconhecer que vivemos em um mundo com três dimensões espaciais e reconhecê-las nos objetos é fundamental para o entendimento de muitos conceitos de Geometria.

O reconhecimento do número de dimensões foi abordado com o questionamento que buscou verificar se o estudante reconhece quantas dimensões possui em sua sombra. O resultado é apresentado no Gráfico 3.

Gráfico 3 – Respostas Dos Estudantes Sobre Reconhecimento das Dimensões

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com os dados apresentados no Gráfico 3, apenas um estudante relacionou corretamente o número de dimensões presentes em uma sombra. A não associação entre a quantidade de dimensões presentes em formas planas e espaciais indica que os estudantes não possuem conhecimentos básicos da disciplina de Geometria. A mesma dificuldade foi verificada com os estudantes que participaram dos testes de identificação das dimensões. A não familiaridade com o termo “dimensão espacial”, manifestada pelos estudantes, indica a necessidade de se tratar desse tema durante as aulas.

Em vista disso, a abordagem foi iniciada com a apresentação de personagens e contexto de Planolândia. Foi abordado o pensamento sugerido na obra no qual a soma das posições no movimento de um ponto, que por definição não possui dimensão espacial, origina um segmento de reta, com uma dimensão. Movendo-se este segmento na direção perpendicular ao seu comprimento, tem-se um plano. Continuando-se com esse pensamento, foi discutido a formação da terceira dimensão, refletindo sobre a possibilidade de existência da quarta dimensão espacial, não perceptível para nós. A Figura 42 mostra um registro dos estudantes presentes na aula sobre dimensões espaciais.

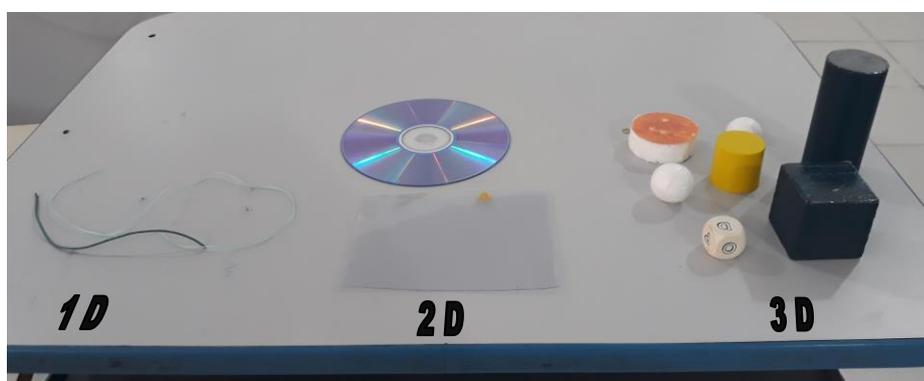
Figura 42 – Estudantes presentes na aula sobre dimensões espaciais.



Fonte: Arquivo pessoal.

Na parte final da atividade sobre dimensões espaciais, como forma de aplicação dos conceitos estudados, os estudantes foram solicitados a fazerem a classificação das formas segundo o número de dimensões associadas. De forma aleatória os estudantes foram selecionando em qual grupo cada objeto deveria ser posicionado. A Figura 43 mostra os objetos organizados pelos estudantes.

Figura 43 – Organização dos materiais segundo o número de dimensões.



Fonte: Arquivo pessoal.

Durante a classificação dos materiais buscou-se questionar a escolha de determinado grupo, levando os estudantes a fazerem uso da argumentação. Dentre e

os objetos, a esfera gerou mais debates para sua classificação, por não ter partes planas, alguns estudantes tiveram dificuldade em perceber as três dimensões. Nesse momento foi oportuno retomar o contexto de Planolândia no episódio da visita da esfera ao mundo bidimensional.

Ao todo a atividade necessitou de quatro aulas, sendo duas para levantamento dos conhecimentos, duas para apresentação de Planolândia e discussão dos conceitos com a classificação dos objetos. A Figura 43 mostra que os estudantes conseguiram associar a quantidade de dimensões presentes nos objetos e espera-se que essa noção os ajude no entendimento de novos conceitos ligados à descrição geométrica.

Apesar da ideia de identificar o número de dimensões não ser algo muito complexo, a realização dessa atividade permitiu identificar deficiências na formação dos estudantes quanto ao conceito de dimensão espacial. Com os debates e reflexões os estudantes adquiriram maior familiaridade com o tema sendo verificado o domínio na aplicação do conceito por meio da atividade de organização dos materiais.

5.2 PLANIFICAÇÃO DO CÉU

Nas nossas atividades diárias, frequentemente precisamos estabelecer referenciais para descrever posicionamentos e informar a localização, seja de pessoas ou objetos. Esse processo é tão natural que muitas vezes passa despercebido, porém é indispensável para uma correta representação do espaço. Deste modo, essa atividade consistiu em promover o estudo do plano cartesiano por meio do estabelecimento de um sistema de referência com eixos coordenados (x, y) para a determinação do posicionamento de pontos utilizando-se os pares ordenados. A ideia aqui proposta pretende, a partir da imagem da constelação do Cruzeiro do Sul, representar esta constelação em um sistema de coordenadas cartesianas, localizando cada estrela da constelação. Desse modo, tornara assim possível associar o estudo do plano cartesiano a uma aplicação na Astronomia.

A atividade PLANIFICAÇÃO DO CÉU foi aplicada em uma turma de primeiro ano com 40 estudantes. Uma característica a ser destacada dessa turma é que os estudantes são, predominantemente, da zona urbana do município. Por meio de um

debate foi feito o levantamento inicial das constelações conhecidas pelos estudantes. Observou-se a que “As Três Marias” foi a mais citada, apesar não ser exatamente uma constelação e sim parte integrante da constelação de Órion. Ao destacar esse aspecto foi oportuno apresentar a definição de constelação como um agrupamento aparente de estrelas em uma dada região do céu. Os estudantes manifestaram interesse pelo tema, com questionamentos sobre fim da vida do Sol e estrelas cadentes.

Utilizando elementos presentes na sala de aula, como o posicionamento dos estudantes em relação a porta, foi discutida a ideia de referência e como as medidas de distâncias mudam dependendo do referencial adotado. Em seguida foi lembrado com os estudantes a construção do plano cartesiano, fazendo-se a determinação das coordenadas de pontos em diversos quadrantes. Foi apresentado o contexto de Planolândia como forma de aplicar o conceito de espaço bidimensional, enfatizou-se a limitação de movimentos de um habitante de Planolândia, restrito a duas dimensões.

Em seguida foi disponibilizado para os estudantes uma representação da constelação do Cruzeiro do Sul (Figura 23) com uma tabela em branco, para que os estudantes pudessem associar o posicionamento de cada estrela a um par ordenado. A Figura 44 mostra a tabela preenchida por um dos estudantes. De modo geral os estudantes não tiveram maiores dificuldades em fazer a identificação das coordenadas.

Figura 44 – Identificação das coordenadas x e y das estrelas.

Identifique as coordenadas x e y de cada estrela na tabela abaixo:

Estrela	Eixo x	Eixo y
Alfa α Crux (Magalhães)	0	-7
Beta β Crux (Mimosa)	-4	0
Gama γ Crux (Rubídia)	0	5
Delta δ Crux (Pálida)	3,7...	0,6...
Épsilon ϵ crux (Intrometida)	1,9...	-2

Fonte: Arquivo pessoal.

A utilização das constelações nessa atividade visou mostrar uma aplicação do plano cartesiano, além de motivar o estudante associando-o a um tema de astronomia. Porém, ao apresentar uma constelação com as estrelas dispostas em

um plano, deve-se ter o cuidado para não reforçar que os estudantes tenham uma visão distorcida do céu, na qual as estrelas estão situadas a mesma distância do observador. Com vistas a isto, foi feito um estudo do espaço celeste, buscando identificar inicialmente qual a percepção espacial que os estudantes têm do céu. Para isso foram disponibilizados diversos objetos feitos de isopor como esferas brancas e coloridas, discos, meia lua, representações de estrelas, entre outros, como mostra a Figura 45.

Figura 45 – Materiais disponibilizados para o estudo do céu.



Fonte: Elaborados pelo autor.

Como forma de representar o céu que imaginam, os estudantes escolheram dentre os diversos materiais quais deles melhor representavam o tamanho e a forma do Sol, da Terra, da Lua e Estrelas e em seguida posicionaram em barbantes suspensos no teto. Com isso foi possível discutir as posições dos astros, sistemas de referência, modelos de Sistema Solar e fenômenos como fases da Lua e estações do ano.

A construção do Sistema Solar ocorreu durante uma aula de 50 min, sendo que para cada astro representado buscava-se discutir coletivamente sua forma, distância, movimento e fenômenos associados. Começando a montagem pela Terra, uma das estudantes se prontificou a fazer a escolha e posicionar. Foi escolhida uma esfera de 50 mm de diâmetro, porém alguns estudantes argumentaram que a mesma deveria representar o Sol, já que se tratava de uma das maiores disponíveis. Assim entraram em consenso de escolher uma de 15 mm de diâmetro. Houve dúvidas quanto ao posicionamento se no centro ou não, após alguns colegas

argumentarem que no centro deve estar o Sol, a esfera da Terra foi posicionada um pouco deslocada. Essa dificuldade é frequentemente observada, pois muitos movimentos percebidos pela humanidade são relativos, exigindo uma noção elaborada do espaço.

Em seguida escolheram uma esfera de 50 mm para representar o Sol e uma outra de 5 mm para a Lua. Salienta-se não foi feito um estudo das proporcionalidades corretas, apesar disso os estudantes representaram bem estes astros. Em relação aos posicionamentos, foi posto o Sol no centro e a Lua mais próximo da Terra. Nesse momento foram feitos questionamentos sobre a ocorrência do dia e da noite e fases da Lua. A Figura 46 mostra os estudantes participantes atrás da montagem realizada pelos mesmos.

Figura 46 – Estudantes participantes na atividade planificação do céu.



Fonte: Elaborados pelo autor.

Com o posicionamento dos astros os estudantes revelaram algumas dificuldades como a de posicionar a Terra fora do centro e de distinguir entre distância de estrelas e planetas. Apesar de muitas vezes os estudantes afirmarem que no Sistema Solar, o Sol está no centro do Sistema Solar (Modelo Heliocêntrico), ao expressar-se por meio do posicionamento dos astros no espaço, a maioria posiciona a Terra no centro, enquanto que os demais astros estão afastados da

Terra e colocados aproximadamente nas mesmas distâncias, sugerindo uma visão geocêntrica. Essas observações foram feitas em testes individuais realizados com alguns estudantes antes da aplicação da atividade na turma.

Para Leite (2006), esse tipo de dificuldade indica uma limitação do ponto de vista, onde os estudantes ao tratarem o Sistema Heliocêntrico carregam concepções geocêntricas, apresentando limitações na busca pelo posicionamento da Terra dentro de uma visão heliocêntrica. Tendo em vista este problema, a superação dessa dificuldade envolve tanto o desenvolvimento de uma visão espacial tridimensional do Sistema Solar quanto uma compreensão das concepções acerca dos modelos cosmológicos Geocêntrico e Heliocêntrico.

Do ponto de vista geométrico, o estudante precisa utilizar a noção espacial tridimensional do Sistema Solar para fazer uma mudança de referencial, desatrelando-se de constatações geocêntricas obtidas com a experiência diária. Essa mudança de referencial é um elemento fundamental na compreensão do espaço, nela o estudante sai de uma visão da parte para uma visão do todo, fazendo uso da abstração para a correta interpretação de fenômenos como fases da Lua, dia e noite e eclipses.

Para que essa mudança de referencial ocorra de forma a permitir um correto entendimento acerca dos movimentos dos astros e dos fenômenos celestes é fundamental a compreensão das causas que levaram ao estabelecimento de um Modelo Heliocêntrico em detrimento do Modelo Geocêntrico. Esse aspecto é importante pois o estudante pode carregar consigo apenas uma aceitação ao que é ensinado e mostrado em figuras a respeito do heliocentrismo, sem o completo entendimento do mesmo.

Os modelos Geocêntrico e Heliocêntrico geralmente são apresentados aos estudantes desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, durante o estudo dos movimentos de rotação e revolução realizados pela Terra. Contudo, a formação deficiente de muitos professores em relação aos conteúdos de Astronomia, como sinaliza o trabalho realizado por Leite e Hosoume (2007), compromete a abordagem adequada desses modelos.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular, os estudantes devem desenvolver, durante o Ensino Fundamental, habilidades como *“justificar, por meio da construção de modelos e da observação da Lua no céu, a ocorrência das fases*

da Lua e dos eclipses, com base nas posições relativas entre Sol, Terra e Lua” (BRASIL, 2017, p. 349), além de

“representar os movimentos de rotação e translação da Terra e analisar o papel da inclinação do eixo de rotação da Terra em relação à sua órbita na ocorrência das estações do ano, com a utilização de modelos tridimensionais. (BRASIL, 2017, p. 349).

A busca para explicação desses e outros fenômenos marcaram a história do desenvolvimento dos modelos cosmológicos.

Os primeiros registros dos movimentos dos astros foram feitos pelos povos que se localizaram no Oriente Médio (Babilônia e Níneveh), na região denominada Mesopotâmia. Com destaques para os Egípcios e Chineses, os registros objetivavam ajudar na preparação de horóscopos, prever a posição futura dos astros, determinar a hora e estabelecer calendários. Os primeiros modelos associados a teorias surgiram na Grécia Antiga e buscavam explicações para os fenômenos mais familiares, como a ocorrência do dia e da noite e os eclipses, porém não explicavam os movimentos retrógrados dos planetas (BASSALO, 1990).

Os modelos gregos com maior aceitação foram elaborados por Aristóteles de Estagira (384 a.C. – 332 a.C.) e Cláudio Ptolomeu (90 d. C. – 168 d. C.). Esses modelos cosmológicos foram marcados pela posição privilegiada da Terra, imóvel e ocupando no centro do Universo. Fundamentado em princípios filosóficos o modelo aristotélico utilizava esferas concêntricas para o movimento dos astros ao redor da Terra, porém enfrentava dificuldades para explicar as variações de brilho e velocidade dos planetas. Na busca de explicar os dados observados o modelo de Ptolomeu era baseado no uso do movimento circular (epiciclo) em torno de um certo ponto, que, por sua vez, descrevia uma trajetória circular (deferente) em torno de um outro centro (PORTO; PORTO, 2008).

Após 14 séculos em meio as discussões a respeito da centralidade do Universo são estabelecidas pelo polonês Nicolau Copérnico as ideias para uma revolução no pensamento científico. Para Copérnico, devido seu tamanho, o Sol deveria permanecer imóvel, escrevendo que:

Mas no centro de tudo situa-se o Sol. Quem, com efeito, nesse esplêndido templo colocaria a luz em lugar diferente ou melhor do que aquele de onde ela pudesse iluminar ao mesmo tempo todo o templo? (...) Assim, como que repousando no trono real, o Sol governa a circundante família de astros (KOYRÉ, 2006, P. 32 apud PORTO; PORTO, 2008, p. 4601-4).

Seu modelo foi capaz de calcular com precisão resultados astronômicos, explicando-os de modo mais simples que o empregado pelo modelo ptolomaico. Os trabalhos de Tycho Brahe, Johannes Kepler e Isaac Newton levaram ao estabelecimento do modelo heliocêntrico proposto por Copérnico, rompendo com a ciência aristotélica e definindo um novo paradigma no qual a descrição da natureza era feita por meio de leis matemáticas obtidas com base na experimentação.

A abordagem dos modelos que buscaram explicar os movimentos dos astros e os fenômenos astronômicos deve considerar a evolução do pensamento científico ao longo da história, os fatos que culminaram no desenvolvimento de um sistema heliocêntrico e as implicações no estabelecimento de uma nova ciência.

A interpretação de um céu plano ou a planificação do céu traduz uma necessidade que se origina devido a limitação humana em perceber as distâncias de cada astro. Para fins de entendimento de fenômenos como o movimento diário aparente das estrelas o modelo de uma esfera celeste com os astros na sua superfície satisfaz as observações, porém para uma descrição mais realista é necessário imaginar o céu em um espaço tridimensional. A realização dessa atividade serviu de base para a ampliação da noção de espaço, que será abordada na próxima atividade.

5.3 DISTÂNCIA DAS ESTRELAS

A observação do céu noturno, a partir do mecanismo da visão, não permite avaliar bem as distâncias que nos separa dos astros (LEITE, 2006). A compreensão de suas distâncias e movimentos exige uma noção espacial que não pode ser obtida por meio da observação, para isso pode-se recorrer a modelos que representem de modo mais concreto, facilitando o entendimento.

O debate realizado com os estudantes no início da atividade anterior a respeito da observação do céu indicou que os estudantes eram capazes de identificar especialmente as estrelas conhecidas popularmente como as Três Marias e a Cruz (Cruzeiro do Sul), além de se mostrarem surpresos em saber que alguns dos pontos brilhantes no céu noturno eram planetas. Diante disso, observa-se a necessidade de desenvolver atividades que promovam o estudo do espaço celeste e dos posicionamentos dos astros.

Partindo-se da descrição de uma constelação em um plano realizada na atividade anterior, essa atividade teve como objetivo promover o estudo do espaço tridimensional por meio da investigação das diferentes distâncias das estrelas com a apresentação do método da paralaxe e montagem de uma maquete tridimensional da constelação do Cruzeiro do Sul.

A atividade DISTÂNCIAS DAS ESTRELAS foi realizada com uma turma de primeiro ano do Ensino Médio com 34 estudantes. Nessa série os estudantes passam a utilizar-se de gráficos com mais frequência, pois iniciam o estudo de diversas funções. Já em Física as representações gráficas são fundamentais para o estudo de conteúdos como o movimento uniforme e o movimento uniformemente variado, geralmente estudados nessa mesma série.

A atividade teve duração de três aulas, sendo uma para aplicação das questões iniciais e apresentação de Planolândia e outras duas para explicação dos conceitos de paralaxe, sistema de coordenadas tridimensionais (x,y,z) e construção da maquete tridimensional.

Com os questionamentos iniciais buscou-se fazer um levantamento de como os estudantes imaginam o posicionamento dos astros no céu. Foram feitas duas afirmações sobre as distâncias dos astros. A primeira busca identificar se os

estudantes possuíam uma visão espacial correta do posicionamento das estrelas. Os resultados para essa afirmação é apresentado no Gráfico 4.

Gráfico 4 – Respostas dos estudantes sobre a distâncias das estrelas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na afirmação que gerou o Gráfico 4 buscou-se identificar principalmente se os estudantes conseguiam demonstrar conhecimento espacial relativo as distâncias entre as estrelas de uma mesma constelação. Praticamente metade dos estudantes, apesar de concordarem que as estrelas estão distantes, acreditam que as estrelas estão próximas umas das outras numa dada constelação. Esses resultados revelam uma visão distorcida do céu, construída apenas por meio da observação direta, uma vez que percebemos as estrelas de uma constelação separadas por pequenos ângulos.

Com a segunda afirmação buscou-se identificar se os estudantes discordavam que os planetas vistos no céu estavam tão distantes quanto as estrelas. O Gráfico 5 mostra os resultados obtidos nessa questão.

Gráfico 5 – Respostas dos estudantes sobre diferenças das distâncias entre planetas e estrelas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando vistos no céu, estrelas e planetas aparecem “juntos”, como pontos brilhantes. A análise das respostas mostradas no Gráfico 5 indica que a maioria dos estudantes não fazem a distinção entre localização dos planetas e das estrelas. Essa concepção pode ser reforçada em muitas imagens de livros didáticos e outras fontes, pois é comum aparecer pontos brilhantes entre os planetas nas representações.

Durante o questionário alguns estudantes mostraram-se surpresos ao saber que podemos observar alguns planetas no céu a noite, mesmo sem uso de lunetas ou telescópios. Esse fato indica a necessidade de se associar temas de Astronomia aos conteúdos de Ciências desde as séries iniciais, com discussões que estimulem a curiosidade, observação e investigação dos fenômenos naturais.

Aproveitando-se do entusiasmo dos estudantes com as discussões a respeito da possibilidade de vermos até cinco planetas diferentes no céu noturno, sem o auxílio de equipamentos, buscou-se estimular a prática da observação apresentando-se como fazer a diferenciação entre planetas e estrelas. Por conta da proximidade, a luz refletida pelos planetas não sofre muita interferência ao atravessar as camadas atmosféricas, no caso das estrelas essa interferência provoca uma cintilação aparente. Além disso, alguns planetas como Marte

apresentam uma coloração diferente, devido a absorção de certos comprimentos de ondas em sua atmosfera.

Relembrando a atividade de determinação dos pares ordenados de uma constelação foi levantado o seguinte questionamento: *como podemos determinar a distância de uma estrela?* Com isso foi apresentado o conceito de paralaxe e como usamos a visão estereoscópica para avaliar a distância de objetos no nosso cotidiano. Foram feitos testes rápidos nos quais os estudantes fecham um dos olhos e tentam tocar algo na sua frente, como o dedo indicador do colega. A perda da percepção da profundidade é evidenciada pela dificuldade que os estudantes encontraram em executar o teste, deixando-os surpresos.

A paralaxe estelar, também chamada de paralaxe heliocêntrica (Figura 9), é apresentada como um dos métodos possíveis para o cálculo das distâncias das estrelas, seguindo-se da avaliação de uma situação-problema envolvendo a representação de estrelas em dois momentos distintos. Os deslocamentos aparentes revelam quais estão mais próximas ou mais distantes.

Com a constelação do Cruzeiro do Sul impressa e de posse dos dados relativos às distâncias de cada estrela, foram feitas as conversões de anos-luz para centímetros, estabelecendo-se o tamanho de cada palito a ser fixado na maquete. Para a montagem da constelação 3D foram divididos grupos com 3 ou 4 estudantes, visando o trabalho colaborativo e o compartilhamento de materiais. A Figura 47 mostra um dos grupos durante a montagem da maquete.

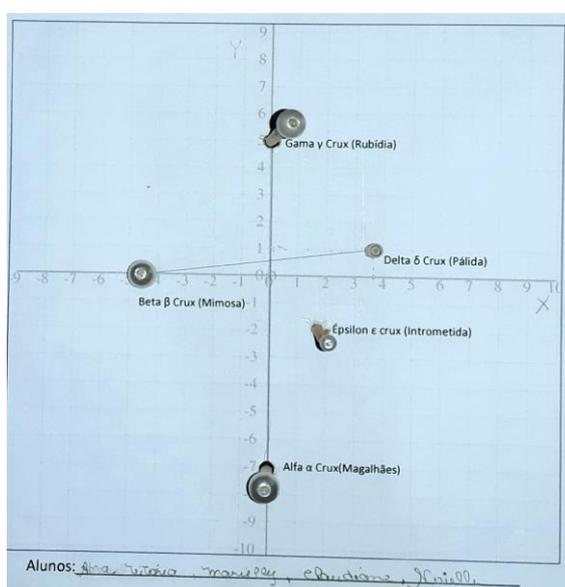
Figura 47 – Estudantes montando um modelo tridimensional de constelação.



Fonte: Arquivo pessoal.

Para a construção da maquete foi distribuído um pedaço retangular de folha de isopor com espessura de 15 mm, palitos de churrasco e missangas de vários tamanhos. A partir de uma imagem da constelação os estudantes comparavam o brilho de cada estrela e selecionava o tamanho da missanga que melhor representava a referida estrela. A Figura 48 mostra a vista frontal de uma das maquetes feita pelas estudantes.

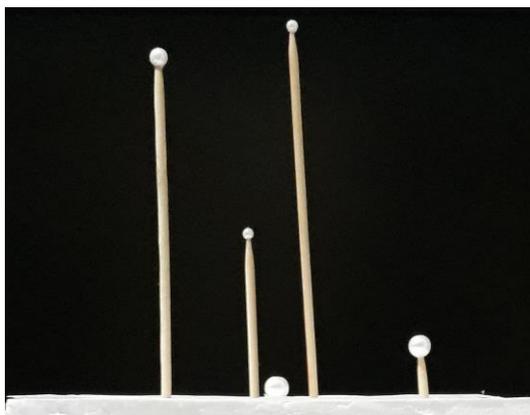
Figura 48 – Maquete tridimensional da constelação do Cruzeiro do Sul.



Fonte: Arquivo pessoal.

Com as maquetes prontas foi possível discutir a ideia de projeção no plano como meio de formar uma constelação. Aplicando o conceito de ano-luz os estudantes analisaram a posição das estrelas na maquete, imaginando-se que a Terra estaria localizada a 20 cm do plano da maquete. Para a estrela Épsilon Crux (Intrometida), a luz leva em média 58 anos para chegar até a Terra, já para estrela Beta Crux (Mimosa) esse tempo é de 424 anos. Observando a maquete pelas laterais (Figura 49) percebe-se que a disposição das estrelas nas constelações depende do ponto de observação, e como a vemos é uma percepção particular da Terra.

Figura 49 – Vista lateral da maquete da constelação do Cruzeiro do Sul.



Fonte: Arquivo pessoal.

Acreditamos que ao compreender melhor como os astros estão no céu o estudante amplia a noção de espaço, passando a atribuir novos significados e podendo mobilizá-los em outros momentos. Os resultados das questões evidenciam a necessidade de discussões a respeito da distância das estrelas e como são projetadas numa determinada área do céu. O uso da maquete permite sair do plano da imaginação para visualização concreta, facilitando o entendimento.

Este tipo de construção envolvendo a constelação do Cruzeiro do Sul e outras constelações podem ser encontrados nos trabalhos desenvolvidos por Longhini (2009), Renner (2018), Silva, Ribas e Freitas (2008), entre outros. Trabalhos dessa natureza, além de possibilitar que o professor aborde o conteúdo de uma perspectiva teórica, auxilia o estudante na interpretação do espaço, tornando um conhecimento abstrato em algo concreto. Outro aspecto relacionado é que esse tipo de construção pode provocar um aumento no interesse do aluno, favorecendo a aprendizagem (RENNER, 2018).

A realização dessa atividade proporcionou uma abordagem do conceito de constelação numa perspectiva de ampliação da ideia de que uma constelação é apenas um simples “agrupamento de estrelas”, permitindo a visualização a partir de outros ângulos e ajudando no desenvolvimento da compreensão de espaço tridimensional.

5.4 DANDO FORMAS ÀS SOMBRAS

O reconhecimento de elementos planos em sólidos e representações tridimensionais permite o melhor entendimento e descrição do espaço. Partindo-se desse pressuposto, essa atividade teve como objetivo promover o reconhecimento de formas geométricas planas e identificação de sólidos a partir da projeção de suas sombras. Buscou-se levar estudantes a fazerem a investigação das informações contidas nas sombras de sólidos, estabelecendo assim, as características geométricas que o determinam.

A atividade DANDO FORMAS ÀS SOMBRAS foi aplicada em uma turma de segundo ano contendo 30 participantes. Nesta série do Ensino Médio os estudantes do Colégio Estadual de Barrocas concentram os estudos nos conteúdos de sequências, matrizes e trigonometria, sendo a parte de Geometria Espacial estudada na série seguinte.

As sombras geralmente são formadas quando a propagação dos raios de luz é bloqueada por um corpo de características opacas, que impede a passagem da luz por seu interior. Geometricamente as sombras podem ser entendidas como a projeções de objetos de um espaço em outro, preservando-se algumas características relacionadas aos seus contornos. Assim, dependendo do ângulo de incidência dos raios, a sombra de um cilindro pode projetar num plano a forma de um círculo ou de um retângulo. Utilizando-se desse aspecto pode-se tanto fazer a identificação das formas planas projetadas quanto inferir sobre as características dos objetos que têm suas sombras projetadas.

A formação de figuras por meio das sombras de objetos e após passar por aberturas é discutida por Hon e Zik (2007). Para evitar os efeitos de penumbra apresentados pelos autores foi utilizada uma lanterna com apenas um LED branco, que pode ser considerada uma fonte pontual de luz. A pequena distância entre o objeto e o anteparo (aproximadamente 10 cm) no qual a sombra foi projetada também permitiu maior nitidez nas projeções.

Os estudantes geralmente estudam as formas planas e espaciais básicas nas séries iniciais do Ensino Fundamental, desse modo essa atividade fornece informações sobre o quanto os estudantes conseguem expressar os conhecimentos apresentados para eles em níveis anteriores.

Após uma discussão sobre propriedades das formas planas com a apresentação de Planolândia e como a projeção de sombras ocasiona a formação de eclipses, foi apresentado o aparato denominado de projetor de sombras. Cada estudante recebeu um questionário e na medida que as projeções eram feitas deveriam responder a respeito de qual figura geométrica estava vendo e que objeto poderia produzir a respectiva sombra. Em seguida girava-se o suporte sobre o qual estava o sólido e uma nova sombra era projetada.

Os questionários foram preenchidos pelos estudantes a medida que as sombras eram projetadas pelo professor. A Figura 50 mostra um exemplo de projeção no qual o sólido utilizado foi um cone.

Figura 50 – Sombra projetada por um cone.



Fonte: Arquivo pessoal.

A Tabela 1 mostra a relação entre a sombra projetada pelos sólidos dentro do aparato e as respostas dos estudantes. As respostas foram classificadas como satisfatória ou não satisfatória devido os estudantes, em alguns casos, a partir da segunda sombra projetada informarem de forma precipitada o sólido ou possível objeto que estava projetando as sombras, mesmo o questionamento sendo “*que figura geométrica você está vendo?*”

Tabela 1 – Relação entre sombra projetada e respostas dos estudantes.

Objeto	Sombra Projetada	Satisfatória	Não satisfatória
Cilindro	Círculo	25	5
Cilindro	Retângulo	29	1
Cubo	Quadrado	27	3
Cubo	Retângulo	16	14

Fonte: Elaborada pelo autor.

Dentre as respostas apresentadas na Tabela 1 observa-se que há dificuldade na diferenciação entre quadrado e retângulo, sendo que 14 estudantes ao observar um retângulo escreveram que a figura se tratava de um quadrado. Apesar de todo quadrado também fazer parte do grupo dos retângulos, nem todo retângulo é um quadrado. Essa dificuldade também foi verificada por Adauto (2018) com estudantes de uma escola pública de Pernambuco.

Espera-se que a aquisição da linguagem matemática ocorra desde as primeiras séries do Ensino Fundamental, permitindo que o estudante possa ler e escrever, interpretar e compreender os signos e símbolos específicos da área (SILVA et al., 2016). A falta de clareza no uso dos termos revela uma lacuna na formação do estudante, que conseqüentemente apresentará dificuldades em usar propriedades dessas figuras para compreender informações e enunciados, fazer representações, deduções, interpretar de situações, além de dificultar o desenvolvimento do pensamento geométrico. Com isso buscou-se utilizar as características do personagem principal de Planolândia (Quadrado), destacando-se as propriedades particulares que o definem e diferenciando de outros retângulos. Acredita-se que a superação dessa e de outras dificuldades envolve um trabalho conjunto entre professores, numa perspectiva de alfabetização matemática.

5.5 O ESPAÇO SEGUNDO A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A relação entre descrição dos fenômenos físicos com a interpretação do espaço no qual os fenômenos acontecem passou por mudanças ao longo da

história. Para a Mecânica Clássica o espaço é interpretado como algo absoluto, ou seja, não possui relação de dependência com os objetos contidos nele ou com ocorrência dos fenômenos. Com o estabelecimento de ideias relativísticas como a não simultaneidade e o princípio da equivalência das leis físicas Einstein apresenta uma nova interpretação para o espaço, que pode, juntamente com o tempo, ser modificado pela ação de campos gravitacionais. Deste modo, essa atividade buscou, essencialmente, proporcionar aos estudantes uma reflexão sobre a interpretação do espaço dada pela Teoria da Relatividade Geral.

A atividade O ESPAÇO SEGUNDO A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL foi aplicada em uma turma de segundo ano contendo 34 participantes. Os estudantes da referida turma fizeram o estudo da Teoria da Gravitação Universal de Newton no ano anterior, sendo essa atividade uma oportunidade de ampliar o conhecimento dos estudantes a respeito da interpretação para a gravidade bem como desenvolver novas concepções de espaço geométrico.

Os resultados obtidos na primeira parte do questionário (Figura 27) mostram que os cientistas mais reconhecidos pelos estudantes formam: Albert Einstein (100% dos estudantes), Stephen Hawking (64,7%) e Isaac Newton (41,2%). A imagem de Einstein foi reconhecida por todos os estudantes, sendo esse um resultado esperado, já que é muito veiculada em diversas mídias e em livros didáticos ou não. A maioria dos estudantes também reconheceram o físico Britânico Stephen William Hawking que teve sua imagem veiculada recentemente, seja pela repercussão de suas teorias ou pela notícia de sua morte em 2018. No caso de Isaac Newton, o reconhecimento de parte dos estudantes pode estar relacionado ao estudo de suas leis e teorias em séries anteriores.

Apesar de todos os estudantes reconhecerem a figura de Albert Einstein, apenas 4 afirmaram conhecer a TRG e informaram corretamente que a mesma dá conta de explicar o movimento de grandes massas no espaço, como planetas próximos de estrelas. Esse resultado indica uma necessidade de se abordar as teorias mais contemporâneas, visando uma maior aproximação entre o que o estudante vê nas aulas e o que ele tem acesso em outros espaços.

No decorrer da atividade foi retomada a interpretação Newtoniana para a gravidade, enfatizando-se o problema da instantaneidade da ação à distância, quando considerada a velocidade da luz como a maior possível. Abordou-se

também a dificuldade encontrada por essa teoria ao tentar explicar a precessão do periélio do planeta Mercúrio, evidenciando a necessidade de uma nova interpretação para a ação gravitacional.

Diante das discussões foi apresentada elementos da TRG a partir de demonstrações feitas na malha deformável (Figura 36). Inicialmente foi colocada uma esfera de pequena massa, sendo visualizada uma pequena deformação. Em seguida a esfera de pequena massa foi substituída por uma esfera de massa maior, produzindo uma maior deformação no tecido. Dessa forma foi possível iniciar a discussão a respeito de como a deformação do espaço-tempo depende da quantidade de massa ou de energia.

Voltando-se ao problema da precessão do periélio do planeta Mercúrio, foram feitas demonstrações utilizando-se uma esfera de massa menor girando em torno de uma esfera de massa maior, representando o planeta Mercúrio e o Sol, respectivamente. O aparato experimental foi posicionado no centro da sala (Figura 51), possibilitando uma melhor visualização aos estudantes.

Figura 51 – Registro da atividade com uso de representação bidimensional do tecido do espaço-tempo.



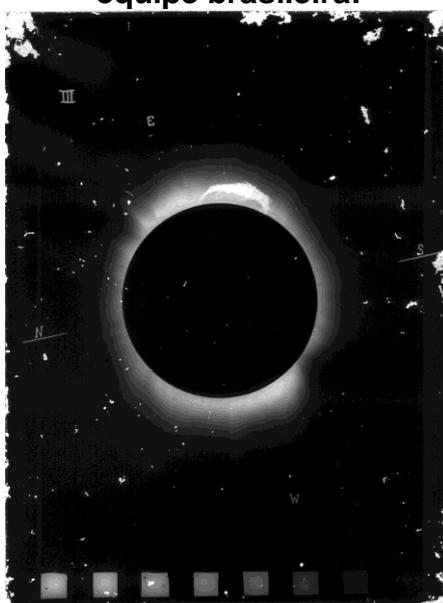
Fonte: Arquivo pessoal.

Com o aparato foram feitas demonstrações relativas ao movimento dos planetas em torno do Sol e da Lua em torno da Terra. Um dos estudantes ao ver que

as esferas que representavam os planetas à medida que giravam “caiam” em direção a esfera central que representava o Sol questionou: “porque com os planetas não acontece a mesma coisa? ”. Foi esclarecido que o aparato se tratava de um modelo e que as esferas à medida que giravam perdiam energia cinética devido ao atrito com a malha e que, no caso dos planetas, não existe atrito para que tenham energia cinética dissipada.

Na parte final da atividade foram discutidas algumas consequências da nova interpretação da gravidade, como a mudança na trajetória da luz próximo de uma região de grande massa e a formação de lentes gravitacionais. Nas discussões sobre a mudança na trajetória da luz foi apresentado como a observação do eclipse em Sobral no Ceará ajudou na confirmação da TRG utilizando uma animação que representa o deslocamento aparente das estrelas. A Figura 52 mostra um registro do eclipse feito pela equipe brasileira.

Figura 52 – Imagem do eclipse solar de 29 de maio de 1919, foto tirada pela equipe brasileira.



Fonte: MAST⁵

De acordo com a TRG, um raio luz terá sua trajetória desviada pela deformação do espaço, dessa forma esse desvio da luz foi explicado utilizando-se a malha deformável. Devido ao número de dimensões a deformação na malha não

⁵ MAST - Museu de Astronomia e Ciências Afins.
Link Acessado: <http://www.mast.br/sobral/eclipse.html>

corresponde exatamente ao que acontece na realidade, pois na malha essa deformação é apenas bidimensional. Supondo que a malha fosse uma representação de Planolândia, as deformações alterariam as medidas de espaço e de tempo, caso um habitante estivesse num local deformado.

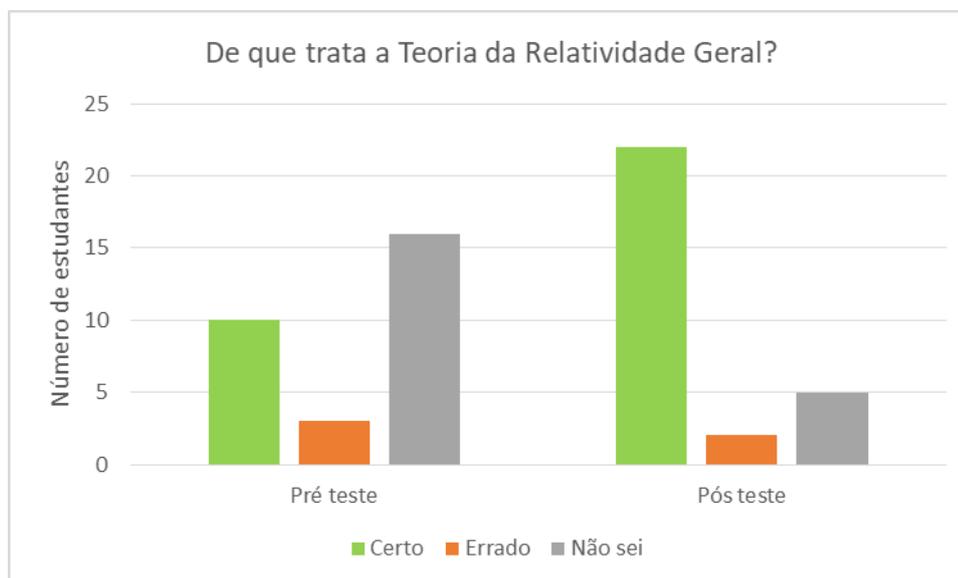
No nosso universo a deformação ocorre nas três dimensões espaciais e no tempo, podendo ser verificada na formação de lentes gravitacionais em torno de corpos supermassivos, como os aglomerados de galáxias. Para possibilitar o melhor entendimento desse fenômeno foi utilizado o aparato (Figura 38) cujo objetivo é a representação de uma lente gravitacional. A Figura 53 mostra uma estudante utilizando o aparato.

Figura 53 – Estudante visualizando uma representação de lente gravitacional.



Fonte: Arquivo pessoal.

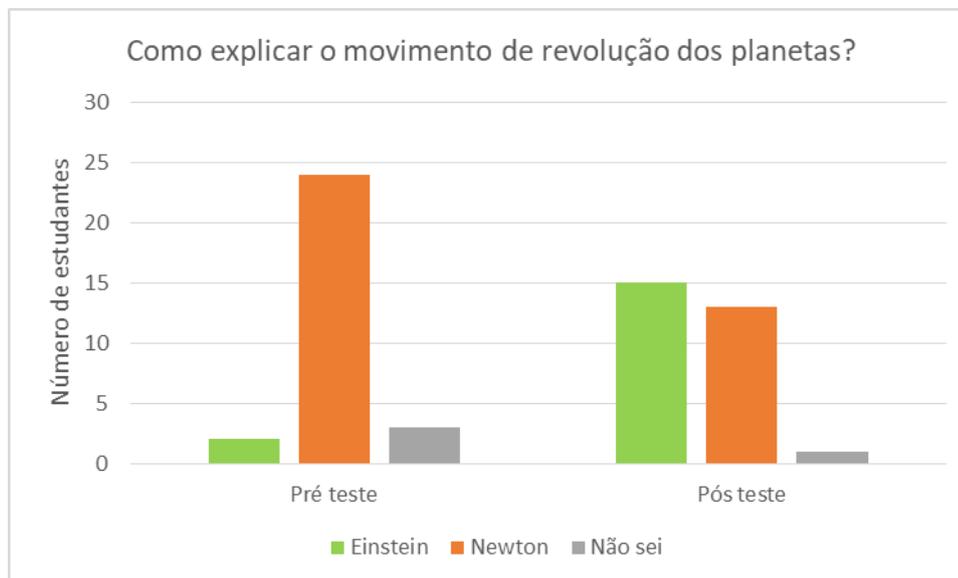
Ao final da atividade os estudantes responderam algumas questões a respeito do tema abordado e dos materiais utilizados durante a atividade. As duas primeiras questões também faziam parte do questionário inicial e foram inseridas com o objetivo de verificar alguma mudança quanto a compreensão dos estudantes a respeito da TRG. Os resultados comparativos estão apresentados no Gráfico 6 e Gráfico 7.

Gráfico 6 – Respostas dos estudantes sobre TRG.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em uma das questões os estudantes deveriam indicar do que a TRG trata. As opções envolviam o movimento das pequenas partículas; o movimento de grandes massas no espaço ou a composição das estrelas. Os estudantes ainda tiveram como opção a resposta não sei. Como mostra o Gráfico 6, no pré-teste a maior parte dos estudantes respondeu que não sabia. Esse resultado indica que os estudantes não passaram por momentos de discussões na vida escolar a respeito da referida teoria.

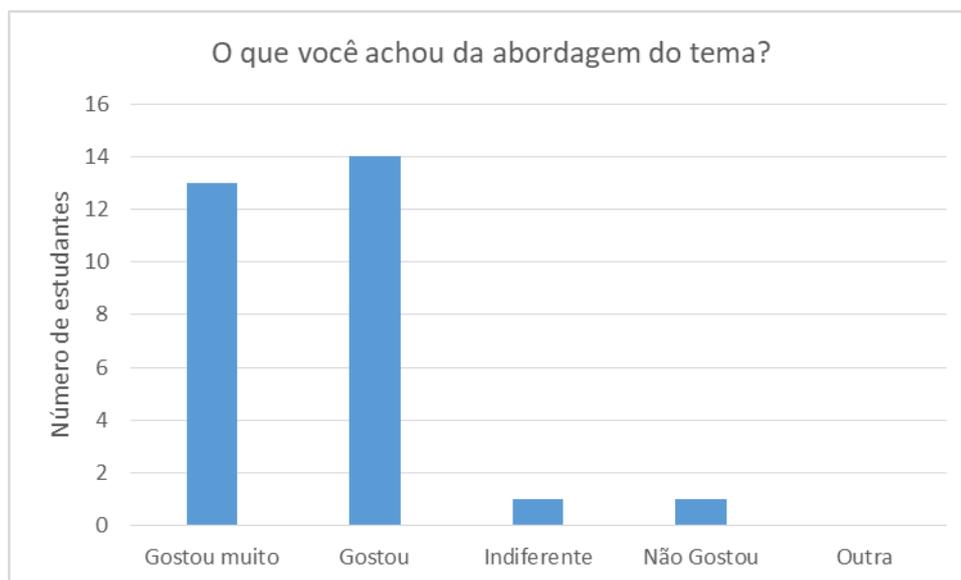
No segundo questionário, realizado após as discussões e demonstrações, percebe-se que houve uma mudança significativa com uma diminuição do número de respostas “não sei” e aumento do número de respostas indicando que a referida teoria explica o movimento de grandes massas no espaço. Em outra questão buscou-se identificar como os estudantes explicam o movimento de revolução dos planetas e da Lua. Os resultados estão apresentados na Gráfico 7.

Gráfico 7 – Respostas dos estudantes sobre movimento dos planetas.

De acordo com os dados apresentados no Gráfico 7, as respostas iniciais dos estudantes se basearam, em sua maioria, na teoria formulada por Isaac Newton em que devido suas massas, os corpos se atraem com forças de natureza gravitacional, o que mantém os corpos presos em suas órbitas. Após as discussões as respostas dos estudantes passaram a considerar também uma nova explicação, na qual a presença de uma grande massa deforma o espaço-tempo, que determina a trajetória de outros corpos e da luz.

Durante as explicações sobre o processo de formulação da teoria de Einstein buscou-se abordar a teoria clássica com o devido cuidado de não a tratar como um corpo de conhecimentos em desuso, apesar de não explicar alguns fenômenos. Essa abordagem pode ter levado alguns estudantes a permanecerem com explicações da teoria newtoniana.

Com questionário aplicado no final da atividade também buscou-se identificar quais as impressões dos estudantes sobre o tema abordado e os materiais utilizados. Sobre a abordagem do tema os estudantes indicaram o nível de satisfação com a atividade. Os resultados dessa questão estão apresentados no Gráfico 8.

Gráfico 8 – Respostas dos estudantes sobre a abordagem do tema.

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com as respostas dos estudantes mostradas no Gráfico 8, a abordagem do tema por meio da interpretação de duas teorias diferentes para explicação dos fenômenos relativos a gravitação universal teve uma recepção positiva. A maioria dos estudantes marcou a opção gostou ou gostou muito, evidenciando que é possível envolver o estudante mesmo quando a temática exige certo grau de abstração. A Figura 54 mostra o registro de uma das estudantes que, de forma espontânea, manifestou seu entusiasmo sobre as atividades.

Figura 54 – Comentário de uma estudante sobre a atividade.

O que você achou da abordagem desse tema?

Gostei muito. Física é muito bom! Tenho uma visão mais avançada, principalmente sobre o espaço.

Gostei.

Indiferente.

Não gostei.

Outra: _____

Em relação ao entendimento do tema, o que você achou dos materiais utilizados?

Ajudou muito.

Ajudou pouco.

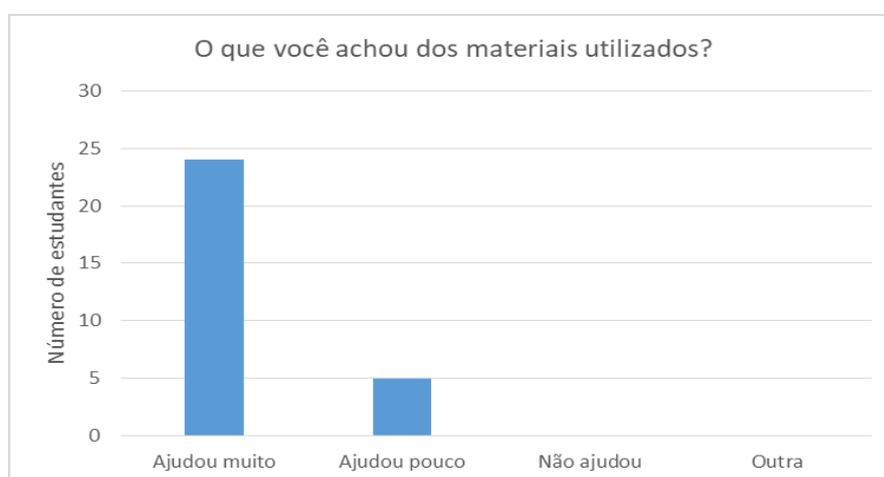
Não ajudou.

Outra: _____

Fonte: Arquivo pessoal.

A atividade envolveu a discussão de alguns elementos que exigem o uso da abstração por se tratar de fenômenos que não podem ser observados diretamente pelos estudantes como a deformação tridimensional do espaço, movimento dos planetas e desvio na trajetória da luz. Para possibilitar uma melhor visualização destes fenômenos foram utilizados a malha deformável e a representação de uma lente gravitacional, que permitiram representar a partir de demonstrações os referidos fenômenos. Em relação ao uso desses recursos materiais durante a atividade, o Gráfico 9 mostra a opinião dos estudantes.

Gráfico 9 – Respostas dos estudantes sobre os materiais utilizados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise das respostas descritas no Gráfico 9 revela que 24 estudantes (82,7%) indicaram que os materiais ajudaram muito e cinco estudantes indicaram que ajudou pouco. Nenhum dos estudantes marcou que não ajudou. Esses resultados indicam que o uso dos recursos manipuláveis para representar os fenômenos de deformação do espaço, associados ao contexto histórico e relações com Planolândia, ajudaram na abordagem da concepção de espaço deformável.

Como uma síntese das atividades aplicadas, a Tabela 2 mostra os dados de aplicações de cada atividade. Os principais objetivos de cada atividade estão traduzidos nas expectativas de aprendizagem.

Tabela 2 – Dados das aplicações das atividades.

Atividade	Expectativas de aprendizagem	Número de Aulas	Turma	N. de Participantes
Reconhecendo as Dimensões.	Reconhecer as dimensões espaciais associadas a objetos e representações.	4	1º ano C	31
Planificação do Céu.	Utilizar sistemas de referências e associar pontos em um plano às suas coordenadas.	2	1º ano B	40
Distâncias das Estrelas.	Compreender a profundidade como dimensão espacial que compõe o espaço tridimensional. Compreender que as estrelas estão a diferentes distâncias de nós e são projetadas na esfera celeste.	3	1º ano B	34
Dando Formas às Sombras.	Reconhecer formas geométricas planas e espaciais e compreender a formação de sólidos por meio de suas figuras planas laterais.	2	2º ano A	30
O Espaço Segundo a Teoria da Relatividade Geral.	Compreender a concepção de espaço deformável e investigar como a luz se propaga no espaço-tempo.	3	2º ano A	34

Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo geral, as estratégias e os recursos materiais utilizados permitiram a abordagem de conceitos de Geometria e Astronomia ligados à espacialidade, promovendo o envolvimento dos estudantes. Além dos materiais já descritos, foram utilizadas apresentações em slides, como material de apoio nos momentos de explicação. As principais dificuldades encontradas dizem respeito a utilização de aparatos individuais, como a caixa com fenda e o simulador de lente gravitacional, em turmas com grande quantitativo de estudantes, sendo necessário uma rotatividade do aparato, implicando em pouco tempo de manipulação.

6 ATIVIDADES PROPOSTAS NO PRODUTO EDUCACIONAL (CADERNO DE ATIVIDADES)

As leituras realizadas durante a fase de revisão de literatura e as aplicações experimentais possibilitaram a criação do produto educacional denominado caderno de atividades. Essa seção é destinada a apresentação das atividades que compõe o referido produto, buscando-se evidenciar os objetivos e estratégias para cada atividade.

Os experimentos e atividades foram desenvolvidos tendo como eixo norteador o estudo do espaço geométrico em variados aspectos. Com contribuições motivadas pela leitura do livro Planolândia, a constituição das atividades envolve tanto pensamentos mais simples como os mais complexos, tanto situações vivenciais como raciocínios mais abstratos.

Como descritas no quadro a seguir, as sugestões de atividades visam a ampliação da noção de espaço bi e tridimensional bem como o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes, contribuindo assim para o alcance de habilidades associadas a percepção, imaginação e abstração. São abordadas questões como: *em quantas dimensões espaciais vivemos? Quantas dimensões espaciais percebemos? Como ocorre essa percepção? Como são percebidos os astros? Como é feita a representação do espaço?* Tais questões muitas vezes não são tratadas durante a Educação Básica, porém são fundamentais para o melhor entendimento do espaço.

Quadro 1 – Atividades propostas no Caderno de Atividades.

Atividade	Objetivo	Conteúdos	Série	Estratégia
01: Reconhecendo as dimensões	Identificar o número de dimensões espaciais em objetos e representações de figuras em uma, duas ou três	Dimensões espaciais, formas planas e espaciais.	2º Ano	Apresentar as principais características de Planolândia como forma de introdução ao estudo das dimensões. Em seguida discutir como as dimensões estão associadas a elementos matemáticos como eixos, planos, formas geométricas e representações espaciais. Por fim os estudantes devem fazer o reconhecimento do número de

	dimensões.			dimensões em objetos e representações.
02: Reconhecendo formas planas	Identificar figuras planas e suas características a partir de seções em sólidos.	Figuras geométricas planas.	3º Ano	Utilizar o episódio da visita da esfera a Planolândia para estimular os estudantes a imaginar como se seções em sólidos podem gerar figuras geométricas conhecidas. Fazer seções em sólidos identificando e caracterizando as formas geradas.
03: Dando formas às sombras	Identificar formas planas e sólidos por meio da projeção das sombras.	Sólidos e projeções	3º Ano	O professor utiliza o projetor de sombras fazendo projeções de diferentes ângulos. Seguindo o questionário o estudante deverá identificar e escrever o nome da figura plana que está vendo. Por meio da rotação o estudante poderá ver as diversas sombras geradas e inferir qual sólido está projetando a sombra. Com isso o estudante identifica as figuras e sólidos e suas características.
04: Planificação do Céu	Discutir a representação de pontos no plano por meio de pares ordenados.	Coordenadas cartesianas, eixos, planos e projeções.	5º Ano	Com a constelação impressa, os estudantes devem usar o sistema de referência com dois eixos perpendiculares e identificar as posições de cada estrela no plano, escrevendo o par ordenado associado em uma tabela.
05: Onde está a terceira dimensão espacial?	Entender como a profundidade é percebida pelo mecanismo visual e como isso permite avaliar a distância de um objeto.	Espaço tridimensional e visão estereoscópica	6º Ano	Realizar testes utilizando apenas um dos olhos visando proporcionar a perda da percepção da profundidade. Com isso apresentase o fenômeno de paralaxe e a necessidade de se observar um objeto ou paisagem por mais de um ângulo para se obter uma visão tridimensional. Pode-se usar como exemplo um dos métodos utilizados na construção de conteúdo digital em 3D, o qual cada cena é filmada simultaneamente por câmeras em ângulos diferentes. Ao final os estudantes devem visualizar a formação de imagens

				tridimensionais no estereoscópio.
06: O espaço celeste	Identificar a concepção de espaço celeste dos estudantes e refletir sobre fenômenos como as fases da Lua e estações do ano.	O espaço celeste, projeção na esfera celeste e movimento aparente.		Solicitar que os estudantes posicionassem os principais astros do Sistema Solar no espaço. Para essa atividade os estudantes devem escolher dentre diversos materiais como esferas, discos, representações planas, meias-luas etc., quais deles melhor representam o tamanho e a forma do Sol, da Terra, da Lua e Estrelas e em seguida posicioná-los em barbantes suspensos no teto.
07: Distância das Estrelas	Desenvolver a compreensão espacial do posicionamento das estrelas a partir da representação de elementos planos no espaço tridimensional.	Espaço tridimensional e paralaxe.	9º Ano	Com a impressão de uma constelação os estudantes devem estabelecer um sistema de referência com eixos x e y e identificar os pares ordenados de cada estrela. A partir da abordagem da paralaxe apresenta-se a terceira coordenada espacial, a profundidade. Deve-se discutir a necessidade de se utilizar a unidade ano-luz (AL) e como a mesma é definida. A partir das coordenadas de distâncias (z) das estrelas pode-se construir um modelo tridimensional da constelação. Ao final os estudantes deverão verificar, a partir da rotação da maquete, que a constelação como a conhecemos é uma visão a partir do referencial terrestre, caso o referencial mude toda a constelação mudará também.
08: O Espaço Segundo a Teoria da Relatividade Geral	Apresentar a concepção de espaço dada pela Teoria da Relatividade e Geral, refletindo sobre como a luz se propaga.	Espaço deformável, gravidade e lente gravitacional.	1º Ano (Ensino Médio)	Apresentar a concepção de espaço absoluto utilizada pela teoria da gravitação de Newton e o problema de instantaneidade da ação a distância. Em seguida demonstrar a concepção de espaço e gravidade segundo a Teoria da Relatividade Geral por meio do tecido deformável. Por fim apresenta-se como consequência da nova interpretação do espaço o efeito de lente gravitacional, visualizando em uma

				representação com lentes.
09: Diferentes Geometrias	Reconhecer a existência de outras geometrias necessárias para descrição do universo e algumas propriedades topológicas.	Geometria euclidiana e não euclidiana.	1º Ano (Ensino Médio)	Fazer medidas de distâncias entre pontos em uma malha antes e depois de deformá-la colocando-se uma massa sobre ela. Com isso discute-se como a presença de uma massa alterou as medidas e que nem sempre a menor distância entre dois pontos é uma reta. O professor deve enfatizar que apesar das medidas de espaços serem diferentes algumas propriedades topológicas permanecem. O mesmo acontece para um triângulo desenhado em um globo. Ao final deve-se apresentar a faixa de Möbius e realizar cortes para evidenciar suas propriedades.
10: Viagem no Espaço e no Tempo	Promover discussões a respeito da possível viagem rápida no espaço e no tempo.	Viagem no espaço-tempo e buracos de minhoca.	1º Ano (Ensino Médio)	Discutir consequências da Teoria da Relatividade Geral a partir da ideia de viagem no espaço-tempo. Para isso será necessário construir uma ponte que conecte dois pontos A e B de um mesmo Universo e em dois Universos distintos, fazendo uso de uma montagem que simula uma abertura no espaço.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A contribuição que se pretende dar ao processo de ensino-aprendizagem, com o uso das atividades e experimentos, refere-se à incorporação de novas ideias e estratégias que ajudem na abordagem dos conteúdos. Com essa perspectiva e criatividade, o discente pode utilizar os produtos como base para o desenvolvimento de outras atividades. Dessa forma, tanto a construção dos materiais quanto a execução das atividades podem ser adaptadas a cada realidade, ganhando outros moldes como, por exemplo, oficinas ou práticas de laboratórios.

7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Frequentemente no estudo da Geometria e de outras disciplinas o estudante é levado a desenvolver raciocínios abstratos e usar o pensamento geométrico. Esses recursos muitas vezes não são mobilizados pelos estudantes pois ainda não possuem uma noção espacial desenvolvida. Essa dificuldade é observada em escolas de redes públicas e privadas, constituindo um grande desafio a ser superado.

De acordo com os levantamentos realizados na fase de revisão da bibliográfica deste trabalho, essas dificuldades vão além de abstrações inerentes ao campo da Geometria. A superação das dificuldades envolve um novo olhar para a formação inicial e continuada de professores, com a utilização de novas estratégias que promovam o uso de recursos de aprendizagem capazes de colocar o estudante como ser ativo no processo, além de explorar as múltiplas relações entre Geometria e outras áreas do conhecimento, aplicando seus conhecimentos em situações diárias e superando o ensino puramente memorístico de fórmulas e relações.

Tendo como objetivo o desenvolvimento de estratégias e materiais visando oferecer, por meio da aproximação entre Geometria, Literatura, Física e Astronomia, alternativas para auxiliar na abordagem de conceitos ligados as dimensões espaciais e desenvolvimento do pensamento geométrico. Em linhas gerais, os principais conteúdos abordados nas atividades dizem respeito ao estudo das dimensões espaciais; do plano cartesiano; a tridimensionalidade do espaço; a concepção de espaço diante da Teoria da Relatividade Geral, contextualizado com recortes do livro *Planolândia* de Edwin Abbot, utilizando temas de Astronomia.

Foram elaboradas um conjunto de cinco atividades, as quais foram aplicadas a estudantes do Ensino Médio do Colégio Estadual de Barrocas situado no Território do Sisal, na Bahia, durante o ano de 2019, com o intuito de promover o estudo de aspectos relacionados a espacialidade.

A atividade RECONHECENDO AS DIMENSÕES ESPACIAIS, Seção 5.1, envolveu a identificação das dimensões espaciais em objetos e representações geométricas. Com o intuito de identificar o conhecimento dos estudantes a respeito do conteúdo dimensões espaciais foi utilizado o questionário inicial. A análise deste questionário detectou a falta de familiaridade dos estudantes com o termo dimensão espacial e também do seu significado. Ao final da atividade após a identificação de

entendimentos errôneos foram feitas intervenções, visando o esclarecimento de modo que foi possível realizar com os estudantes o reconhecimento e classificação do número de dimensões espaciais associadas a objetos e representações.

A atividade PLANIFICAÇÃO DO CÉU, Seção 5.2, promoveu a identificação de pares ordenados em pontos definidos pelas posições das estrelas da constelação do Cruzeiro do Sul serviu de base para inserção de discussões a respeito da terceira dimensão. Ao longo desta atividade os estudantes realizaram a representação do espaço celeste, visando uma discussão que possibilitou reflexões acerca do posicionamento dos astros no céu.

A metodologia de tomada de dados envolveu questionários e atividades de manipulação e criação de modo que os estudantes puderam expressar-se de modos variados e livre. Em especial, pedir para que os estudantes exponham suas concepções de céu através objetos manipuláveis se mostrou uma estratégia muito rica, pois além de deixar estudante a vontade para escolher os objetos e posicioná-los foi possível fazer problematizações a respeito dos fenômenos abordados nas representações criadas.

Essas representações envolvem a articulação entre elementos da visão geocêntrica com a visão heliocêntrica, ou seja, os estudantes devem deixar as percepções obtidas em vivências cotidianas como a Terra fixa e o movimento aparente do Sol e demais astros para abstrair uma Terra em uma combinação de movimentos em torno de um Sol fixo. Nesse processo torna-se fundamental a compreensão das causas que levaram a proposição dos principais modelos cosmológicos, considerando as interpretações feitas em diferentes épocas e por diversas culturas.

Buscando-se ampliar a noção de espaço celeste discutida na atividade anterior a atividade DISTÂNCIA DAS ESTRELAS, Seção 5.3, tomou como base a planificação da constelação do Cruzeiro do Sul, evoluindo para o estudo da determinação das diferentes distâncias das estrelas, o que indicou a necessidade de uma nova coordenada espacial relacionada à profundidade. Com a construção da maquete tridimensional foi apresentada uma concepção mais realista do espaço celeste, possibilitando a ampliação do entendimento dos estudantes a respeito das posições das estrelas em uma constelação.

A atividade DANDO FORMAS ÀS SOMBRAS, Seção 5.4, visou promover a ampliação da noção espacial dos estudantes utilizando-se tanto de elementos

planos quanto espaciais. Para cada figura foram feitas projeções de diversos ângulos, possibilitando que os estudantes fizessem inferências sobre os sólidos que as projetavam. Os resultados dessa atividade revelaram uma dificuldade em utilizar a terminologia correta para tratar das figuras geométricas, consequência da não compreensão de propriedades que determinam tais figuras.

De forma a promover uma ampliação do conceito de dimensões espaciais, apresentados até aqui sob o ponto de vista clássico, a atividade O ESPAÇO SEGUNDO A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL, Seção 5.5, abordou o estudo de uma nova concepção do espaço apresentada no início do Século XXI. Por meio do questionário inicial que objetivou identificar os conhecimentos dos estudantes a respeito da Teoria da Relatividade Geral, observou-se que os estudantes, apesar de reconhecerem com facilidade a figura do cientista alemão Albert Einstein, não apresentavam conhecimentos sobre as contribuições da TGR.

Quanto ao estudo das deformações do espaço-tempo, os estudantes passaram a considerar nas explicações a interpretação dada pela TRG para o movimento de planetas próximos de estrelas. Em relação a utilização de aparatos experimentais como o tecido deformável representando espaço-tempo e o simulador de lente gravitacional, como revelado na maioria das repostas dos estudantes no questionário final, ajudaram na visualização e entendimento dos fenômenos estudados.

Com a realização do presente trabalho foi possível constatar também que a espacialidade exerce um papel importante na aprendizagem de Astronomia, e que com a abordagem de seus temas é possível criar um ambiente fértil para a promoção do interesse nos estudantes.

Outro fator observado foi que a falta de compromisso em relação ao ensino de conceitos básicos de Geometria e a falta de preocupação com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes deixam enormes lacunas em sua formação, muitas vezes comprometendo a aprendizagem e o desenvolvimento de habilidades em outras áreas do conhecimento.

Diante disso, é preocupante atual contexto de reforma curricular promovido pela inserção da Base Nacional Comum Curricular, na qual a inserção de novas disciplinas eletivas resultou em uma redução de carga horária de disciplinas fundamentais como Matemática, Física, Química, Biologia, entre outras. Tais disciplinas, no âmbito do Ensino Médio, desempenham um papel importante para o

desenvolvimento do pensamento geométrico, minimizando os efeitos da omissão do ensino de Geometria.

Uma possível saída pode ser a criação de disciplinas eletivas que promovam a diminuição de deficiências, especialmente nas áreas de Matemática, Leitura e Ciências. Além disso, será indispensável novos investimentos em formação continuada dos profissionais da educação, frente às atuais mudanças curriculares e metodológicas.

Os resultados obtidos com a aplicação das atividades, especialmente por ver reações dos estudantes, indicam que houve interesse pelo contexto apresentado na obra Planolândia, pelo uso dos aparatos experimentais e pelas relações feitas com Astronomia.

Acredita-se que o professor tem um papel muito importante na formação do estudante, sendo assim, tão importante quanto um bom material didático é o compromisso do professor com a educação de seus estudantes, fazendo uso desses materiais de forma correta. Por fim, sinalizamos o desejo em continuar o estudo desta temática em estudos futuros. Pretende-se investigar a possibilidade promover o ensino através da visualização de diferentes figuras em uma montagem com óculos 3D. Acredita-se que a publicação deste trabalho e a sua apresentação em eventos da área, possa contribuir para reflexões e discussões acerca do tema.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, E. A. **Planolândia: Um Romance de Muitas Dimensões**. Tradução de Leila de Souza Mendes. São Paulo: Conrad. 2002, 128 p.

ADAUTO, T, E, R. **O uso de materiais didáticos por meio da prototipagem rápida como sugestão para o ensino da Geometria Espacial no 2º ano do Ensino Fundamental**. In: V Congresso Nacional de Educação. Olinda - PE de 17 a 20 de Outubro de 2018.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BASSALO, J. M. F. A Crônica da Gravitação: Da Grécia Antiga à Idade Média. **Caderno Catarinense de Ensino de Física** 7(3), p. 212-224. Florianópolis - SC, 1990.

BONETE, I. P.; FILLOS, L. M. CAETANO, J. J. **OFICINAS ITINERANTES DE MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, PR, 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Ciências Naturais** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998. 138 p.

_____. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**. Ciências da Natureza e Matemática e Suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

_____. **Brasil no PISA 2015: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros / OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico**. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2017.

_____. **Relatório Brasil no PISA 2018 (versão preliminar)**. Brasília-DF: Inep/MEC, 2019.

VERSÃO PRELIMINAR: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros / OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

CARVALHO, H. A. F. de; FERREIRA, A. C. **Visualização espacial e pensamento geométrico: um panorama da produção brasileira em programas de pós-**

graduação nos últimos anos. In: VII Encontro Mineiro de Educação Matemática, 2015, Juiz de Fora.

DAMIANI, M. F. **Sobre pesquisas do tipo intervenção.** In: XVI ENDIPE – Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino, 2012, Campinas.

HON, G.; ZIK, Y. Geometry of Light and Shadow: Francesco Maurolyco (1494–1575) and the Pinhole Camera, **Annals of Science**, 64:4, 549-578, (2007).

JÚNIOR, G. S.; JÚNIOR, I. P. **Bases de Serviços de Comercialização (BSC) no Território do Sisal-BA: perspectivas e desafios para a comercialização da agricultura familiar.** XI Semana de Economia da UESB, 2012.

KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e Astrofísica.** UFRGS-Instituto de Física. Porto Alegre, 2014.

KIRSHNER, R. P. Hubble's diagram and cosmic expansion. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 101, n. 1 p. 8-13 (2004).

LEITE, Cristina. **Formação do professor de Ciências em Astronomia:** uma proposta com enfoque na espacialidade. 2006. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

LEITE, C.; HOSOUME, Y. Explorando a dimensão espacial na pesquisa em ensino de astronomia. **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias** Vol.8 N°3 (2009).

LEITE, C.; HOSOUME, Y. Os professores de ciências e suas formas de pensar a astronomia. **Revista Latino-americana de Educação em Astronomia** n. 4 (2007).

LONGHINI, M. D. Será o Cruzeiro do Sul uma cruz? Um novo olhar sobre as constelações e seu significado. **Física na Escola**, v. 10, n. 1, 2009.

LOPES, J. L. da C. **Relógios de Sol nas aulas de Matemática: construção do conhecimento através da prototipagem.** Dissertação (mestrado)- Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Astronomia, 2017.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**. v.3, n. 4, p. 3-13, 1995.

MACHADO, C. P; GIRAFFA, L. M. M. **Ensino de Geometria: da corda com 12 nós ao Google Sketchup.** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - IACME, Recife, Brasil, 2011.

PAVANELLO, R. M. **Por que ensinar/aprender geometria.** 2004. In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, São Paulo, 2004.

PORTO, C.M.; PORTO, M.B.D.S.M. Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 1, 1603 (2008).

RENNER, G. L. P. Construção de uma maquete tridimensional fosforescente da Constelação de Órion: uma proposta didática para o ensino de Astronomia. **Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia - RELEA**, n. 25, p. 39-49, 2018.

ROCHA, F. B. M. **Ensinando geometria espacial para alunas surdas de uma escola pública de Belo Horizonte (MG): um estudo fundamentado na perspectiva histórico cultural**. 199 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto (MG), 2014.

ROEDEL, T. **A Importância da Leitura e da Literatura no Ensino da Matemática**. 2016. In: XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Curitiba-PR, 2016.

SAMPAIO, J. C.V. **Tópicos de Topologia Intuitiva**. In: X Encontro Brasileiro de Topologia. São Carlos,S.P: 1996.

SARAIVA, M. de F. O.; MULLER, A. M.; KEPLER, S. O. **Fundamentos de Astronomia e Astrofísica para EAD**. 2014.

SENA, R. M. e DORNELES, B. V. **Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011)**. REVMAT. e ISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013.

SCHONS, E. F. **Explorando conceitos geométricos por meio da metodologia de projetos numa turma de PROEJA**. 153 f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), Centro Universitário Franciscano, Santa Maria (RS), 2012.

SILVA, G. M. S.; RIBAS, F. B.; FREITAS, M. S. T. Transformação de coordenadas aplicada à construção da maquete tridimensional de uma constelação. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 1, 1306 (2008).

SILVA, A. F. et al. **A alfabetização matemática sob a perspectiva do letramento nos primeiros anos do ensino fundamental**. In: IV Encontro de Educação Matemática nos Anos Iniciais e III Colóquio de Práticas Letradas, São Carlos-SP, 2016.

SILVEIRA, M. F. S. **Uma proposta de atividades práticas de Astronomia para observação do analema solar**. Dissertação (mestrado)- Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Astronomia, 2019.

SILVEIRA, F. L. Sobre a forma da Terra. **A Física na Escola**, v. 15, n. 2, 2017.

SISCOUTTO, R. A.; SZENBERG, F.; TORI, R.; RAPOSO, A. B. CELES, W.; GATTASS M. **11 – Estereoscopia**. In: C. In: Kirner e R. Tori (eds.), Realidade Virtual: Conceitos e Tendências – Livro do Pré-Simpósio SVR 2004, Cap. 11, p.179-201. Editora Mania de Livro, São Paulo, 2004 (ISBN 85-904873-1-8)

VILLIERS, M. **Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.12, n.3, pp. 400-431, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE I – QUESTÕES SOBRE DIMENSÕES

1. Avalie as afirmações a seguir marque UMA das opções:

Para enxergarmos as três dimensões é preciso usar óculos especial, igual aos encontrados em cinemas.

- () Concordo
- () Concordo parcialmente
- () Discordo

A sua sombra possui quantas dimensões?

- () Nenhuma
- () Uma
- () Duas
- () Três
- () Não sei

Dos objetos abaixo, qual representa um maior número de dimensões?

- () Um CD
- () Grão de areia
- () Linha comprida e muito fina
- () Não sei

APÊNDICE II – ROTEIRO PARA ATIVIDADE COM FORMAS

1. Dentre os materiais disponíveis sobre a mesa, escolha um deles que, numa aproximação, possui apenas UMA dimensão?
Objeto escolhido: _____.
2. Dentre os materiais disponíveis sobre a mesa, escolha um deles que, numa aproximação, possui apenas DUAS dimensões?
Objeto escolhido: _____.
3. Dentre os materiais disponíveis sobre a mesa, escolha um deles que, numa aproximação, possui TRÊS dimensões?
Objeto escolhido: _____.
4. Identifique com (p) as figuras que você considera planas e com (np) as que não são planas:
() cone () quadrado () reta () pirâmide
() circunferência () cubo () esfera () cilindro

APÊNDICE III – ROTEIRO PARA ATIVIDADE COM SOMBRAS

Após apresentar o aparato, coloque um sólido sobre o suporte.
Observação: esse passo deve ser feito com a luz desligada.

Que figura geométrica você está vendo? _____

O sólido geométrico pode produzir essa sombra? _____

Após girar $\frac{1}{4}$ de volta:

Que figura geométrica você está vendo? _____

Que sólido geométrico deve estar a produzir essa sombra? _____

Após girar o objeto completamente:

O sólido geométrico pode produzir essa sombra? _____

Coloque outro sólido sobre o suporte e repita o processo.

APÊNDICE IV – QUESTIONÁRIO SOBRE DISTÂNCIAS DOS ASTROS

1. Avalie as afirmações a seguir marque UMA das opções:

Numa constelação as estrelas estão muito longe de nós, porém próximas umas das outras

- Concordo
- Concordo parcialmente
- Discordo

Os planetas, assim como as estrelas, estão muito distantes quando observados a noite no céu.

- Concordo
- Concordo parcialmente
- Discordo

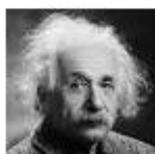
**APÊNDICE V – QUESTIONÁRIO SOBRE ESPAÇO SEGUNDO EINSTEIN
(PRÉ-TESTE)**

Inicialmente pedimos que se identifique preenchendo as informações abaixo:

NOME: _____ SÉRIE: _____

Avalie as afirmações a seguir marque UMA das opções:

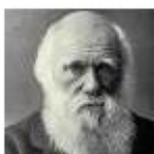
Dos cientistas a seguir, marque com um (x) aquele (s) que você conhece:



()



()



()



()



()



()



()

Você já ouviu falar da Teoria da Relatividade Geral?

- () Sim, sei do que ela trata.
 () Sim, mas não sei do que ela trata.
 () Não.

Se você respondeu a primeira opção na afirmação anterior responda: A Relatividade Geral é uma teoria pode explicar:

- () o movimento das pequenas partículas.
 () o movimento de grandes massas no espaço.
 () a composição das estrelas.
 () Não sei.

Como você explica a Lua girar ao redor da Terra e os planetas girarem ao redor do Sol?

- () a presença de uma grande massa deforma o espaço-tempo, passando a determinar a trajetória de outros corpos.
 () devido suas massas, os corpos se atraem com forças de natureza gravitacional, o que mantém os corpos presos em suas órbitas.
 () Não sei.

**APÊNDICE VI – QUESTIONÁRIO SOBRE ESPAÇO SEGUNDO EINSTEIN
(PÓS-TESTE)**

Inicialmente pedimos que se identifique preenchendo as informações abaixo:

NOME: _____ SÉRIE: _____

1. Avalie as afirmações a seguir marque UMA das opções:

A Relatividade Geral é uma teoria que pode explicar:

- O movimento das pequenas partículas.
- O movimento de grandes massas no espaço.
- A composição das estrelas.
- Não sei.

Como você explica a Lua girar ao redor da Terra e os planetas girarem ao redor do Sol?

- a presença de uma grande massa deforma o espaço-tempo, passando a determinar a trajetória de outros corpos.
- devido suas massas, os corpos se atraem com forças de natureza gravitacional, o que mantém os corpos presos em suas órbitas.
- Não sei.

O que você achou da abordagem desse tema?

- Gostei muito.
- Gostei.
- Indiferente.
- Não gostei.
- Outra:_____.

Em relação ao entendimento do tema, o que você achou dos materiais utilizados?

- Ajudou muito.
- Ajudou pouco.
- Não ajudou.
- Outra:_____.