Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

COEFICIENTES BINOMIAIS ESTENDIDOS: ALGUMAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Graziela Pereira de Jesus Alixandre

Feira de Santana

Novembro de 2019

Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

COEFICIENTES BINOMIAIS ESTENDIDOS: ALGUMAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES PARA O ENSINO MÉDIO

Graziela Pereira de Jesus Alixandre

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti.

Feira de Santana

Novembro de 2019

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

A414c Alixandre, Graziela Pereira de Jesus
Coeficientes binomiais estendidos: algumas propriedades e aplicações para o ensino médio / Graziela Pereira de Jesus Alixandre. - 2019.
124 f.: il.

Orientador: Haroldo Gonçalves Benatti.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Números binomiais estendidos. 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Benatti, Haroldo Gonçalves, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51(07)

Clemilda Santana dos Reis de Jesus – Bibliotecária CRB5/1641

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Graziela Pereira de Jesus Alixandre do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos sete dias do mês de novembro de dois mil e dezenove às 9h30 no MT55 - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Coeficientes binomiais estendidos: algumas propriedades e aplicações para o ensino médio "**, da discente **Graziela Pereira de Jesus Alixandre**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Haroldo Gonçalves Benatti (Orientador, UEFS), Katia Silene Ferreira Lima Rocha (UFRB) e Maurício de Araujo Ferreira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 7 de novembro de 2019.

Haroldo J. Benatti

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)
Orientador

Katia Silene Ferreira Lima Rocha

Profa. Dra. Katia Silene Ferreira Lima Rocha (UFRB)

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira (UEFS)

Visto do Coordenador: AnaCpaixão
Profª Drª Ana Carla Percontini da Paixão
Coordenadora do Profmat / UEFS

Agradecimentos

A vida só faz sentido se tivermos sonhos. E para realizarmos estes sonhos é preciso muita determinação e otimismo.

Este trabalho é a concretização de um grande anseio: tornar-me professora mestra. A cada tentativa para elaborar esta dissertação, entre acertos e erros, leitura e escrita, que mais parecia uma tarefa interminável, eis aqui a culminância desse devaneio.

E sonho que se sonha só é apenas um sonho que se sonha só, mas sonho que se sonha junto, torna-se realidade. Os meus agradecimentos serão direcionados de maneira estendida:

Primeiramente, a Deus, que me deu o dom da vida, autor do meu destino, meu guia, minha luz e fortaleza nos momentos de aflições.

Ao meu pai (*in memorian*) que sempre me incentivou a estudar. A minha guerreira mãe, meu alicerce de vida.

A todos os meus familiares, pelo apoio e pelas palavras de incentivo.

Aos meus queridos irmãos e sobrinhos. Amo vocês!

Obrigada aos companheiros do Colégio Estadual Odorico Tavares pelo carinho e compreensão durante esses dezenove anos de convivência.

Aos meus amigos a minha eterna gratidão: vocês são a extensão da minha família!

Ao corpo docente da UEFS do curso PROFMAT.

Aos companheiros da turma PROFMAT-2017, pelas orações, pelo apoio e incentivo. Saudades do nosso ambiente de estudo, onde socializávamos questões, trocávamos e discutíamos opiniões. Sem vocês, o caminho seria mais árduo!

Às minhas filhas Maria Luiza e Ana Clara, que trazem tanta substância ao binômio Paixão-Razão de minha vida.

Ao meu companheiro de todos os dias, meu grande amor.

Finalmente, ao meu orientador pela paciência, dedicação, comprometimento e dis-

ponibilidade em me nortear nesta pesquisa.

Cada um de vocês é a presença de Deus agindo em minha vida. Meu muito obrigada!

E como dizem, sabiamente, Paulinho da Viola e Ferreira Gullar:

Solução de Vida (Paulino da Viola e Ferreira Gullar)

Acreditei na paixão
E a paixão me mostrou
Que eu não tinha razão

Acreditei na razão
E a razão se mostrou
Uma grande ilusão

Acreditei no destino
E deixei-me levar
E no fim
Tudo é sonho perdido
Só desatino, dores demais

Hoje com meus desenganos
Me ponho a pensar
Que na vida, paixão e razão
Ambas tem seu lugar

É por isso eu lhe digo
Que não é preciso
Buscar solução para a vida
Ela não é uma equação
Não tem que ser resolvida

A vida, portanto, meu caro,
Não tem solução.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um material teórico sobre números binomiais estendidos, tratar de algumas de suas propriedades e propor a abordagem deste conteúdo no ensino médio. Na educação básica a definição de números binomiais, bem como o estudo de suas propriedades, são restritos aos números inteiros não-negativos. Por meio de uma abordagem simples, iniciaremos com o estudo de contagem, definição dos números binomiais para valores inteiros não-negativos e suas propriedades. Ilustraremos as identidades no triângulo de Pascal clássico e, depois, definiremos os coeficientes binomiais para valores reais. Demonstraremos algumas identidades binomiais estendidas e utilizaremos a extensão superior do triângulo de Pascal para ilustrar tais propriedades. Ao final deste trabalho, proporemos algumas atividades com resoluções para serem aplicadas aos alunos do ensino médio.

Palavras-chaves: Contagem. Coeficientes binomiais estendidos. Triângulo de Pascal. Propriedades. Ensino de matemática.

Abstract

The aim of this work is to present a theoretical material about extended binomial numbers, to treat some of their properties and propose the approach of this content in high school. In basic education the definition of binomial numbers, as well the study of their properties, are restricted to nonnegative integers. Using a simple approach, we will start with the study of counting, defining binomial numbers for nonnegative integer values and their properties. We will illustrate the identities in the classic Pascal triangle and then define the binomial coefficients for actual values. At the end of this work, we will propose some activities with resolutions to be applied to high school students.

Keywords: Counting. Extended binomial coefficients. Pascal's triangle. Properties. Mathematics teaching.

Sumário

Introdução

Os coeficientes binomiais são abordados na educação básica através do desenvolvimento do binômio de Newton. As disposições dos coeficientes de cada polinômio são organizados numa tabela numérica triangular denominada triângulo de Pascal. Podemos visualizar várias propriedades interessantes relacionadas aos números binomiais neste triângulo.

O primeiro contato dos alunos da educação básica com os números binomiais ocorre no Ensino Fundamental II com o estudo dos produtos notáveis e o binômio de Newton. No ensino médio, ao ser abordado o conteúdo de análise combinatória, os alunos estudam a definição dos números binomiais para inteiros não-negativos e podem verificar, no triângulo de Pascal, algumas propriedades clássicas decorrentes desta definição.

Este trabalho tem como finalidade apresentar um material de apoio teórico e incentivo para que os professores do ensino médio abordem a definição estendida dos números binomiais bem como as identidades binomiais decorrentes de tal definição.

A estrutura do nosso trabalho foi dividida em quatro capítulos. No primeiro capítulo, abordaremos, de forma resumida, uma parte da área da matemática discreta, a chamada análise combinatória. Esta parte da matemática é ampla e preferiremos denominá-la de Contagem. Propomos chamar de Contagem porque esse termo transmite uma ideia mais simples e acessível ao aluno do ensino médio. Muitos livros didáticos ainda usam a terminologia: análise combinatória. Esta denominação nos parece gerar certa aversão do aluno ao conteúdo, na medida em que dá a impressão de ser um assunto complexo.

Veremos, no capítulo mencionado, os princípios de contagem, bem como algumas fórmulas de permutações e combinações. Também abordaremos a definição de coeficientes binomiais, a mesma apresentada nos livros do ensino médio. Demostraremos, pela técnica combinatória, algumas propriedades binomiais clássicas. Ilustraremos tais propriedades no triângulo de Pascal. Por último, apresentaremos a relação deste triângulo com o desenvolvimento do binômio de Newton.

No segundo capítulo, definiremos os coeficientes binomiais de maneira estendida, em que os índices superiores assumem valores reais e os índices inferiores podem ser inteiros quaisquer. Sabemos que os livros didáticos da educação básica restringem a definição dos coeficientes binomiais apenas para números inteiros não-negativos.

Mostraremos as propriedades oriundas da definição estendida dos números binomiais e apresentaremos o triângulo de Pascal estendido superiormente para verificar tais propriedades. Faremos as demonstrações destas identidades através do método combinatorial, método algébrico, e usaremos a técnica do argumento polinomial para estender a validez das identidades polinomiais para os números reais.

No terceiro capítulo, proporemos algumas atividades com resoluções para serem aplicadas pelos professores aos alunos do ensino médio e estão relacionadas com a abordagem apresentada neste trabalho.

Capítulo 1

Contagem

Neste capítulo, destacaremos os princípios de contagem e as fórmulas combinatórias. Juntos, esses dois temas serão utilizados nas demonstrações das identidades clássicas. Identidades essas que são oriundas da definição de coeficientes binomiais para números inteiros não-negativos. Verificaremos as propriedades no triângulo de Pascal clássico e apresentaremos a relação deste triângulo com o binômio de Newton.

Os métodos de contagem fazem parte da matemática discreta, mais especificamente da análise combinatória. Nos fornecem estratégias de contar direta ou indiretamente os elementos de um conjunto de acordo com determinada circunstância. A contagem está intimamente relacionada com as operações aritméticas.

Sabemos que contar é a tarefa mais elementar da matemática. A criança tem o seu primeiro contato com os números quando começa a enumerá-los através da sequência de palavras (um, dois, três, quatro, cinco, ...). Ou seja, quando ela está começando a falar essa contagem não tem significado para ela. Só passa a fazer sentido, e a contagem é realizada de fato, quando ela começa a perceber a relação de ordem. Desta maneira, o primeiro método básico e fundamental de contagem utilizado é a enumeração direta.

A análise combinatória é considerada no ensino médio, por alunos e professores, como um assunto complexo. Isso acontece porque os métodos se afastam da prática de abordar a matemática através de situações típicas. Ao invés disso, são feitas aplicações diretas de modelos matemáticos.

Para resolver um problema de contagem, é necessário compreender o seu enunciado e selecionar as técnicas apropriadas a serem utilizadas. De nada adianta termos as fórmulas sem antes compreendermos o problema.

O estudo de contagem constitui um excelente tópico para resgatar discentes que tenham habilidades em matemática, porém apresentam dificuldades em tópicos cumulativos. A solução de problemas de contagem não exige conhecimentos prévios de trigonometria, números complexos, polinômios, por exemplo.

Enfim, explanar situações de contagem privilegiando fórmulas não é a melhor maneira de enfatizar tal conteúdo. A metodologia de aplicações diretas de modelos matemáticos não nos parece ser suficiente para a resolução de muitos problemas, sendo fundamental desenvolver o raciocínio combinatório o qual permite a utilização das técnicas apresentadas neste capítulo.

Assim, sugerimos que os professores, ao trabalharem com esse assunto no ensino médio, adiem as apresentações de fórmulas e inicialmente explorem as operações aritméticas na resolução de problemas de contagem.

1.1 Princípios de Contagem

Nesta seção, apresentaremos os princípios de contagem. Estes princípios serão utilizados nas demonstrações combinatórias de muitas propriedades binomiais. Foram utilizadas as referências [8], [9] e [12] para fundamentar a parte teórica.

1.1.1 Princípio multiplicativo

A técnica de contagem relacionada à multiplicação é também conhecida como princípio fundamental da contagem ou regra do produto. Ela se aplica quando o procedimento é realizado a partir de tarefas separadas.

O princípio multiplicativo pode ser enunciado da seguinte maneira:

Suponhamos que um procedimento possa ser dividido em uma sequência de duas tarefas. Se houver n_1 formas de fazer a primeira tarefa e para cada uma dessas formas há n_2 maneiras de realizar a segunda tarefa, qualquer que seja a escolha feita na primeira tarefa, então há $n_1 \cdot n_2$ formas de concluir o procedimento.

Exemplo 1.1.1. Numa reunião existem 4 homens e 5 mulheres. De quantas maneiras distintas é possível escolher um casal homem-mulher?

Vamos denominar como primeira tarefa a escolha do homem para formar o casal e como segunda tarefa a escolha da mulher. Dessa maneira:

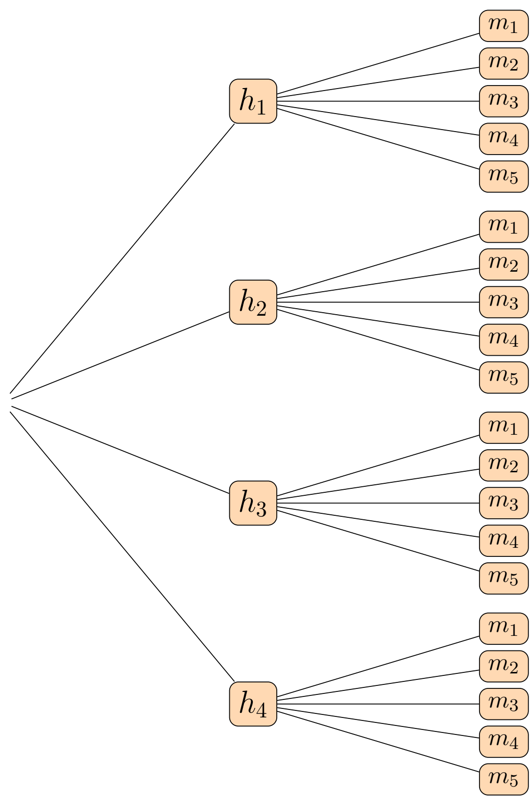
i) A primeira tarefa pode ser tomada de 4 maneiras. Logo, $n_1 = 4$;

ii) Podemos escolher a segunda tarefa de 5 modos distintos. Assim, $n_2 = 5$.

A tarefa de escolher um casal homem-mulher pode ser feita de $4 \cdot 5 = 20$ maneiras diferentes.

O princípio multiplicativo se baseia no significado da multiplicação como adição interada. Podemos representar essas escolhas como ramos em um diagrama de árvore. O diagrama se inicia com a escolha da primeira tarefa, que pode ser feita de 4 modos. Por hipótese, qualquer que seja a decisão tomada na primeira tarefa teremos 5 possibilidades de escolhas para a segunda tarefa. Para isto, denominaremos os homens de h_1, h_2, h_3, h_4 e as mulheres de m_1, m_2, m_3, m_4, m_5. Ilustraremos na figura 1.1 o exemplo 1.1.1.

Figura 1.1: Diagrama de Árvore



Fonte: Elaboração própria.

Logo, o número total de maneiras possíveis para escolher um casal homem-mulher é $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5 = 20$.

A situação esquemática apresentada é usada para problemas de contagem em que devemos tomar duas decisões consecutivas. O fato essencial é que estamos tratando de tarefas **compostas**, o que acarreta o uso da operação da multiplicação.

Podemos expandir a regra do produto ou princípio multiplicativo para a realização de m tarefas ($m \geq 2$):

Suponhamos que um procedimento possa ser dividido em uma sequência de tarefas $P_1, P_2, ..., P_m$. Se cada tarefa P_j, com $1 \leq j \leq m$, puder ser feita de n_j formas, quaisquer que sejam as escolhas feitas nas P_i tarefas anteriores, com $1 \leq i < j \leq m$, então há $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_m$ formas de concluir o procedimento.

A demonstração formal segue por indução matemática a partir do princípio multiplicativo para duas tarefas.

O princípio fundamental da contagem pode ser também enunciado para uma quantidade finita de conjuntos:

Sejam $A_1, A_2, ..., A_m$ conjuntos finitos não-vazios com $k_1, k_2, ..., k_m$ elementos, respectivamente. Assim, a tarefa de escolher um elemento no produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ é feita escolhendo um elemento em cada conjunto A_j, com $j = 1, ..., m$. Temos, assim

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_m| = \prod_{j=1}^{m} |A_j|,$$

onde $|A_j|$ representa a cardinalidade do conjunto A_j.

Exemplo 1.1.2. No ano de 2019 o presidente do Brasil modificou a sequência dos números e letras das placas de identificação dos veículos, de acordo com as normas do Mercosul. Se cada placa contém uma sequência de sete símbolos, sendo os três primeiros símbolos e o quinto símbolo dessa sequência letras do nosso alfabeto, o quarto e os dois últimos símbolos são algarismos indo-arábicos, quantas placas de identificação estão disponíveis?

Há 26 modos de escolhermos cada letra e 10 possibilidades para cada algarismo. Pelo princípio multiplicativo, ou regra do produto, há um total de:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456.976.000$ placas de identificação disponíveis.

Exemplo 1.1.3. Quantos números naturais de três algarismos podemos obter no sistema decimal?

Temos 10 algarismos disponíveis no sistema decimal.

i) Escolheremos o algarismo das centenas. O algarismo 0 não poderá ocupar essa posição. Assim, temos 9 modos de escolher este algarismo;

ii) Para o algarismo que ocupará a casa das dezenas, temos 10 possibilidades, pois podemos utilizar algarismos repetidos;

iii) Para a escolha do algarismo que ocupará a casa das unidades, temos 10 possibilidades.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ modos de obter números naturais de três algarismos no sistema decimal.

Exemplo 1.1.4. Quantos números naturais de três algarismos distintos podemos formar no sistema decimal?

i) Para a escolha do algarismo que ocupará a casa das centenas, temos 9 possibilidades (exceto o algarismo zero);

ii) Escolheremos o algarismo das dezenas. O algarismo 0 poderá ocupar essa posição, mas o algarismo escolhido no item anterior não poderá ocupar essa posição, pois devemos escolher algarismos distintos. Assim, temos 9 modos de escolher este algarismo;

iii) Escolheremos o algarismo das unidades. Os dois algarismos escolhidos anteriormente não poderão ocupar essa posição. Logo, temos 8 maneiras de escolher este algarismo.

Pelo princípio multiplicativo, existem $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números de três algarismos distintos no sistema decimal.

Vamos tentar resolver este exemplo de outra maneira:

i) Escolheremos o algarismo das unidades. O algarismo 0 poderá ocupar essa posição. Assim, temos 10 modos de escolher este algarismo;

ii) Escolheremos o algarismo das dezenas. O algarismo escolhido no item anterior não poderá ocupar essa posição. Logo, temos 9 maneiras de escolher este algarismo;

iii) Para a escolha do algarismo das centenas, percebemos que os dois algarismos escolhidos anteriormente não poderão ocupar essa posição. Portanto, temos 8 modos de escolher este algarismo (se o zero tiver sido usado nas duas escolhas anteriores) ou 7 maneiras (se o zero não tiver sido usado nos dois itens anteriores).

Observamos que a escolha do algarismo das centenas **depende** da condição do algarismo 0 ter sido utilizado ou não. Sendo assim, não podemos aplicar o princípio multiplicativo. Esta situação não foi encontrada na primeira solução deste exemplo. Dessa forma, é recomendável o uso de três estratégias para solucionar uma situação de contagem (para um melhor detalhamento consultar referências [8] e [9]):

1) Postura. Precisamos nos colocar no papel de quem vai formar os grupamentos ao invés de buscar uma fórmula para ser aplicada;

2) Divisão. Devemos planejar a tarefa dividindo em etapas. Podemos dividir as decisões a serem tomadas em decisões menos complexas. Notamos que para formar números de três dígitos distintos dividimos em três etapas, de acordo com o valor posicional de cada algarismo;

3) Não adiar dificuldades. Temos que avaliar quais são as dificuldades e temos que solucioná-las em ordem **decrescente** de complexidade. Ou seja, se alguma decisão é mais restrita que as demais, ela deve ser decidida em primeiro lugar.

Notamos no exemplo 1.1.4 que escolher o algarismo das centenas apresenta mais restrição dos que os outros, visto que este algarismo não pode ser igual a zero. Logo, não devemos adiar essa decisão para não causar dificuldades posteriores.

1.1.2 Princípio aditivo

Também conhecido como regra da soma, esse princípio é muito utilizado quando o problema a ser solucionado é dividido em casos distintos. Pode ser enunciado da seguinte forma:

Se uma tarefa puder ser feita em uma das n_1 maneiras ou em uma das n_2 maneiras, em que nenhum dos elementos do conjunto das n_1 maneiras é o mesmo que algum elemento do conjunto das n_2 maneiras, então existem n_1+n_2 maneiras de realizar a tarefa.

Exemplo 1.1.5. Em uma prova há 7 questões de matemática e 3 questões de física. De quantas maneiras um aluno poderá escolher uma única questão para responder?

Para responder a uma única questão, o aluno poderá escolher uma das 7 questões de matemática **ou** uma das 3 questões de física. Assim, o aluno tem $7+3=10$ maneiras de escolher uma única questão para responder.

O princípio aditivo pode ser enunciado para m tarefas ($m \geq 2$):

Suponhamos que uma tarefa possa ser realizada de n_1 maneiras, de n_2 maneiras,..., ou de n_m maneiras, em que nenhuma das formas do i-ésimo grupo de realizar a tarefa é a mesma do j-ésimo grupo, para todos os pares i e j com $1 \leq i < j \leq m$. Então, o número total de maneiras de realizar a tarefa é $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_m$.

Essa regra é bastante intuitiva e sua demonstração pode ser feita por indução matemática a partir do princípio aditivo para duas tarefas.

Exemplo 1.1.6. Numa reunião existem 4 homens e 5 mulheres. De quantas maneiras distintas é possível escolher um casal homem-mulher?

Vamos denominar os homens de h_1, h_2, h_3, h_4 e as mulheres de m_1, m_2, m_3, m_4, m_5.

i) Podemos escolher 5 casais em que o homem h_1 é integrante **ou**

ii) Podemos escolher 5 casais em que o homem h_2 é integrante **ou**

iii) Podemos escolher 5 casais em que o homem é h_3 **ou**

iv) Podemos escolher 5 casais em que o homem é h_4.

Logo, pelo princípio aditivo, a quantidade de casais é $5+5+5+5=20$.

Em termos de conjuntos, a soma é realizada quando os conjuntos são **disjuntos**. A adição está intrinsecamente relacionada a **união** de conjuntos **disjuntos** dois a dois. Assim, o princípio aditivo pode ser enunciado em termo de um número finito de conjuntos:

Sejam $A_1, A_2, ..., A_m$ conjuntos finitos disjuntos dois a dois, ou seja, $A_i \bigcap A_j = \oslash$ para $i \neq j$, com $k_1, k_2, k_3, ..., k_m$ elementos, respectivamente. Então, o número de maneiras de escolher um elemento de um dos conjuntos é exatamente o número de elementos da união

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_m| = \sum_{j=1}^{m} |A_j|,$$

onde $|A_j|$ representa a cardinalidade do conjunto A_j.

Exemplo 1.1.7. Quantos números naturais pares com três algarismos distintos podemos obter no sistema decimal?

i) Escolheremos o dígito das unidades, que é o mais restrito. Existem 5 maneiras $(0, 2, 4, 6$ ou $8)$, já que temos que formar números pares;

ii) Temos 9 modos de escolher o dígito das centenas (se o zero tiver sido usado na escolha anterior) ou 8 maneiras (se o zero não tiver sido utilizado no item anterior, já que este dígito não pode ocupar a posição das centenas).

Estamos, assim, diante de um impasse: a segunda decisão **depende** do que foi feito na decisão anterior. Dessa maneira, já que temos duas restrições conflitantes (escolha dos dígitos das unidades e das centenas) vamos fazer a divisão em dois casos **distintos**:

i) Números terminados em zero:
Temos 1 maneira de escolher o dígito das unidades (a dificuldade mais restrita). A segunda dificuldade é escolher o dígito das centenas, pois o algarismo zero não pode ocupar esta posição. Logo, para a escolha deste, há 9 modos, e para o dígito das dezenas existem 8 possibilidades. Pelo princípio multiplicativo temos $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ números terminados em zero;

ii) Números terminados em um algarismo diferente de zero:
Temos 4 maneiras de escolher o dígito das unidades que é par (a dificuldade mais restrita). A segunda dificuldade é escolher o dígito das centenas, já que não podemos escolher o algarismo 0 e nem o algarismo escolhido anteriormente. Logo, para a escolha do dígito das centenas há 8 maneiras, e para o dígito das dezenas temos 8 modos (não pode ser os dois utilizados anteriormente). Pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ números terminados em um algarismo diferente de zero.

Logo, pelo princípio aditivo, temos $72 + 256 = 328$ números naturais pares de três algarismos distintos no sistema decimal.

1.2 Permutações e Combinações

Nesta seção, abordaremos as principais fórmulas combinatórias para resolver situações de contagem, em especial utilizando as referências [8], [9] e [12].

Vários problemas de contagem são resolvidos considerando relevante ou não a ordem dos elementos. Por exemplo: dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de n elementos, quantos subconjuntos podemos formar com k elementos? Observemos que a ordem dos elementos não é relevante, pois os conjuntos $\{a_1, a_2, a_3\}$ e $\{a_2, a_3, a_1\}$ são idênticos.

Existem situações em que a ordem dos elementos deve ser levada em consideração. Por exemplo: de quantas maneiras podemos escolher k alunos a fim de formar uma fila para receber livros em uma turma de n alunos? Veremos os métodos para resolver tais situações.

1.2.1 Permutações simples

As permutações simples ocorrem quando a ordem dos elementos distintos é relevante e quando não há repetições dos mesmos. Consideremos, por exemplo, quatro algarismos diferentes: $1, 2, 3, 4$. Queremos permutá-los. Então, as permutações simples ou permutações sem repetição dos algarismos são

$$\begin{array}{cccc} (1234), & (1243), & (1324), & (1342), \\ (1432), & (1423), & (3412), & (3421), \\ (2134), & (2143), & (2314), & (2341), \\ (2431), & (2413), & (3124), & (3142), \\ (3214), & (3241), & (4123), & (4132), \\ (4231), & (4213), & (4321), & (4312), \end{array}$$

totalizando 24 maneiras de ordenar 4 elementos distintos.

Vamos solucionar esta situação sem ter que listar todas os modos de ordenar os quatro algarismos. Para isto, vamos dividir em etapas:

i) Escolheremos o algarismo que ocupará a primeira posição. Isto pode ser feito de 4 modos;

ii) Para a escolha do algarismo que ocupará a segunda posição, podemos fazer isto de 3 maneiras diferentes, já que um elemento foi utilizado no item anterior;

iii) Há 2 possibilidades para a escolha do algarismo que ocupará a terceira posição da fila;

iv) Há 1 maneira para a escolha do algarismo que ocupará a quarta posição da fila.

Pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ modos de permutar quatro algarismos distintos.

Exemplo 1.2.1. De quantas maneiras podemos ordenar em fila n objetos distintos?

Vamos analisar a quantidade de maneiras de acordo com a ordem dos objetos na fila.

i) Escolheremos o objeto que ocupará a primeira posição da fila. Isto pode ser feito de n maneiras;

ii) Escolheremos o objeto que ocupará a segunda posição da fila. Podemos fazer isto de $n-1$ maneiras, pois não podemos colocar o objeto escolhido anteriormente e o número de possibilidades se reduz, já que temos permutações simples ou sem repetição de elementos;

iii) Há $n-2$ modos para a escolha do objeto que ocupará a terceira posição da fila.

E assim sucessivamente, até a escolha do n-ésimo objeto que ocupará a última posição da fila que pode ser feito de 1 modo. Pelo princípio multiplicativo, temos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 1$ maneiras de ordenar em fila n objetos distintos.

Vamos definir por indução, ou recorrência, o fatorial de n, para cada número n inteiro não-negativo.

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Temos

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k, n \geq 1.$$

Indicaremos por P_n o número total de maneiras de ordenar n elementos distintos sem repetição. Pelo exemplo 1.2.1, temos

$$P_n = n!.$$

Geralmente, nos livros do ensino básico, a definição de fatorial antecede o estudo de contagem e vem acompanhado sempre de diversos exercícios algébricos envolvendo a noção de fatorial. Esta metodologia de ensino não nos parece apropriada, pois esses exercícios não despertam o interesse dos discentes, já que é uma mera aplicação de fórmula. Sugerimos que a definição de fatorial de um número seja motivada após a apresentação de problemas de contagem que envolvam esta noção.

Teorema 1.2.2. *Se n for um número inteiro positivo e k um número inteiro, tais que $1 \leq k \leq n$, então existem*

$$P(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1),$$

$k-$permutações sem repetição de um conjunto com n elementos diferentes.

Demonstração. Vamos apresentar a seguinte situação:

De quantas maneiras podemos ordenar em fila k alunos, de um grupo de n alunos?

Vamos analisar a quantidade de maneiras de acordo com a ordem dos alunos na fila.

i) Escolheremos o aluno que ocupará a primeira posição da fila. Isso pode ser feito de n maneiras;

ii) Existem $n-1$ maneiras para a escolha do aluno que ocupará a segunda posição da fila;

iii) Há $n-2$ possibilidades para a escolha do aluno que ocupará a terceira posição da fila.

E assim sucessivamente, até a escolha do $k-$ésimo aluno. Isso pode ser feito de $[n-(k-1)] = n-k+1$ modos. Pelo princípio multiplicativo, temos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ maneiras de ordenar em fila k alunos, de um grupo de n alunos. □

Notemos que $P(n, 0) = 1$, pois há exatamente uma maneira de ordenar zero elementos. Existe somente uma lista sem elementos, ou seja, a lista vazia.

Uma permutação de um conjunto de objetos distintos é um arranjo ordenado desses objetos. Um arranjo ordenado de k elementos de um conjunto é chamando de $k-$permutação sem repetição.

Corolário 1.2.3. *Se n for um número inteiro positivo e k um número inteiro com $1 \leq k \leq n$, então*

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Demonstração. Sejam n um número inteiro positivo, k inteiro, com $1 \leq k \leq n$. Temos

$$\begin{aligned}
P(n, k) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1) \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot \mathbf{(n\text{-}k)!}}{\mathbf{(n\text{-}k)!}} \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 1}{(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Notemos que $P(n, 0) = \dfrac{n!}{n!} = 1$, sendo também válida para $k = 0$.

Exemplo 1.2.4. Em uma gincana escolar, há 20 alunos participando de uma tarefa. A premiação irá somente para o primeiro, segundo e terceiro classificados. Quantas maneiras distintas podemos obter para as três primeiras classificações, sabendo que não há empate?

Como a ordem é relevante, então temos

$$P(20, 3) = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17!} = 6.840 \text{ maneiras possíveis.}$$

Podemos resolver este exemplo de outra maneira:

i) Escolheremos o aluno que ocupará a primeira classificação. Isso pode ser feito de 20 maneiras;

ii) Escolheremos o aluno que ocupará a segunda posição. Isso pode ser feito de 19 maneiras;

iii) Há 18 modos para a escolha do aluno que ocupará a terceira posição.

Pelo princípio multiplicativo, temos $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840$ modos possíveis.

Nesta solução, não precisamos usar a fórmula de $k-$permutações sem repetição de um conjunto de n elementos. Basta aplicarmos o princípio multiplicativo. Este princípio pode ser aplicado toda vez que conseguimos planejar o grupamento em etapas, e estas sejam tais que os números de possibilidades em cada etapa **não dependa** das decisões que foram tomadas anteriormente.

1.2.2 Permutação com repetição

As permutações com repetição aparecem em problemas de contagem em que dispomos de elementos distintos e podemos usar esses elementos repetidamente.

Exemplo 1.2.5. De quantas maneiras podemos formar uma senha de quatro dígitos (no sistema decimal) em que é possível a repetição de dígitos?

i) Escolheremos o primeiro dígito. Como temos disponíveis, no sistema decimal, 10 algarismos, podemos escolher de 10 maneiras;

ii) Faremos a escolha do segundo dígito. Como podemos repetir os dígitos, isso pode ser feito de 10 maneiras;

iii) Escolheremos o terceiro dígito da senha. Isso pode ser feito de 10 maneiras;

iv) Para a escolha do quarto dígito da senha, há 10 maneiras possíveis.

Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10.000$ maneiras de formar uma senha de quatro dígitos no sistema decimal.

Este raciocínio justifica o seguinte teorema:

Teorema 1.2.6. *O número de k-permutações de um conjunto de n elementos, com repetição, é n^k.*

1.2.3 Combinações simples

Vamos abordar situações de contagem em que a ordem dos objetos distintos não é relevante, e que estes não podem ser repetidos. Utilizaremos as referências [8], [9] e [12].

Uma $k-$combinação, sem repetição de elementos, de um conjunto A de n elementos distintos, é uma seleção de k elementos distintos, em que a ordem destes não é relevante (trocar a ordem dos elementos não gera outra combinação). Logo, uma $k-$combinação é um subconjunto de A.

Teorema 1.2.7. *O número de k-combinações de um conjunto com n elementos, em que n é um número inteiro não-negativo e k um número inteiro com* $0 \leq k \leq n$*, é igual a*

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Demonstração. Podemos formar as k-permutações sem repetição de um conjunto com n elementos diferentes da seguinte maneira:

i) Obtemos as k-combinações de n elementos distintos: $C(n,k)$;

ii) Fazemos o ordenamento em cada $k-$combinação. Como vimos, isso pode ser feito de $P_k = k!$ maneiras.

Pelo princípio multiplicativo, temos $P(n,k) = C(n,k) \cdot P_k$.

Logo,

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

□

Exemplo 1.2.8. Para a seleção brasileira foram convocados dois goleiros, seis zagueiros, sete meio-campistas e quatro atacantes. De quantas maneiras é possível escalar a seleção com um goleiro, quatro zagueiros, quatro meio-campistas e dois atacantes?

Vamos analisar separadamente os modos de escolher cada grupo de jogador.

i) Para a escolha do goleiro. Como temos 2 goleiros e queremos escalar 1, então há $C(2,1) = 2$ maneiras distintas de escolher 1 goleiro;

ii) Para a escolha dos zagueiros. Como temos 6 zagueiros, queremos escolher 4 e a ordem destes não é relevante, então há $C(6,4) = 15$ modos distintos de escolher 4 zagueiros;

iii) Para fazermos a escolha dos meio-campistas, temos $C(7,4) = 35$ possibilidades possíveis;

iv) Há $C(4,2) = 6$ modos distintos de escolhermos os 2 atacantes.

Dessa maneira, pelo princípio multiplicativo, temos $2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot 6 = 6.300$ maneiras possíveis de escalar a seleção com 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio-campistas e 2 atacantes.

Escolher comissões envolve formar grupamentos não-ordenados. Os alunos aplicariam com mais facilidade a fórmula clássica de combinações simples, mas poderiam ter dificuldades em aplicar os princípios básicos de contagem.

Exemplo 1.2.9. (ENQ-PROFMAT- 2016.2) De quantas maneiras distintas podemos escolher três números do conjunto $I_{40} = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 40\}$, de modo que sua soma seja:

a) um número ímpar?

b) um múltiplo de 3?

Vamos analisar a situação apresentada.

a) Para que a soma de três números distintos seja um número ímpar há duas situações **distintas**:

i) Os três números escolhidos devem ser todos ímpares. O conjunto I_{40} possui exatamente 20 números ímpares. Precisamos selecionar 3 números. Então trata-se de grupamentos não ordenados, se enquadrando na fórmula de combinações simples. Logo, há $C(20,3) = \dfrac{20!}{3!17!} = 1.140$ modos distintos;

ii) Apenas um deles ímpar e os outros dois pares. Temos 20 números ímpares e precisamos selecionar 1 número ímpar. Então há $C(20,1) = \dfrac{20!}{1!19!} = 20$ modos distintos. Temos 20 números pares e precisamos selecionar 2 números pares. Então há $C(20,2) = \dfrac{20!}{2!18!} = 190$ modos distintos.

Temos escolhas em duas etapas neste item. A primeira etapa pode ser feita de 20 modos e a segunda etapa pode ser feita de 190 modos, **qualquer** que seja a escolha feita na primeira etapa. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos $20 \cdot 190 = 3.800$ maneiras de escolher um número ímpar e os outros dois números pares.

Pelo princípio aditivo, existem $1.140 + 3.800 = 4.940$ possibilidades de escolher 3 números do conjunto I_{40} cuja soma é um número ímpar.

b) Dado um elemento do conjunto I_{40}, ele pode ser divisível por 3, pode ter resto 1 ou resto 2 na divisão por 3. Assim, o conjunto I_{40} é a união dos seguintes conjuntos **disjuntos**:

i) $A = \{a = 3k, k \in \mathbb{N}; 0 < k \leqslant 13\}$.
Temos $A = \{3, 6, 9, ..., 39\}$. O conjunto A é uma sequência numérica finita chamada Progressão Aritmética (PA) de razão $r = 3$, com primeiro elemento $a_1 = 3$ e último elemento $a_n = 39$. Logo, podemos calcular a quantidade de elementos do conjunto A pelo termo geral a_n de uma PA $a_n = a_1 + (n-1)r$, onde n é a quantidade de termos. Portanto, $n = 13$ elementos (para maior detalhamento de Progressões Aritméticas consultar referências [8] e [9]);

ii) $B = \{b = 3k + 1, k \in \mathbb{N}; 0 \leqslant k \leqslant 13\}$;
Logo, $B = \{1, 4, ..., 40\}$. O conjunto B é uma PA de razão $r = 3$, $a_1 = 1$ e $a_n = 40$. Logo, $n = 14$ elementos;

iii) $C = \{c = 3k + 2, k \in \mathbb{N}; 0 \leqslant k \leqslant 12\}$.
Portanto, $C = \{2, 5, ..., 38\}$. O conjunto C é uma PA de razão $r = 3$, $a_1 = 2$, $a_n = 38$ com $n = 13$ elementos.

Dessa maneira, temos $I_{40} = A \cup B \cup C$.

Para escolhermos três números distintos do conjunto I_{40}, de modo que a soma seja um múltiplo de 3, teremos que escolher:

i) Três números divisíveis por 3, ou seja, 3 números do conjunto A. Podemos fazer isto de $C(13, 3) = 286$ maneiras possíveis;

ii) Três números do conjunto C. Podemos fazer isto de $C(13, 3) = 286$ modos possíveis;

iii) Um número do conjunto A, um número do conjunto B e um número do conjunto C. Pelo princípio multiplicativo, temos $C(13, 1) \cdot C(14, 1) \cdot C(13, 1) = 13 \cdot 14 \cdot 13 = 2.366$ possibilidades;

iv) Três números do conjunto B. Temos $C(14, 3) = 364$ maneiras possíveis.

Pelo princípio aditivo, existem $286 + 286 + 2.366 + 364 = 3.302$ maneiras possíveis de escolher três números do conjunto I_{40} cuja soma seja um múltiplo de 3.

Percebemos que o princípio aditivo está intrinsecamente relacionado à união de dois conjuntos disjuntos. Além disso, o princípio multiplicativo é utilizado toda vez que planejamos o grupamento em sequências de etapas. Etapas estas, nas quais as possibilidades de cada uma não dependa das escolhas feitas anteriormente.

1.2.4 Permutações com objetos idênticos

Diversos problemas de contagem consideram elementos idênticos. Nas permutações simples, ou permutações sem repetição, temos elementos distintos. Nas permutações com repetição, temos elementos diferentes, mas podemos usá-los repetidamente.

Veremos as permutações com objetos idênticos em que temos elementos iguais e/ou distintos.

Exemplo 1.2.10. Quantas sequências distintas podemos formar com 6 letras S e com 3 letras D?

Temos 6 letras S idênticas e 3 letras D idênticas, totalizando 9 posições disponíveis. Vamos calcular o total de maneiras para colocar as 6 letras S e as 3 letras D nas posições disponíveis.

i) Temos um total de 9 posições e queremos colocar as 6 letras S. Podemos fazer isto de $C(9,6)$ maneiras distintas;

ii) Restam 3 posições e queremos colocar as 3 letras D. Isso pode ser feito de $C(3,3)$ maneira.

Pela princípio multiplicativo, há $C(9,6)\cdot C(3,3) = \dfrac{9!}{6!3!}\cdot\dfrac{3!}{0!3!} = \dfrac{9!}{6!3!} = 84$ maneiras distintas de obtermos as sequências desejadas.

Teorema 1.2.11. *O número de permutações distintas de n objetos em que temos n_1 objetos idênticos do tipo 1, n_2 objetos idênticos do tipo 2, n_3 objetos idênticos do tipo 3, ... e n_k objetos idênticos do tipo k, é*

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Demonstração. Para determinar o número de permutações, calcularemos o total de maneiras de colocar os n_j objetos do tipo j, com $1 \leq j \leq k$ nas posições disponíveis.

i) Temos um total de n posições e queremos colocar os n_1 objetos do tipo 1. Como trocar a ordem de objetos idênticos não gera outro grupamento, a situação se enquadra em combinações simples. Isto pode ser feito de $C(n, n_1)$ maneiras distintas;

ii) Restam $n - n_1$ posições e iremos colocar os n_2 objetos do tipo 2. Podemos fazer de $C(n - n_1, n_2)$ modos diferentes;

iii) Restam $n - n_1 - n_2$ posições disponíveis e queremos colocar os n_3 objetos do tipo 3. Isto pode ser feito de $C(n - n_1 - n_2, n_3)$ maneiras distintas.

E, assim por diante, até colocarmos os n_k objetos do tipo k nas $n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1}$ posições disponíveis. Isto pode ser feito de $C(n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1}, n_k)$ modos diferentes. Pelo princípio multiplicativo, temos

$$\begin{aligned} C(n, n_1) \cdot ... \cdot C(n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1}, n_k) &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot ... \cdot \frac{(n - n_1 - n_2 - ... - n_{k-1})!}{n_k!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} \end{aligned}$$

maneiras de colocar os n_j objetos do tipo j, com $1 \leq j \leq k$, nas posições disponíveis.

Logo, temos

$$P_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

$\square$

1.2.5 Combinações completas ou com repetição

As combinações completas ou com repetição acontecem em problemas de contagem em que devemos escolher k objetos dentre n objetos distintos, valendo escolher o mesmo objeto mais de uma vez.

Exemplo 1.2.12. De quantas maneiras podemos comprar 3 sorvetes em uma sorveteria, sabendo que há 6 sabores diferentes disponíveis?

Poderíamos pensar que a solução seria $C(6, 3) = 20$. Esta resposta é o número de maneiras de escolher 3 sorvetes **diferentes** com 6 sabores distintos, não valendo escolher o mesmo sabor mais de uma vez.

Na realidade, poderíamos escolher o mesmo sabor mais de uma vez. Dessa forma, queremos saber o número de modos de escolher 3 sorvetes **distintos ou não** dentre 6 sabores diferentes.

A ordem em que cada sabor escolhido não é relevante, mas o sabor é relevante, e cada sorvete deve ter apenas um sabor. Se listarmos todas as maneiras possíveis de escolher os sorvetes, encontraremos 56 modos possíveis de obter 3 sorvetes com 6 sabores distintos.

A solução é o número de 3-combinações com repetição, de um conjunto de 6 elementos distintos, valendo escolher o mesmo sabor mais de uma vez. Usaremos a seguinte notação: $CR(6,3) = 56$.

Suponhamos que uma caixa tenha 6 compartimentos, separados por 5 divisórias, representadas por barras. A escolha de 3 sorvetes corresponde a colocar 3 asteriscos nos compartimentos para sabores diferentes.

Para a escolha de dois sorvetes de sabores tipo 1 e um sorvete sabor tipo 3, podemos representar esta solução utilizando asteriscos e barras da seguinte maneira: $**||*|||$.

Para escolhermos um sorvete de sabor tipo 2, um sorvete de sabor tipo 4 e um sabor do tipo 6, podemos representar esta solução da seguinte maneira: $|*||*||*$. Reciprocamente, cada representação de barras e asteriscos desta forma, corresponde a escolha de um sorvete de sabor tipo 2, um sorvete de sabor tipo 4 e um sabor do tipo 6.

Assim, o número de modos de escolher 3 sorvetes com 6 sabores distintos, corresponde ao número de maneiras de organizar as cinco barras e três asteriscos. Consequentemente, o números de formas de escolher 3 sorvetes é exatamente o número de modos de escolher as posições dos 3 asteriscos, a partir de 8 posições possíveis. Isto representa o número de escolhas não-ordenadas de 3 objetos de um conjunto de 8 objetos, o que pode ser feito de $C(8,3) = 56$ maneiras.

Poderíamos também escolher, de maneira não-ordenada, as posições das 5 barras, a partir das 8 posições disponíveis. Isto pode ser feito de $C(8,5) = 56$ modos.

Logo, $CR(6,3) = C(8,3) = C(8,5) = 56$.

Exemplo 1.2.13. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 3$?

Representaremos cada solução da equação dada por uma fila de asteriscos e barras. Dessa maneira, a solução $(2,0,1,0,0,0)$ corresponderia a seguinte fila: $**||*|||$. Nesta representação, as barras são utilizadas para separar as incógnitas e a quantidade de asteriscos indica o valor numérico de cada incógnita. Reciprocamente, cada fila da forma $**||*|||$, corresponde a solução $(2,0,1,0,0,0)$.

A representação da solução $(0,1,0,1,0,1)$ através de asteriscos e barras é da seguinte forma: $|*||*||*$. Reciprocamente, cada fila de asteriscos e barras organizada desta maneira, corresponde a solução $(0,1,0,1,0,1)$. Há, então, uma correspondência biunívoca entre cada disposição dos asteriscos e barras, e uma solução da equação dada.

Portanto, cada solução corresponde a uma fila com 5 barras, para separar as 6 incógnitas e 3 asteriscos. Para obtermos uma fila com 5 barras e 3 asteriscos, é necessário escolhermos dos 8 lugares onde serão colocados os 3 asteriscos. Isto pode ser feito de $C(8,3) = 56$ modos.

Observamos que a quantidade de maneiras de comprar 3 sorvetes numa sorveteria que oferece 6 sabores distintos é a mesma quantidade das soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_6 = 3$.

O exemplo a seguir generaliza os raciocínios desenvolvidos nos exemplos 1.2.12 e 1.2.13.

Exemplo 1.2.14. Quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$, onde n e k são inteiros positivos dados?

Cada solução da equação corresponde a uma forma de escolher k elementos dentre n elementos, mas permitindo repetições. O número de soluções é representado por $CR(n,k)$.

Vamos utilizar dois símbolos para representar cada solução. Cada uma destas soluções será apresentada por uma fila de k asteriscos (representam os valores das incógnitas) e $n-1$ barras. Estas barras são utilizadas para separar os asteriscos (as incógnitas). Reciprocamente, cada fila desta forma corresponde a uma solução.

Assim, como fazer a correspondência biunívoca entre as disposições dos asteriscos e das barras com as soluções da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$?

O primeiro grupo de asteriscos corresponde ao valor de x_1, o segundo grupo corresponde ao valor de x_2 e, assim sucessivamente, até o n-ésimo grupo que corresponde ao valor de x_n. Devemos ter $n-1$ barras para separar os n grupos, devemos ter um total de k asteriscos.

Dessa forma, temos um total de $[k + (n-1)] = n + k - 1$ posições para colocar k asteriscos, ou seja, basta escolher k dentre os $n + k - 1$ lugares para colocar os asteriscos.

Logo, a quantidade de filas formadas, seguindo essas regras é

$$C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Assim, há $C(n+k-1,k)$ soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$.

Podemos usar a seguinte notação para combinações completas ou com repetição: $CR(n,k)$.

Logo,

$$CR(n,k) = C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

O teorema seguinte, disponível na referência [12], resume as k-combinações com repetição de um conjunto de n elementos.

Teorema 1.2.15. *Há $C(n+k-1,k)$ $k-$combinações de um conjunto com n elementos, quando a repetição dos elementos é permitida.*

Exemplo 1.2.16. Determine o número de soluções inteiras e não-negativas da inequação $x+y+z \leq 6$.

Vamos aplicar o teorema de combinações completas ou com repetição 1.2.15 para a equação $x+y+z=k$, com $0 \leq k \leq 6$ e k inteiro:

i) $x+y+z=0$. A solução é $CR(3,0) = C(2,0) = 1$;

ii) $x+y+z=1$. A solução é $CR(3,1) = C(3,1) = 3$;

iii) $x+y+z=2$. A solução é $CR(3,2) = C(4,2) = 6$;

iv) $x+y+z=3$. Logo, a solução é $CR(3,3) = C(5,3) = 10$;

v) $x+y+z=4$. Temos a solução desta equação: $CR(3,4) = C(6,4) = 15$;

vi) $x+y+z=5$. Assim, $CR(3,5) = C(7,5) = 21$ é a solução desta equação;

vii) $x+y+z=6$. Temos a seguinte solução: $CR(3,6) = C(8,6) = 28$.

Portanto, pelo princípio aditivo, temos $1+3+6+10+15+21+28 = 84$ soluções inteiras e não-negativas da desigualdade $x+y+z \leq 6$.

Podemos solucionar este exemplo de outra maneira.

Consideremos a variável f na equação $x+y+z+f=6$. Se $f=6$, então $x+y+z=0$ que é o item (i) da solução anterior. Se $f=5$, então $x+y+z=1$ que é o item (ii) da solução anterior e, assim por diante. Logo, a variável f é chamada *variável de folga* e a solução da equação $x+y+z+f=6$ é a mesma solução da desigualdade $x+y+z \leq 6$. Portanto, a solução é $CR(4,6)=C(9,6)=84$.

1.3 Números Binomiais

Nessa seção, veremos a definição dos números binomiais para números inteiros não-negativos, a mesma encontrada nos livros da educação básica. Seguiremos as abordagens apresentadas nas referências [3], [8], [9] e [12].

Consideremos a seguinte situação: Seja A o conjunto formado por n elementos. Podemos representá-lo pela seguinte notação: $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. De quantas maneiras selecionamos k elementos dentre n elementos distintos? Ou seja, quantos subconjuntos podemos obter com k elementos do conjunto A?

Vamos supor que o conjunto A tenha quatro elementos e queremos obter subconjuntos com dois elementos. Logo, considerando $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, podemos formar os seguintes subconjuntos com dois elementos:

$$\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_1,a_4\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\},\{a_3,a_4\}.$$

Portanto, podemos formar seis subconjuntos com dois elementos do conjunto A.

A escolha do primeiro elemento da combinação pode ser feita de quatro maneiras, já a escolha do segundo elemento só pode ser feita de três modos diferentes. Sendo assim, poderíamos concluir que a resposta seria $4 \cdot 3 = 12$ subconjuntos. Entretanto, os subconjuntos $\{a_1,a_2\},\{a_2,a_1\}$ são idênticos e foram contados como se fossem distintos.

De fato, se há quatro modos de escolhas para o primeiro elemento é porque estamos considerando as escolhas a_1 e a_2 como distintas, e estamos contando $\{a_1,a_2\}$ como diferente do subconjunto $\{a_2,a_1\}$. Como cada combinação foi contada $2!$ vezes, podemos obter $\dfrac{12}{2!}=6$ subconjuntos.

Dessa maneira, para o conjunto A com n elementos, existem n escolhas possíveis para o primeiro elemento, para o segundo elemento há $n-1$ escolhas e, assim sucessivamente, até $[n-(k-1)]=n-k+1$ escolhas para o k-ésimo elemento. Pelo princípio multiplicativo, temos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ possibilidades. Assim, escolhemos em ordem, k elementos.

Faremos a correção dessa contagem, pois a mesma foi feita indevidamente ao contar os elementos em ordem. Cada subconjunto com k elementos foi contado múltiplas vezes. Estamos contando os subconjuntos com k elementos tantas vezes quanto são as suas possíveis ordens $k!$. Ou seja, cada subconjunto com k elementos possui $k!$ ordenações distintas. Dessa forma, a correção é feita dividindo o produto obtido por $k!$. O número de maneira de selecionarmos k elementos dentre n elementos distintos disponíveis é representado pela expressão

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (1)}.$$

A notação matemática $\binom{n}{k}$ representa um número binomial. Esse nome, número binomial, se deve ao binômio de Newton o qual é uma propriedade importante que veremos ainda neste capítulo. Podemos chamá-lo também de coeficiente binomial ou número combinatório. A leitura deste símbolo é "combinação de n k a k"em decorrência da interpretação combinatória, pois é a quantidade de maneiras diferentes de escolher k elementos dentre n elementos distintos disponíveis. Podemos usar as seguintes leituras: "n escolhe k"ou escolher "k de n".

Temos, assim

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (1)}. \tag{1.3.1}$$

Pela interpretação combinatória n e k devem ser inteiros não-negativos com $k \leqslant n$. Dessa maneira, podemos multiplicar o numerador e o denominador da expressão do lado direito da equação (1.3.1) por $(n-k)!$.

Definição 1.3.1. Sejam n, k números inteiros não-negativos, com $k \leq n$, o número binomial de n sobre k é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

onde n representa a ordem e k representa a classe.

Podemos também chamar n de índice superior e k de índice inferior. De acordo com a definição apresentada, temos os seguintes números binomiais:

i) $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = 1;$

ii) $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = 1;$

iii) $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$, para $n \geq 1$.

A definição de número binomial é a mesma apresentada para o cálculo de combinações simples. Dessa maneira, podemos representar $C(n,k)$ utilizando a notação $\binom{n}{k}$.

Esta notação é universal e é encontrada nos livros de ensino superior, ao passo que a notação $C(n,k)$ é muito utilizada nos livros do ensino básico e raramente nos livros de ensino superior. Portanto, utilizaremos a notação universal daqui em diante.

Daremos algumas interpretações combinatórias de alguns números binomiais. Dado um conjunto A de n elementos, a quantidade de subconjuntos com k elementos que podemos obter, considerando:

i) $k = 0$. Obtemos um subconjunto sem elementos, ou seja, o conjunto vazio. Representando essa situação em número binomial, temos

$$\binom{n}{0} = 1;$$

ii) $k = 1$. Podemos formar n subconjuntos com 1 elemento, ou seja, os conjuntos unitários. Representando essa situação em número binomial, temos

$$\binom{n}{1} = n;$$

iii) $k = n$. Obtemos um subconjunto com n elementos, ou seja, o próprio conjunto A. Dessa maneira, temos

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1.$$

1.4 Triângulo de Pascal

Nesta seção, apresentaremos a disposição dos coeficientes binomiais no triângulo de Pascal clássico e ilustraremos as propriedades decorrentes da definição de números binomiais 1.3.1 neste triângulo. Utilizaremos a técnica combinatorial para demonstrar tais propriedades. Uma demonstração combinatória de uma identidade é aquela que usa argumentos de contagem para provar que ambos os lados de uma identidade fazem a contagem dos mesmos objetos, mas de maneiras diferentes. Seguiremos as referências [3], [8], [9], [12] e [15].

Chamamos de triângulo aritmético de Tartaglia[1]- Pascal[2] ou Triângulo de Pascal o quadro numérico triangular infinito ou arranjo geométrico triangular formado pelos números binomiais $\binom{n}{k}$, onde n e k são números inteiros não-negativos, com $0 \leqslant k \leqslant n$ que apresentam a seguinte organização:

i) O coeficiente binomial da linha n e coluna k é $\binom{n}{k}$;

ii) Os coeficientes binomiais da linha n, em ordem, são $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, ..., \binom{n}{n}$;

iii) Os coeficientes binomiais da coluna k, de maneira ordenada são $\binom{k}{k}, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, ...$

O triângulo de Pascal é um dispositivo onde são organizados os coeficientes binomiais através de um quadro em que se inicia com a linha número 0 e coluna número 0. Temos assim, o primeiro número binomial $\binom{n}{k} = \binom{0}{0}$.

i) Os números binomiais situados na linha 1, ordenadamente, são $\binom{1}{0}, \binom{1}{1}$;

ii) Os números binomiais dispostos na linha 2, em ordem, são $\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}$;

iii) Os números binomiais localizados na linha 3, de maneira ordenada, são $\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$.

E assim sucessivamente. Dessa forma, apresentaremos o triângulo de Pascal ou triângulo combinatório com os coeficientes binomiais, conforme tabela 1.1.

[1]Tartaglia, Nicolo Fontana $(1500 - 1557)$.

[2]Pascal, Blaise $(1623 - 1662)$, matemático, filósofo e físico francês. Investigou as propriedades do quadro numérico triangular ou triângulo aritmético.

Tabela 1.1: Triângulo de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	$\dots$	$k-1$	k	$k+1$	$\dots$
0	$\binom{0}{0}$											
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$										
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$									
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$								
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$							
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$						
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$					
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						$\dots$				$\dots$
$n-1$	$\binom{n-1}{0}$	$\binom{n-1}{1}$	$\dots$					$\dots$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	$\binom{n-1}{k+1}$	
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\dots$					$\dots$	$\binom{n}{k-1}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1}$	
$n+1$	$\binom{n+1}{0}$	$\binom{n+1}{1}$	$\dots$					$\dots$	$\binom{n+1}{k-1}$	$\binom{n+1}{k}$	$\binom{n+1}{k+1}$	
$\vdots$								$\dots$				$\dots$

Fonte: Elaboração própria.

Vamos apresentar também o triângulo de Pascal em forma de triângulo de valores, ou seja, calculando o valor numérico de cada coeficiente binomial, a partir da definição de números binomiais 1.3.1. Temos, então:

i) $n = 0$ e $k = 0$.

$$\binom{n}{k} = \binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1;$$

ii) $n = 1$ e $k = 0$.

$$\binom{n}{k} = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = 1;$$

iii) $n = 1$ e $k = 1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1;$$

iv) $n = 2$ e $k = 0$.

$$\binom{n}{k} = \binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 1;$$

v) $n = 2$ e $k = 1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2.$$

E, assim por diante. Dessa maneira, apresentaremos o triângulo de valores conforme a tabela 1.2.

Tabela 1.2: Triângulo de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
⋮								...

Fonte: Elaboração própria.

É fácil notar que todos os números binomiais da forma $\binom{n}{0}$ são iguais a 1. Analogamente, todos os números da forma $\binom{n}{n}$ valem 1.

Os coeficientes binomiais, no triângulo de Pascal, satisfazem várias propriedades e nos permitem fazer interpretações gráficas de identidades relativas aos números binomiais.

1.4.1 Números Binomiais Complementares

Esta propriedade nos informa que coeficientes binomiais de uma mesma linha, no triângulo de Pascal, e equidistantes dos extremos tem o mesmo valor numérico.

Na linha 5 do triângulo de Pascal, os termos das colunas 2 e 3 são iguais. Estes termos são equidistantes dos extremos. Podemos também perceber que os elementos das colunas 1 e 4 da linha 6 deste triângulo tem o mesmo valor numérico. Observemos nas tabelas 1.3 e 1.4.

Tabela 1.3: Números binomiais complementares.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$		
$\vdots$								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 1.4: Números binomiais complementares.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$								...

Fonte: Elaboração própria.

Teorema 1.4.1. *Sejam n e k números inteiros não-negativos, com $0 \leq k \leq n$, vale a identidade*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demonstração. Do ponto de vista combinatório, escolher k dentre n elementos é o mesmo que escolher $n - k$ que não se quer destes n elementos.

Há, portanto, uma correspondência biunívoca de subconjuntos de k elementos e subconjuntos de $n - k$ elementos. Ao escolhermos subconjuntos de k elementos estamos, simultaneamente, escolhendo $n - k$ que não queremos. Assim, a quantidade de subconjuntos é a mesma. □

No triângulo de Pascal, essa propriedade nos mostra a simetria dos números binomiais de qualquer linha, sendo a disposição deles da direita para a esquerda a mesma da esquerda para a direita.

1.4.2 Relação de Stifel

Somando dois números consecutivos de uma mesma linha, obtemos o elemento abaixo da última parcela, situado na mesma coluna desta. Esta propriedade é conhecida como relação de Stifel (algebrista alemão, 1487-1567) no triângulo de Pascal.

Esta propriedade estabelece uma relação dos elementos da n-ésima linha aos dois elementos consecutivos da linha anterior do triângulo de Pascal. Por exemplo, ao somarmos os dois elementos das colunas 2 e 3 da linha 5 deste triângulo obtemos o elemento situado na linha 6 e na coluna 3. Podemos visualizar este exemplo nas tabelas 1.5 e 1.6.

Tabela 1.5: Relação de Stifel.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$ $+$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$=$ $\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$\vdots$								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 1.6: Relação de Stifel.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10 $+$	10	5	1		
6	1	6	15	$=$ 20	15	6	1	
$\vdots$								...

Fonte: Elaboração própria.

Teorema 1.4.2. *Dados n e k números inteiros positivos, com $k \leq n$, temos a identidade*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. Sejam n e k números inteiros positivos com $k \leq n$.

O número de modos distintos de escolher os subconjuntos de k elementos em um conjunto com n elementos é $\binom{n}{k}$.

Podemos fazer essa mesma contagem de outra maneira de modo a obter

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Se tivermos um conjunto com n maçãs que possui uma maçã estragada, podemos obter todos os seus subconjuntos de k elementos dividindo em dois casos **distintos**:

i) Subconjuntos que não possuem a maçã estragada. Retirando essa maçã, teremos $n-1$ maçãs, destas escolheremos subconjuntos com k maçãs. Logo, há $\binom{n-1}{k}$ maneiras distintas;

ii) Subconjuntos que possuem a maçã estragada. Incluindo esta maçã em todos os subconjuntos, restam um total de $k-1$ maçãs para serem escolhidas, no total de $n-1$ maçãs. Isso poderá ser feito de $\binom{n-1}{k-1}$ maneiras distintas.

Pelo princípio aditivo, obtemos

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Logo,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Temos uma relação de recorrência para os números, no triângulo de Pascal, pois a relação de Stifel nos permite recursivamente obter as linhas do triângulo uma após a outra. Assim, esta identidade é a base para o arranjo geométrico de coeficientes binomiais em forma de triângulo.

A relação de Stifel também nos permite encontrar todos os elementos de uma coluna, exceto o primeiro elemento. Para obtermos o elemento $\binom{n}{1}$ da coluna 1, por exemplo, basta somar os dois primeiros elementos consecutivos $\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right]$ da linha anterior das colunas 0 e 1. Isso vale para toda a coluna 1. Vamos aplicar o operador diferença para dois elementos consecutivos desta coluna:

a) $\Delta = 2 - 1 = 1$;

b) $\Delta = 3 - 2 = 1$;

c) $\Delta = 4 - 3 = 1$.

E, assim por diante. Dessa forma, as diferenças de dois elementos consecutivos situados na coluna 1 é sempre igual a 1, configurando os elementos da coluna 0. Logo, a coluna 1 é uma sequência numérica formada por uma Progressão Aritmética (PA) de primeira ordem.

Analogamente, para obtermos o elemento $\binom{n}{2}$ da coluna 2, somamos dois elementos consecutivos da linha anterior $\left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right]$ das colunas 1 e 2. Isso é válido para toda a coluna 2. Aplicando o operador diferença para dois elementos consecutivos desta coluna, temos:

a) $\Delta = 3 - 1 = 2$;

b) $\Delta = 6 - 3 = 3$;

c) $\Delta = 10 - 6 = 4$.

E assim sucessivamente. Dessa forma, as diferenças de dois elementos consecutivos situados na coluna 2 formam uma PA que se configura nos elementos da coluna 1. Logo, a coluna 2 é uma PA de segunda ordem ou de ordem 2 (para um maior aprofundamento do estudo de PA de ordem superior consultar a referência [8]).

Aplicando o operador diferença para dois elementos consecutivos da coluna 3, temos:

a) $\Delta = 4 - 1 = 3$;

b) $\Delta = 10 - 4 = 6$;

c) $\Delta = 20 - 10 = 10$.

E, assim por diante. Portanto, as diferenças de dois elementos consecutivos situados na coluna 3 caracterizam os números da coluna 2. Assim, a coluna 3 é uma PA de terceira ordem.

Dessa maneira, as diferenças de dois números consecutivos situados na coluna k formam uma PA que se configura nos elementos da coluna $k-1$. A sequência numérica infinita da coluna k é uma PA de ordem k.

1.4.3 Teorema das linhas

Esta propriedade nos permite calcular, de maneira prática, a soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

Exemplo 1.4.3. Consideremos $n = 4$. Calcularemos a soma de todos os elementos da linha 4 do triângulo de Pascal:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^n = 2^4.$$

Exemplo 1.4.4. Calcularemos a soma de todos os elementos da linha 5 do triângulo de Pascal:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^n = 2^5.$$

Ilustraremos esses exemplos nas tabelas 1.7 e 1.8.

Tabela 1.7: Teorema das linhas.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$ +	$\binom{4}{1}$ +	$\binom{4}{2}$ +	$\binom{4}{3}$ +	$\binom{4}{4}$ $= 2^4$			
5	$\binom{5}{0}$ +	$\binom{5}{1}$ +	$\binom{5}{2}$ +	$\binom{5}{3}$ +	$\binom{5}{4}$ +	$\binom{5}{5}$ $= 2^5$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$\vdots$								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 1.8: Teorema das linhas.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1 +	4 +	6 +	4 +	1 = 16			
5	1 +	5 +	10 +	10 +	5 +	1 =32		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$								...

Fonte: Elaboração própria.

Teorema 1.4.5. *Sejam $n, k \in \mathbb{Z}$, com $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, vale a identidade*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Demonstração. Vamos fazer a contagem de modo a obter 2^n.

Para obtermos a quantidade de subconjuntos de A com n elementos é necessário decidir se cada um dos seus n elementos pertencerá ou não a esse subconjunto (2 possibilidades). Pelo princípio multiplicativo, isso poderá ser feito de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^n$ maneiras distintas.

Vamos fazer essa mesma contagem dos subconjuntos de outra maneira, de modo a obter

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Dado um conjunto A com n elementos, sabemos que $\binom{n}{k}$ é o número de subconjuntos com k elementos do conjunto A.

Contando **separadamente** os subconjuntos de acordo com a cardinalidade, temos:

i) Para $k = 0$, existem $\binom{n}{0}$ maneiras de escolher os subconjuntos com zero elemento;

ii) Para $k = 1$, há $\binom{n}{1}$ maneiras de escolher os subconjuntos com um elemento;

iii) Para $k = 2$, temos $\binom{n}{2}$ maneiras de escolher os subconjuntos com dois elementos.

E, assim por diante, até termos $k = n$, com $\binom{n}{n}$ maneiras de escolher os subconjuntos com n elementos.

Sendo assim, pelo princípio aditivo, há um total de

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

subconjuntos do conjunto A.

Portanto,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

□

1.4.4 Teorema das linhas alternadas

Esta propriedade nos informa que a soma, com sinais alternados, de todos os elementos de qualquer linha (exceto a linha 0) do triângulo de Pascal é nula.

Exemplo 1.4.6. Consideremos a linha $n = 5$ do triângulo de Pascal. Calculando a soma de seus elementos, com sinais alternados, temos

$$\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} \quad = \quad 1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0.$$

Podemos verificar este exemplo nas tabelas 1.9 e 1.10.

Tabela 1.9: Teorema das linhas alternadas.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$ -	$\binom{5}{1}$ +	$\binom{5}{2}$ -	$\binom{5}{3}$ +	$\binom{5}{4}$ -	$\binom{5}{5}$ $= 0$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$\vdots$								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 1.10: Teorema das linhas alternadas.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1 -	5 +	10 -	10 +	5 -	1 $= 0$		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$								...

Fonte: Elaboração própria.

Teorema 1.4.7. *Sejam k e n números inteiros, com $0 \leq k \leq n$ e $n \geq 1$, vale a identidade*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} ... + (-1)^k \cdot \binom{n}{n} = 0.$$

Demonstração. Consideremos o conjunto A com n elementos e $x \in A$. Seja p o total de subconjuntos de A com número par de elementos e q o total de subconjuntos de A com número ímpar de elementos. Como visto na demonstração da identidade binomial teorema das linhas 1.4.5, temos

$$p = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ...$$

$$q = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ...$$

Para obtermos p, dividiremos em dois casos **distintos**:

i) Subconjuntos que possuem o elemento x. Assim, temos que escolher um número ímpar de elementos dentre os $n-1$ elementos restantes do conjunto A;

ii) Subconjuntos que não possuem o elemento x. Dessa maneira, temos que escolher um número par de elementos dentre os $n-1$ demais elementos do conjunto A.

Pelo princípio aditivo, temos

$$\begin{aligned} p &= \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + ... + \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{2} + ... \\ &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + ... \end{aligned}$$

Analogamente, para obtermos q, dividiremos em dois casos **distintos**:

i) Subconjuntos que possuem o elemento x. Assim, temos que escolher um número par de elementos dentre os $n-1$ elementos restantes do conjunto A;

ii) Subconjuntos que não possuem o elemento x. Dessa maneira, temos que escolher um número ímpar de elementos dentre os $n-1$ demais elementos do conjunto A.

Pelo princípio aditivo, temos

$$
\begin{aligned}
q &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{3} + ... \\
&= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + ...
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $p = q$.

Donde

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} ... + (-1)^k \cdot \binom{n}{n} = p - q = 0.$$

□

1.4.5 Teorema das colunas

Esta identidade nos dá a fórmula fechada para calcularmos a soma do primeiro elemento até um elemento qualquer de uma determinada coluna no triângulo de Pascal. O resultado desta soma é igual ao elemento situado na coluna à direita da última parcela e na linha imediatamente abaixo desta.

Exemplo 1.4.8. Calcularemos a soma dos quatros primeiros termos da coluna 2 do triângulo de Pascal.

$$
\begin{aligned}
\binom{2}{2} + \binom{2+1}{2} + \binom{2+2}{2} + \binom{2+3}{2} &= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} \\
&= 1 + 3 + 6 + 10 = 20.
\end{aligned}
$$

O resultado desta soma pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\binom{2+3+1}{2+1} = \binom{6}{3} = 20.$$

Podemos verificar este exemplo nas tabelas 1.11 e 1.12.

Tabela 1.11: Teorema das colunas.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
⋮								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 1.12: Teorema das colunas.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
⋮								...

Fonte: Elaboração própria.

Teorema 1.4.9. *Sejam p, k e n números inteiros não-negativos. Vale a identidade*

$$\sum_{0 \leq k \leq p} \binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar através da técnica combinatorial, recorrendo ao seguinte problema.

Em um concurso público foram disponibilizadas $n + p + 1$ vagas. Cada candidato classificado tomou posse com o número de matrícula igual a sua classificação do resultado final do concurso. Assim, o primeiro colocado teve seu registro de matrícula o número 1, o segundo colocado teve seu registro de matrícula o número 2, e assim sucessivamente até o $(n+p+1)$-ésimo candidato, que teve como seu registro de matrícula o número $n+p+1$.

De quantas maneiras podemos formar grupos com $n + 1$ candidatos?

Ora, como temos um conjunto de $n + p + 1$ candidatos e queremos formar subconjuntos de $n + 1$ candidatos, então podemos selecionar de $\binom{n+p+1}{n+1}$ maneiras.

Faremos essa mesma contagem de modo a obter $\sum_{0 \leq k \leq p} \binom{n+k}{n}$.

Isso pode ser feito isolando o último colocado em cada grupo de $n + 1$ candidatos. Consideremos o pior colocado no grupo de $n + 1$ candidatos. Assim, a classificação deste candidato varia de $n + 1$ a $n + p + 1$. Dividiremos essa situação em casos **distintos** para formar todos os grupos com os $n + 1$ candidatos:

i) Escolheremos as n pessoas restantes para formar o grupo, de tal forma que o candidato de pior classificação seja o candidato de número $n+1$ no concurso. Observemos que não podemos escolher candidatos com classificação maior do que $n + 1$, visto que cada um destes tem classificação pior do que o candidato de classificação $n + 1$. Assim, há $\binom{n}{n}$ maneiras;

ii) Escolheremos as n pessoas restantes para formar o grupo com o candidato que obteve a pior classificação de número $n + 2$ no concurso. Dessa forma, existem $\binom{n+1}{n}$ possibilidades;

iii) Podemos escolher dos $n + 1$ candidatos, as n pessoas para formar o grupo com o candidato que obteve a pior classificação de número $n+3$ no concurso. Há $\binom{n+2}{n}$ modos.

E, assim por diante, até escolhermos as n pessoas para formar o grupo com o candidato que obteve a pior classificação de número $n+p+1$ no concurso. Assim, há $\binom{n+p}{n}$ maneiras. Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}.$$

Logo,

$$\sum_{0\leq k\leq p}\binom{n+k}{n}=\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

□

A identidade binomial teorema das colunas nos dá a soma dos $p+1$ primeiros elementos da coluna n do triângulo de Pascal.

1.4.6 Teorema das diagonais

Esta propriedade nos fornece a fórmula fechada para calcularmos a soma dos elementos dispostos na mesma diagonal do triângulo de Pascal, desde um elemento qualquer da primeira coluna até um elemento desejado. O resultado desta soma é igual ao elemento imediatamente abaixo da última parcela, situado na mesma coluna desta.

Exemplo 1.4.10. Vamos calcular a soma dos três primeiros elementos da diagonal cuja primeira parcela é o número situado na primeira coluna da linha 3 do triângulo de Pascal.

$$\begin{aligned}\binom{3}{0}+\binom{3+1}{1}+\binom{3+2}{2} &= \binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}\\ &= 1+4+10=15.\end{aligned}$$

Podemos também obter este resultado da seguinte maneira:

$$\binom{3+2+1}{2}=\binom{6}{2}=15.$$

Ilustraremos esse exemplo nos seguintes triângulos de Pascal, conforme tabelas 1.13 e 1.14.

Tabela 1.13: Teorema das diagonais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
⋮								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 1.14: Teorema das diagonais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
⋮								...

Fonte: Elaboração própria.

Teorema 1.4.11. *Sejam p, n e k números inteiros não-negativos, com $0 \leq k \leq p$, vale a identidade*

$$\sum_{0\leq k\leq p}\binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração pela técnica combinatorial, recorrendo ao seguinte problema:

(ENQ-PROFMAT -2013-Adaptada) De quantas maneiras diferentes podemos distribuir p anéis exatamente iguais para $n+2$ dedos? Suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos.

Faremos a contagem de modo a obter $\binom{n+p+1}{p}$.

Como se trata de anéis idênticos e como vimos no estudo de combinações completas ou combinações com repetição, o número de modos distintos de distribuir p anéis idênticos para os $n+2$ dedos representa o número de escolhas não-ordenadas de escolher as posições dos p asteriscos, a partir das $\{p + [(n+2) - 1]\} = n + p + 1$ posições possíveis.

Ou seja, a resposta desse problema é a mesma de saber quantas são as soluções inteiras e não-negativas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = p$.

Utilizando o teorema 1.2.15, a resposta é o número de combinações completas ou combinações com repetição de $n + 2$ tomados p a p, ou seja, haverá $\binom{n+2+p-1}{p} = \binom{n+p+1}{p}$ maneiras de distribuir os p anéis idênticos para os $n+2$ dedos.

Vamos fazer essa mesma contagem de modo a obter $\sum_{0\leq k\leq p}\binom{n+k}{k}$.

Dividiremos em casos **distintos**.

Como temos que distribuir anéis idênticos, utilizaremos o teorema 1.2.15 para combinações completas ou com repetição. Suponhamos os dedos numerados de 1 a $n+2$.

i) Distribuiremos os p anéis para o $(n+2)$-ésimo dedo e distribuiremos 0 anel para os $n+1$ primeiros dedos. Podemos fazer isso de $\binom{n+1+0-1}{0} = \binom{n+0}{0}$ maneiras;

ii) Distribuiremos os $p-1$ anéis para o $(n+2)$-ésimo dedo e distribuiremos 1 anel para os $n+1$ primeiros dedos. Isso pode ser feito de $\binom{n+1+1-1}{1} = \binom{n+1}{1}$ modos;

iii) Podemos distribuir os $p-2$ anéis para o $(n+2)$-ésimo dedo e distribuiremos 2 anéis restantes para os $n+1$ primeiros dedos. Há, então $\binom{n+1+2-1}{2} = \binom{n+2}{2}$ possibilidades;

iv) Faremos a distribuição dos $p-3$ anéis para o $(n+2)$-ésimo dedo e distribuiremos 3 anéis para os $n+1$ primeiros dedos. Existem, portanto $\binom{n+1+3-1}{3} = \binom{n+3}{3}$ modos.

E, assim por diante, até o $(p+1)-$ésimo caso ao distribuirmos os $(p-p) = 0$ anel para o $(n+2)-$ésimo dedo e distribuiremos p anéis para os $n+1$ primeiros dedos. Podemos fazer isso de $\binom{n+1+p-1}{p} = \binom{n+p}{p}$ maneiras.

Logo, pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+p}{p}$$

maneiras de distribuir p anéis idênticos para $n+2$ dedos.

Portanto, temos

$$\sum_{0 \leq k \leq p} \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + ... + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}.$$

$\square$

A identidade teorema das diagonais nos fornece a fórmula resultante do somatório dos $p+1$ primeiros elementos de uma diagonal cuja primeira parcela é o número binomial $\binom{n}{0}$.

Vamos retomar o exemplo 1.2.16 visto em combinações completas ou com repetição:

Determine o número de soluções inteiras e não-negativas da inequação $x+y+z \leq 6$.

Vamos utilizar o teorema 1.2.15 de combinações completas ou com repetição para a equação $x+y+z = k$, com k inteiro e $0 \leq k \leq 6$. Assim, temos:

i) $x+y+z = 0$. A solução é $\binom{3+0-1}{0} = \binom{2}{0}$;

ii) $x+y+z = 1$. A solução é $\binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1}$;

iii) $x+y+z = 2$. A solução é $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2}$;

iv) $x+y+z = 3$. A solução é $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3}$;

v) $x+y+z = 4$. Assim, a solução é $\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$;

vi) $x+y+z = 5$, cuja solução é $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5}$;

vii) $x+y+z=6$, com solução $\binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6}$.

Utilizando o princípio aditivo, temos

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+...+\binom{n+p}{p} &= \binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+...+\binom{8}{6} \\ &= 1+3+6+10+15+21+28 \\ &= 84.\end{aligned}$$

Temos a expressão do lado esquerdo da identidade binomial teorema das diagonais. Podemos solucionar o exemplo 1.2.16 de outra maneira.

Vamos considerar a variável f na equação $x+y+z+f=6$. Se $f=6$, então $x+y+z=0$ que é o item (i) da solução anterior. Se $f=5$, então $x+y+z=1$ que é o item (ii) da solução anterior. Se $f=4$, então $x+y+z=2$ que é o item (iii) da solução anterior e, assim sucessivamente. Logo, a solução da equação $x+y+z+f=6$ é idêntica a solução da desigualdade $x+y+z\leq 6$.

Portanto, a solução é

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84.$$

Temos a expressão do lado direito da propriedade teorema das diagonais.

1.5 Binômio de Newton

Nesta seção, veremos a relação entre o triângulo de Pascal e o binômio de Newton. Seguiremos as abordagens apresentadas nas referências [3], [8], [9] e [12].

O binômio de Newton expressa as potências do binômio $(x+y)$ como um polinômio. Os coeficientes binomiais surgem ao desenvolvermos uma potência inteira não-negativa n do binômio $(x+y)$, onde a sequência dos coeficientes numéricos do polinômio obtido é a mesma sequência dos números binomiais dispostos na linha n do triângulo de Pascal.

Exemplo 1.5.1. Vejamos, ao expandirmos as potências do binômio $(x+y)$, considerando os expoentes das potências inteiras não-negativas:

i) $(x+y)^0 = \mathbf{1}x^0y^0$;

ii) $(x+y)^1 = \mathbf{1}x^1y^0 + \mathbf{1}x^0y^1$;

iii) $(x+y)^2 = \mathbf{1}x^2y^0 + \mathbf{2}x^1y^1 + \mathbf{1}x^0y^2$;

iv) $(x+y)^3 = \mathbf{1}x^3y^0 + \mathbf{3}x^2y^1 + \mathbf{3}x^1y^2 + \mathbf{1}x^0y^3$;

v) $(x+y)^4 = \mathbf{1}x^4y^0 + \mathbf{4}x^3y^1 + \mathbf{6}x^2y^2 + \mathbf{4}x^1y^3 + \mathbf{1}x^0y^4$.

E, assim por diante.

Podemos também expressar os coeficientes de cada polinômio usando os números binomiais. Vejamos:

i) $(x+y)^0 = \binom{0}{0}x^0y^0$;

ii) $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1$;

iii) $(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2$;

iv) $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$;

v) $(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$.

E, assim sucessivamente.

Usando a interpretação combinatória podemos encontrar os coeficientes da expansão $(x + y)^4$ em vez de multiplicar os quatro termos. Quando expandimos $(x + y)^4 = (x + y)(x + y)(x + y)(x + y)$, todos os produtos de um termo na primeira soma, um termo na segunda soma, um termo na terceira soma e um termo na quarta soma são adicionados.

Vamos considerar a disposição desses termos que aparecem nessa expansão segundo as potências decrescentes de x: $x^4y^0, x^3y^1, x^2y^2, x^1y^3$ e x^0y^4. Notamos que as potências de y são crescentes. Analisaremos o padrão dos coeficientes de cada um desses termos, de acordo com a organização mencionada.

i) Para obtermos um termo na forma x^4y^0, um termo y deve ser escolhido em nenhuma das somas e um x deve ser escolhido em cada uma das somas. Isso pode ser feito de apenas um modo. Logo, o termo x^4y^0 do produto tem coeficiente igual a $\binom{4}{0} = 1$ ou $\binom{4}{4} = 1$. Observamos aqui a propriedade números binomiais complementares 1.4.1;

ii) Para obtermos um termo na forma x^3y^1, um y deve ser escolhido nessas quatro somas e um x deve ser escolhido em três dessas quatro somas. Como $(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$, temos

$$x \cdot x \cdot x \cdot y = x^3y$$
$$x \cdot x \cdot y \cdot x = x^3y$$
$$x \cdot y \cdot x \cdot x = x^3y$$
$$y \cdot x \cdot x \cdot x = x^3y$$

Isso pode ser feito de $\binom{4}{1}$ modos ou de $\binom{4}{3} = 4$ maneiras;

iii) Para obtermos um termo na forma x^2y^2, um y deve ser escolhido em duas dessas quatro somas e um x deve ser escolhido em duas dessas quatro somas. Isso pode ser feito de $\binom{4}{2} = 6$ maneiras;

iv) Para obtermos um termo na forma x^3y^1, um y deve ser escolhido em uma das quatro somas e um x deve ser escolhido em três dessas quatro somas. Isso pode ser feito de $\binom{4}{1}$ ou de $\binom{4}{3} = 4$ modos;

v) Para obtermos um termo na forma y^4x^0, um y deve ser escolhido em cada uma das somas e um x deve ser escolhido em nenhuma das somas. Isso pode ser feito de apenas um modo. Logo, o termo y^4x^0 tem coeficiente igual a $\binom{4}{4}$ ou $\binom{4}{0} = 1$.

Pelo princípio aditivo, temos

$$\binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(x+y)^4 &= (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y) \\
&= \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4 \\
&= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\
&= \sum_{k=0}^{4}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.
\end{aligned}
$$

Podemos enunciar o binômio de Newton:

Teorema 1.5.2. *Consideremos x e y como variáveis, n e k números inteiros não-negativos, com $0 \leq k \leq n$, então*

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^ny^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + ... + \binom{n}{n}x^0y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.
\end{aligned}
$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração pelo argumento combinatório, recorrendo ao seguinte problema.

No ENEM há x questões de Matemática e y questões de Física. De quantos modos n estudantes podem escolher uma questão para responder?

Podemos fazer a contagem de modo a obter $(x+y)^n$.

i) O primeiro aluno poderá escolher uma questão para resolver de $x+y$ maneiras diferentes;

ii) O segundo aluno também poderá escolher uma questão para resolver de $x+y$ maneiras distintas;

iii) O terceiro aluno poderá escolher uma questão para resolver de $x+y$ maneiras diferentes.

E, assim por diante, até o n-ésimo aluno, que poderá escolher uma questão para responder de $x+y$ maneiras distintas. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$(x+y)\cdot ... \cdot(x+y) = (x+y)^n$$

maneiras distintas de escolher uma questão.

Podemos também fazer essa a mesma contagem de modo a obter $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Seja k a quantidade de alunos que prefiram escolher questões de física para resolver, com $0 \leq k \leq n$. Sendo assim, restam $n-k$ alunos que escolherão questões de matemática para responder. Teremos os seguintes casos **distintos** a considerar:

i) Se $k = 0$, então nenhum aluno escolherá questões de física. Assim, os n alunos escolherão questões de matemática para resolver e isso pode ser feito de $\binom{n}{0} x^n y^0$ modos distintos, pois o primeiro aluno tem x maneiras de escolha, o segundo aluno tem x maneiras de escolher questões de matemática e, assim sucessivamente até o n-ésimo aluno, que tem x maneiras de escolher tais questões;

ii) Se $k = 1$, então 1 aluno escolherá questões de física para resolver. A escolha deste único aluno pode ser feita de $\binom{n}{1}$ maneiras e este aluno terá y modos de escolha, ao passo que os $n-1$ alunos restantes escolherão questões de matemática, sendo que cada um dos mesmos terá x maneiras de escolher tais questões. Isso pode ser feito de $\binom{n}{1} x^{n-1} y^1$ maneiras distintas;

iii) Se $k = 2$, então os $n-2$ alunos escolherão questões de matemática para resolver e 2 alunos escolherão questões de física. A escolha destes dois alunos pode ser feita de $\binom{n}{2}$ modos, cada um deles terá y modos de escolher questões de física e os $n-2$ alunos restantes escolherão questões de matemática, sendo que cada um dos mesmos terá x modos de escolher tais questões. Isto pode ser feito de $\binom{n}{2} x^{n-2} y^2$ modos diferentes.

E, assim sucessivamente, até o $(n+1)-$ésimo caso em que todos os n alunos escolherão responder questões de física e nenhum aluno escolherá questões de matemática. Isto pode ser feito de $\binom{n}{n} x^0 y^n$ maneiras distintas. Usando o princípio aditivo, temos

$$\binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + ... + \binom{n}{n} x^0 y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Logo,

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + ... + \binom{n}{n} x^0 y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$\square$

A disposição dos coeficientes numéricos do polinômio obtido pela expansão de uma potência inteira não-negativa n do binômio $(x+y)$ é idêntica a disposição dos números binomiais da linha n do triângulo de Pascal. Sendo assim, uma das utilidades deste triângulo é fornecer, de maneira prática, os coeficientes numéricos do polinômio obtido pela expansão das potências inteiras não-negativas do binômio $(x+y)$.

Exemplo 1.5.3. Consideremos n um número inteiro não-negativo. Mostraremos a identidade:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Demonstração. Vamos utilizar o binômio de Newton, considerando $x = 1$ e $y = 1$, temos

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

Vimos, no entanto, outra demonstração da propriedade teorema das linhas 1.4.5 a qual é a soma de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal.

Exemplo 1.5.4. Consideremos n um número inteiro positivo. Mostraremos a seguinte identidade:

$$\sum_{0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Demonstração. Vamos utilizar o binômio de Newton, considerando $x = -1$ e $y = 1$:

$$\begin{aligned} 0 = 0^n &= ((-1)+1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1^k). \end{aligned}$$

□

Temos, assim, outra demonstração da propriedade teorema das linhas alternadas 1.4.7, a qual nos fornece o resultado da soma, com sinais alternados, de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal. Isto nos permite ter a seguinte identidade:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... \qquad (1.5.1)$$

Concluímos que o número de subconjuntos de um conjunto não-vazio que tem um número ímpar de elementos é igual ao número de subconjuntos que tem um número par de elementos, como vimos na demonstração combinatorial da identidade teorema das linhas alternadas 1.4.7.

Capítulo 2

Coeficientes Binomiais Estendidos

Neste capítulo, serão apresentadas a definição estendida dos coeficientes binomiais e algumas propriedades decorrentes desta definição. Demonstraremos as identidades binomiais utilizando o método algébrico, a interpretação combinatória e outras propriedades binomiais. Para estender a validez das identidades para os números reais, recorreremos a técnica do argumento polinomial (consultar apêndice para um maior detalhamento desta técnica).

Utilizaremos o triângulo de Pascal na versão clássica, a mesma apresentada nos livros da educação básica. Utilizaremos também a extensão superior do triângulo de Pascal para ilustrar algumas propriedades binomiais.

Vimos que o coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (1)}$$

representa o número de maneiras distintas de selecionar k elementos dentre n elementos distintos.

Como não há conjuntos com quantidade de elementos negativos ou fracionários, então os índices n e k só podem ser números inteiros não-negativos, pela interpretação combinatória.

Percebemos que a definição dos números binomiais da forma $\binom{n}{k}$, com $0 \leqslant k \leqslant n$, na educação básica, é restrita apenas aos números inteiros não-negativos. No intuito de estender a definição dos coeficientes binomiais iremos retirar algumas restrições. Dessa forma, permitiremos que n seja um número real e k seja um número inteiro arbitrário.

Definição 2.0.1. Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \dfrac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot ... \cdot (r-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot (1)} = \dfrac{r^{\underline{k}}}{k!}, k \geq 0 \\ 0, k < 0, \end{cases}$$

onde r é o índice superior, k é o índice inferior e $r^{\underline{k}}$ é a potência fatorial decrescente.

Para um número inteiro n, temos

$$\binom{n}{n} = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0. \end{cases}$$

Pela definição 2.0.1 podemos perceber que o número binomial $\binom{r}{k}$ é um polinômio de grau k na variável r. Isto servirá para estender a validez das propriedades binomiais para $r \in \mathbb{R}$ através da técnica do argumento polinomial quando estas forem identidades entre polinômios.

Exemplo 2.0.2. Consideremos $r = \dfrac{1}{2}$ e $k = 3$.

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{3} &= \frac{(\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2} - 1) \cdot (\frac{1}{2} - 3 + 1)}{3!} \\ &= \frac{(\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{-3}{2})}{3 \cdot 2} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.0.3. Para $r = 3$ e $k = 5$.

$$\begin{aligned} \binom{3}{5} &= \frac{(3) \cdot (3-1) \cdot (3-2) \cdot (3-3) \cdot (3-5+1)}{5!} \\ &= \frac{(3) \cdot (2) \cdot (1) \cdot (0) \cdot (-1)}{5!} = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.0.4. Para $r = -3$ e $k = 5$.

$$\begin{aligned} \binom{-3}{5} &= \frac{(-3) \cdot (-3-1) \cdot (-3-2) \cdot (-3-3) \cdot (-3-5+1)}{5!} \\ &= \frac{(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-7)}{5!} = -21. \end{aligned}$$

Exemplo 2.0.5. Para $r = 3$ e $k = -5$.

$$\binom{3}{-5} = 0.$$

Exemplo 2.0.6. Para $r = \sqrt{2}$ e $k = 3$.

$$\begin{aligned}
\binom{\sqrt{2}}{3} &= \frac{(\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} - 3 + 1)}{3!} \\
&= \frac{(\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} - 2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= \frac{(2 - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 2)}{6} = \frac{2\sqrt{2} - 3}{3}.
\end{aligned}$$

Observamos que os coeficientes binomiais fazem sentindo quando o índice superior assume um número real e o índice inferior assume qualquer número inteiro.

2.1 Propriedades

Vimos, no segundo capítulo, algumas identidades binomiais válidas para os números inteiros não-negativos. Poderíamos levantar o seguinte questionamento: estas identidades continuam sendo válidas para os números binomiais estendidos?

Nesta seção, apresentaremos algumas propriedades dos coeficientes binomiais estendidos, conforme definição 2.0.1. Demonstraremos tais propriedades utilizando outras identidades binomiais ou através dos argumentos combinatórios e/ou algébricos.

Sabemos que a demonstração, pela técnica combinatória, de uma propriedade abrange somente os números inteiros não-negativos. Toda vez que conseguirmos demonstrar para estes valores uma identidade entre polinômios na variável r, com $r \in \mathbb{R}$, poderemos utilizar o argumento polinomial para estender a sua validez para os números reais.

Recorreremos a extensão superior do triângulo de Pascal para ilustrar as propriedades binomiais estendidas. Adotaremos as abordagens feitas pelas referências [1], [2], [3], [4], [5], [7], [9] e [12], sendo [3] a principal referência bibliográfica.

Vamos utilizar a definição de coeficientes binomiais 1.3.1 para calcular o valor numérico do seguinte número binomial:

Exemplo 2.1.1. Para $n = 1$ e $k = 3$, temos

$$\binom{1}{3} = \frac{1!}{3!(1-3)!} = \frac{1!}{3!(-2)!} = ?.$$

Neste exemplo, não podemos usar a definição de números binomiais 1.3.1, pois $n < k$. Usaremos a definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1:

$$\binom{1}{3} = \frac{1 \cdot (1-1) \cdot (1-3+1)}{3!} = \frac{1 \cdot (\mathbf{0}) \cdot (-1)}{3!} = 0.$$

Quando n e k são inteiros não-negativos com $n < k$, temos $\binom{n}{k} = 0$. Isto mostra que os lugares em branco no triângulo de Pascal são iguais a zero, conforme tabelas 2.1 e 2.2.

Tabela 2.1: Triângulo de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{3}$	$\binom{0}{4}$	$\binom{0}{5}$	$\binom{0}{6}$	
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{3}$	$\binom{1}{4}$	$\binom{1}{5}$	$\binom{1}{6}$	
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{3}$	$\binom{2}{4}$	$\binom{2}{5}$	$\binom{2}{6}$	
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{3}{4}$	$\binom{3}{5}$	$\binom{3}{6}$	
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	$\binom{4}{5}$	$\binom{4}{6}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	$\binom{5}{6}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$\vdots$								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2.2: Triângulo de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	0	0	
3	1	3	3	1	0	0	0	
4	1	4	6	4	1	0	0	
5	1	5	10	10	5	1	0	
6	1	6	15	20	15	6	1	
⋮								...

Fonte: Elaboração própria.

Essa informação não é abordada nos livros do ensino básico, pois a definição de números binomiais para valores inteiros não-negativos não é suficiente para justificar os números binomiais nulos no triângulo de Pascal.

2.1.1 Simetria

Vimos pela propriedade números binomiais complementares a simetria no triângulo de Pascal. Cada linha pode ser lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. O resultado é o mesmo. A identidade que reflete esta propriedade, também chamada de simetria, é obtida trocando o índice inferior k por $n-k$. Como visto pela identidade 1.4.1:

Dados n e k números inteiros não-negativos, com $0 \leq k \leq n$, temos

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

.

Esta propriedade continua sendo válida para índices superiores reais e índices inferiores inteiros negativos?

Sendo assim, vamos analisar esta identidade binomial para $n < 0$.

Supondo $n = -1$ e usando a definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1, consideraremos os seguintes casos:

i) $k \geq 0$

$$\begin{aligned}\binom{-1}{k} &= \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-1-k+1)}{k!}\\ &= \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-k)}{k!}\\ &= \frac{(-1)^k\cdot(1)\cdot(2)\cdot\ldots\cdot(k)}{k!}\\ &= (-1)^k\cdot\frac{k!}{k!}=(-1)^k.\end{aligned}$$

Logo,

$$\binom{-1}{k}=(-1)^k=\begin{cases}-1, \text{ se } k \text{ é ímpar}\\ \text{ou}\\ 1, \text{ se } k \text{ é par.}\end{cases}$$

Como $k \geq 0$, então $(-1-k)<0$. Assim, temos

$$\binom{-1}{-1-k}=0;$$

ii) $k<0$, então

$$\binom{-1}{k}=0.$$

Observando o lado direito da identidade, temos $(-1-k)\geq 0$, pois $k<0$. Logo,

$$\begin{aligned}\binom{-1}{-1-k} &= \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-1+1+k+1)}{(-1-k)!}\\ &= \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(k+1)}{(-1-k)!}\\ &= \frac{(-1)^{-1-k}\cdot(1)\cdot(2)\cdot\ldots\cdot(-1-k)}{(-1-k)!}\\ &= (-1)^{-1-k}\cdot\frac{(-1-k)!}{(-1-k)!}=(-1)^{-1-k}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\binom{-1}{-1-k} = (-1)^{-1-k} = \begin{cases} -1, \text{ se } (-1-k) \text{ é ímpar} \\ \text{ou} \\ 1, \text{ se } (-1-k) \text{ é par.} \end{cases}$$

Portanto, a propriedade de simetria não é válida para coeficientes binomiais com índices superiores inteiros negativos. Podemos enunciá-la:

Teorema 2.1.2. *Sejam n número inteiro não-negativo e k inteiro. Vale a identidade*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demonstração. Utilizamos o argumento combinatorial para demonstrar esta propriedade no capítulo 2, através da identidade números binomiais complementares 1.4.1, para n e k inteiros não-negativos, com $0 \leqslant k \leqslant n$.

Nos casos em que $k < 0$, ambos os lados da identidade são iguais a zero, pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1. Para $n < k$, ambos os lados também são nulos. □

Notemos que a propriedade de simetria não é uma identidade polinomial, pois o lado direito não é um polinômio. Dessa maneira, não podemos usar a técnica do argumento polinomial para estender a validez para os índices superiores reais.

Podemos também fazer a demonstração pelo método algébrico:

Demonstração. Há dois casos a considerar:

i) $k < 0$. Pelo lado direito, temos

$$\binom{n}{k} = 0.$$

Pelo lado esquerdo, temos

$$\binom{n}{n-k} = 0, \text{ pois } n < (n-k);$$

ii) $k \geq 0$, temos:

a) $k > n$.

Pelo lado esquerdo da identidade:

$$\binom{n}{k} = 0.$$

Pelo lado direito:

Se $n < k$, então $(n-k) < 0$. Logo,

$$\binom{n}{n-k} = 0;$$

b) Se $0 \leq k \leq n$, então podemos usar a definição de coeficientes binomiais 1.3.1:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(\mathbf{n\text{-}}(n-k))!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{n-k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Vamos expandir a parte superior do triângulo de Pascal, de tal forma que os índices superiores de seus números binomiais assumam valores inteiros negativos e os índices inferiores sejam números inteiros não-negativos. Apresentaremos a extensão superior do triângulo de Pascal e a sua versão clássica, conforme tabelas 2.3 e 2.4.

Tabela 2.3: Coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	$\binom{-4}{0}$	$\binom{-4}{1}$	$\binom{-4}{2}$	$\binom{-4}{3}$	$\binom{-4}{4}$	$\binom{-4}{5}$	$\binom{-4}{6}$	$\binom{-4}{7}$	$\binom{-4}{8}$	$\binom{-4}{9}$	
-3	$\binom{-3}{0}$	$\binom{-3}{1}$	$\binom{-3}{2}$	$\binom{-3}{3}$	$\binom{-3}{4}$	$\binom{-3}{5}$	$\binom{-3}{6}$	$\binom{-3}{7}$	$\binom{-3}{8}$	$\binom{-3}{9}$	
-2	$\binom{-2}{0}$	$\binom{-2}{1}$	$\binom{-2}{2}$	$\binom{-2}{3}$	$\binom{-2}{4}$	$\binom{-2}{5}$	$\binom{-2}{6}$	$\binom{-2}{7}$	$\binom{-2}{8}$	$\binom{-2}{9}$	
-1	$\binom{-1}{0}$	$\binom{-1}{1}$	$\binom{-1}{2}$	$\binom{-1}{3}$	$\binom{-1}{4}$	$\binom{-1}{5}$	$\binom{-1}{6}$	$\binom{-1}{7}$	$\binom{-1}{8}$	$\binom{-1}{9}$	
0	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{3}$	$\binom{0}{4}$	$\binom{0}{5}$	$\binom{0}{6}$	$\binom{0}{7}$	$\binom{0}{8}$	$\binom{0}{9}$	
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$\binom{1}{3}$	$\binom{1}{4}$	$\binom{1}{5}$	$\binom{1}{6}$	$\binom{1}{7}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{1}{9}$	
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$	$\binom{2}{3}$	$\binom{2}{4}$	$\binom{2}{5}$	$\binom{2}{6}$	$\binom{2}{7}$	$\binom{2}{8}$	$\binom{2}{9}$	
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	$\binom{3}{4}$	$\binom{3}{5}$	$\binom{3}{6}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{3}{8}$	$\binom{3}{9}$	
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	$\binom{4}{5}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{4}{7}$	$\binom{4}{8}$	$\binom{4}{9}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	$\binom{5}{6}$	$\binom{5}{7}$	$\binom{5}{8}$	$\binom{5}{9}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{6}{7}$	$\binom{6}{8}$	$\binom{6}{9}$	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2.4: Valores numéricos.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Observando a disposição dos números nas tabelas 2.3 e 2.4 e relacionando com as propriedades binomiais apresentadas, podemos verificar:

i) A simetria não é válida quando o índice superior é um número inteiro negativo;

ii) As linhas da extensão superior do triângulo de Pascal não tem elemento nulo, visto que para $n < 0$ e $n < k$, com k inteiro não-negativo, temos $\binom{n}{k} \neq 0$, pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1;

iii) Quando o índice superior é igual a -1 e o índice inferior é um número inteiro não-negativo, os números binomiais admitem apenas dois valores: 1 ou -1, conforme analisado na propriedade de simetria 2.1.2;

iv) Todos os números binomiais da primeira coluna são iguais a 1, já que temos $\binom{n}{0} = 1$, para qualquer $n \in \mathbb{R}$, em particular, para $n \in \mathbb{Z}$;

v) Os lugares em branco do triângulo de Pascal clássico são ocupados por números binomiais nulos, pois $\binom{n}{k} = 0$, para $n > 0$, com $n < k$;

vi) Para n e k inteiros não-negativos, com $n = k$, temos $\binom{n}{k} = 1$.

Observamos que, ao estender superiormente o triângulo de Pascal, podemos verificar a validez de algumas identidades binomiais decorrentes da definição estendida dos coeficientes binomiais 2.0.1.

O conceito de coeficientes binomiais estendidos permite esclarecer determinadas informações no triângulo de Pascal em que a definição 1.3.1 de números binomiais para inteiros não-negativos não é satisfatória.

2.1.2 Absorção/extração

Trata-se de uma propriedade que permite mover fatores para dentro e para fora de coeficientes binomiais.

Teorema 2.1.3. *Dados $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, temos a identidade*

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}.$$

Demonstração. Pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1, temos os seguintes casos a considerar:

i) Para $k < 0$. Pelo lado direito da identidade, temos

$$\binom{r}{k} = 0.$$

Se $k < 0$, então $(k-1) < 0$. Logo,

$$\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1} = 0;$$

ii) Para $k > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1} &= \frac{r}{k} \cdot \frac{(r-1)(r-2)...(r-1-k+1+1)}{(k-1)!} \\
&= \frac{r(r-1)(r-2)...(r-k+1)}{k(k-1)!} \\
&= \frac{r^{\underline{k}}}{k!} = \binom{r}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 2.1.4. Consideremos $r = -\dfrac{1}{2}$ e $k = 3$.

Pelo lado esquerdo da identidade, temos

$$\begin{aligned}\binom{r}{k} = \binom{-\frac{1}{2}}{3} &= \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdot(-\frac{1}{2}-3+1)}{3!} \\ &= \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{6} = -\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Pelo lado direito, temos

$$\begin{aligned}\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1} &= \frac{-\frac{1}{2}}{3}\cdot\binom{-\frac{1}{2}-1}{3-1} \\ &= -\frac{1}{6}\cdot\binom{-\frac{3}{2}}{2} \\ &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})}{2} = -\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Observemos que esta propriedade permite calcular os valores de determinados números binomiais, ou seja, tem uma característica operacional.

Multiplicando a identidade de absorção/extração por k, obtemos uma propriedade de absorção válida também para $k = 0$. Embora o corolário seguinte seja uma consequência direta do teorema 2.1.3, faremos uma demonstração combinatória para dar ênfase a esta técnica.

Corolário 2.1.5. *Sejam $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R}$, temos*

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}.$$

Demonstração. Consideremos r e k inteiros positivos, com $0 < k \leq r$ e a seguinte situação:

Numa gincana escolar com r alunos, propõe-se formar grupos de k alunos para participarem da gincana, sendo um destes o coordenador geral do grupo. Se qualquer um dos r alunos pode participar do grupo, de quantas maneiras podem-se formar equipes para a gincana?

Contaremos de modo a obter $k\dbinom{r}{k}$.

Como temos r alunos e queremos formar equipes de k alunos, então podemos fazer isso de $\binom{r}{k}$ maneiras diferentes. Temos ainda que escolher dos k alunos o coordenador geral da equipe. Isto poderá ser feito de k maneiras. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $k\binom{r}{k}$ modos de formar grupos para a gincana.

Podemos fazer essa mesma contagem de modo a obter $r\binom{r-1}{k-1}$.

Primeiramente, vamos escolher dos r alunos o coordenador geral. Isso pode ser feito de $\binom{r}{1} = r$ maneiras. Temos agora um total de $r-1$ alunos e grupos de $k-1$ alunos para serem formados. Isso pode ser feito de $\binom{r-1}{k-1}$ modos. Pelo princípio multiplicativo, temos $r\binom{r-1}{k-1}$ maneiras de formar equipes para a gincana.

Segue do raciocínio anterior que

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1},$$

para r e k inteiros positivos, com $0 < k \leq r$.

A identidade 2.1.5 é uma igualdade entre polinômios de grau k na variável r, satisfeita para todos os inteiros positivos, com $0 < k \leq r$. Como os dois polinômios da identidade são iguais em uma infinidade de pontos, então eles são idênticos e coincidem em todos os índices superiores reais.

Além disso, os casos em que $k = 0$ são facilmente verificados. Para os casos em que $k < 0$ seguem diretamente da definição de números binomiais estendidos, pois ambos os lados da equação são iguais a zero.

Logo,

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}, k \in \mathbb{Z} \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Enunciaremos outro corolário da propriedade absorção/extração:

Corolário 2.1.6. *Consideremos $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R}$, vale a identidade*

$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}.$$

Uma demonstração combinatória pode ser feita nos moldes da demonstração da propriedade 2.1.5, considerando grupos de $k+1$ alunos. Provaremos, pela interpretação combinatória, que a identidade 2.1.6 é válida para todos os índices superiores e inferiores inteiros positivos. Assim, permitiremos que r seja substituído por n.

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}, n \in \mathbb{Z}; n > 0 \text{ e } 0 < k \leq n. \tag{2.1.1}$$

Demonstração. Numa gincana escolar com n alunos, propõe-se formar grupos de k alunos para participarem da gincana e um coordenador geral para a equipe. Se qualquer um dos n alunos pode participar do grupo, de quantas maneiras podem-se formar equipes para a gincana?

Contaremos de modo a obter $(n-k)\binom{n}{k}$.

Como temos n alunos e queremos formar equipes de k alunos, então podemos fazer isso de $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes. Temos ainda que escolher dos $n-k$ alunos restantes o coordenador geral. Podemos fazer isso de $\binom{n-k}{1} = n-k$ maneiras.

Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $(n-k)\binom{n}{k}$ modos de formar grupos para a gincana com k alunos e 1 coordenador geral, ou seja, com $k+1$ integrantes.

Podemos fazer essa mesma contagem de outra maneira de modo a obter $n\binom{n-1}{k}$.

Primeiramente, vamos escolher dos n alunos o coordenador geral. Isso pode ser feito de $\binom{n}{1} = n$ maneiras. Temos agora um total de $n-1$ alunos e grupos de k alunos para serem formados. Isso pode ser feito de $\binom{n-1}{k}$ modos.

Pelo princípio multiplicativo, temos $n\binom{n-1}{k}$ maneiras de formar equipes para a gincana com k alunos e um coordenador geral, isto é, com $k+1$ integrantes.

Dessa forma, temos

$$(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}, n \in \mathbb{Z}; n > 0 \text{ e } 0 < k \leq n.$$

Portanto, a identidade 2.1.6 é válida para todos os índices inteiros positivos. Como se trata de uma identidade entre polinômios, já que ambos os lados da equação são polinômios em r de grau $k+1$, segue que estes polinômios são idênticos e, portanto, a igualdade é válida para todo índice superior real.

Para $k = 0$, verificamos de maneira direta. Para os casos em que $k < 0$, pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1, ambos os lados da equação 2.1.6 são nulos. Logo, temos

$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}, k \in \mathbb{Z} \text{ e } r \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Podemos também fazer outra demonstração desta propriedade recorrendo ao método algébrico, utilizando as propriedades de simetria 2.1.2, a equação 2.1.5 e o argumento polinomial para estender a validez para os números reais.

2.1.3 Adição

Vimos que a Relação de Stifel 1.4.2 é uma importante propriedade do triângulo de Pascal. É natural perguntarmos se esta relação permanece válida para os coeficientes binomiais estendidos. Podemos verificar esta propriedade na extensão superior do triângulo de Pascal, conforme tabelas 2.5 e 2.6.

Tabela 2.5: Adição - extensão superior do triângulo de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	$\binom{-4}{0}$	$\binom{-4}{1}$	$\binom{-4}{2}$	$\binom{-4}{3}$	$\binom{-4}{4}$	$\binom{-4}{5}$	$\binom{-4}{6}$	$\binom{-4}{7}$	$\binom{-4}{8}$	$\binom{-4}{9}$	
-3	$\binom{-3}{0}$	$\binom{-3}{1}$	$\binom{-3}{2}+$	$\binom{-3}{3}$	$\binom{-3}{4}$	$\binom{-3}{5}$	$\binom{-3}{6}$	$\binom{-3}{7}$	$\binom{-3}{8}$	$\binom{-3}{9}$	
-2	$\binom{-2}{0}$	$\binom{-2}{1}$	$\binom{-2}{2}$	$=\binom{-2}{3}$	$\binom{-2}{4}$	$\binom{-2}{5}$	$\binom{-2}{6}$	$\binom{-2}{7}$	$\binom{-2}{8}$	$\binom{-2}{9}$	
-1	$\binom{-1}{0}$	$\binom{-1}{1}$	$\binom{-1}{2}$	$\binom{-1}{3}$	$\binom{-1}{4}$	$\binom{-1}{5}$	$\binom{-1}{6}$	$\binom{-1}{7}$	$\binom{-1}{8}$	$\binom{-1}{9}$	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2.6: Adição - extensão superior do triângulo de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Enunciaremos a propriedade de adição:

Teorema 2.1.7. *Dados $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{R}$, temos*

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}.$$

Demonstração. Considerando r e k inteiros positivos, com $k \leq r$, temos a propriedade clássica relação de Stifel 1.4.2 que foi demonstrada pela técnica combinatorial.

Dessa maneira, a propriedade de adição é válida para índices superiores e inferiores inteiros positivos, com $k \leq r$. Como se trata de uma identidade polinomial, pois ambos os lados são polinômios de grau k na variável r, pela técnica do argumento polinomial, a propriedade é válida para qualquer $r \in \mathbb{R}$.

Nos casos em que $k = 0$, ambos os lados da equação valem 1. Nos casos em que $k < 0$, ambos os lados da equação são iguais a zero, pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1. □

Vamos fazer outra demonstração usando a definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1. Demonstraremos pelo método algébrico.

Demonstração. Consideremos os casos:

i) $k > 0, r \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1} &= \frac{(r-1)\cdot ...\cdot(r-1-k+1)}{k!}+\frac{(r-1)\cdot ...\cdot(r-1-k+1+1)}{(k-1)!}\\
&= \frac{(r-1)\cdot ...\cdot(r-k)}{k!}+\frac{(r-1)\cdot ...\cdot(r-k+1)}{(k-1)!}\cdot\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}}\\
&= \frac{(r-1)\cdot ...\cdot(r-k+1)\cdot(r-k)+(r-1)\cdot ...\cdot(r-k+1)k}{k!}\\
&= \frac{(r-1)^{\underline{k-1}}\,(r-k)+k(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!}\\
&= \frac{r(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!}\\
&= \frac{r^{\underline{k}}}{k!}\\
&= \binom{r}{k};
\end{aligned}$$

ii) $k<0$, temos ambos os lados da equação iguais a zero;

iii) $k=0$. Pelo lado esquerdo da equação, temos

$$\binom{r}{0}=1.$$

Pelo lado direito, temos

$$\binom{r-1}{0}+\binom{r-1}{-1}=1+0=1.$$

□

Também podemos provar a fórmula de adição somando as duas propriedades de absorção já demonstradas.

Demonstração. Sabemos que

$$k\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k-1},\ k\in\mathbb{Z}; \text{e } r\in\mathbb{R}\quad(\text{por } 2.1.5)$$

$$(r-k)\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k},\ k\in\mathbb{Z}; \text{e } r\in\mathbb{R}\ (\text{por } 2.1.6).$$

Somando essas duas identidades binomiais, para $r\neq 0$, temos

$$
\begin{aligned}
(r-k)\binom{r}{k} + k\binom{r}{k} &= r\binom{r-1}{k} + r\binom{r-1}{k-1} \\
\binom{r}{k}[(r-k+k)] &= r\left[\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}\right] \\
r\binom{r}{k} &= r\left[\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}\right]
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}.$$

Os cálculos apresentados não são válidos para $r = 0$. Teremos os seguinte casos a considerar:

a) Para $k < 0$ e $r = 0$. Pelo lado esquerdo, temos

$$\binom{r}{k} = \binom{0}{k} = 0.$$

Pelo lado direito, temos

$$\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \binom{-1}{k} + \binom{-1}{k-1} = 0;$$

b) Para $k = 0$ e $r = 0$. Pelo lado esquerdo, temos

$$\binom{r}{k} = \binom{0}{0} = 1.$$

Pelo lado direito, temos

$$\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \binom{-1}{0} + \binom{-1}{-1} = 1;$$

c) Para $k > 0$ e $r = 0$.

Pelo lado esquerdo, temos

$$\binom{r}{k} = \binom{0}{k} = 0.$$

Se k for par, então $(k-1)$ é ímpar (e vice-versa). Sabemos que

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k = \begin{cases} -1, \text{ se } k \text{ é ímpar,} \\ \text{ou} \\ 1, \text{ se } k \text{ é par.} \end{cases}$$

Ainda temos

$$\binom{-1}{k-1} = (-1)^{k-1} = \begin{cases} -1, \text{ se } (k-1) \text{ é ímpar,} \\ \text{ou} \\ 1, \text{ se } (k-1) \text{ é par.} \end{cases}$$

Logo, pelo lado direito da equação, temos

$$\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \binom{-1}{k} + \binom{-1}{k-1} = 0.$$

$\square$

Enfatizamos que essa identidade binomial não é vista de maneira estendida no ensino médio, restringindo-a apenas para os números inteiros não-negativos, conforme relação de Stifel 1.4.2.

Podemos também usar a propriedade de adição para obter outras identidades binomiais como veremos a seguir.

2.1.4 Somatório no índice superior

Vimos que a propriedade de adição 2.1.7 é uma relação de recorrência para os coeficientes binomiais no triângulo de Pascal clássico. Assim, vamos expressar um número binomial como a soma de outros coeficientes binomiais utilizando a fórmula de adição no número de maior índice inferior.

$$\begin{aligned}
\binom{5}{3} &= \binom{4}{\mathbf{3}} + \binom{4}{2} \\
&= \binom{3}{\mathbf{3}} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \\
&= \binom{2}{\mathbf{3}} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \\
&= \binom{1}{\mathbf{3}} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} \\
&= \binom{0}{\mathbf{3}} + \binom{0}{2} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}.
\end{aligned}$$

Como $\binom{0}{3} = \binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$, paramos aqui. Deixaremos os coeficientes binomiais $\binom{0}{2}$ e $\binom{1}{2}$. Logo,

$$\binom{0}{2} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = \binom{5}{3}.$$

Estamos somando os cinco primeiros termos da coluna 2 do triângulo de Pascal clássico, com primeiro elemento situado na linha 0. O resultado é exatamente o número binomial situado na coluna à direita da última parcela e na linha imediatamente abaixo desta.

Temos a propriedade do somatório no índice superior:

Teorema 2.1.8. *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $m, n \geq 0$ e k inteiro não-negativo. Temos a identidade*

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Demonstração. Vamos comparar a identidade do somatório no índice superior com a equação teorema das colunas 1.4.9. Para isto, iremos desmembrar o somatório do lado esquerdo daquela identidade em duas parcelas, considerando $m \leq n$:

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{m} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \binom{k}{m} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-m} \binom{m+k}{m}. \tag{2.1.2}$$

Percebemos que o resultado da primeira parcela do lado direito é sempre nulo e a segunda parcela é a identidade teorema das colunas 1.4.9 que foi demonstrada pela interpretação combinatória no segundo capítulo. Logo, temos

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{m} &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \binom{k}{m} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-m} \binom{m+k}{m} \\ &= 0 + \binom{m+n-m+1}{m+1} \\ &= \binom{n+1}{m+1}. \end{aligned}$$

Para os casos $m > n$, ambos os lados da identidade são nulos, pela definição estendida de coeficientes binomiais 2.0.1. $\square$

Analisando a propriedade do somatório no índice superior no triângulo de Pascal, temos os seguintes casos a considerar:

i) Para $m > n$. Todas as parcelas do somatório são nulas;

ii) Para $m = n$. O resultado da soma é igual ao número binomial $\binom{n+1}{n+1}$. Portanto, a soma vale 1;

iii) Considerando $m < n$, temos a soma dos $n+1$ primeiros elementos da coluna m do triângulo de Pascal. Os primeiros m termos desta soma são nulos. A primeira parcela desta soma é igual a $\binom{0}{m}$ e última parcela é o número $\binom{n}{m}$. O resultado desta soma é o elemento situado na coluna à direita da última parcela e na linha imediatamente abaixo desta. Este resultado é o coeficiente binomial $\binom{n+1}{m+1}$.

Vimos, na propriedade relação de Stifel 1.4.2, que os elementos da coluna m é uma sequência numérica infinita formada por uma Progressão Aritmética (PA) de ordem m.

Pela equação (2.1.2), essa sequência se inicia a partir dos números binomiais de índices inferiores m e índices superiores k, com $m \leq k \leq n$. Dessa maneira, *cf.* ([8]) a soma destes termos define uma PA de ordem $m+1$. Temos, assim a seguinte equação:

$$\sum_{m \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{2.1.3}$$

O teorema a seguir estabelece a relação entre o grau de progressão aritmética de ordem superior e o grau de polinômios.

Teorema 2.1.9. *Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma PA de ordem p, e reciprocamente, se (a_n) é uma PA de ordem p, então (a_n) é um polinômio de grau p em n.*

Demonstração. cf. [8] p. 39. □

Exemplo 2.1.10. Vamos comparar a identidade do somatório no índice superior 2.1.8 com a equação (2.1.2). Consideraremos os seguintes casos, para os valores crescentes de m:

i) Para $m = 0$, temos

$$\sum_{m \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{0}{0} + ... + \binom{n}{0} = \binom{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{1} = n+1;$$

ii) Para $m = 1$, temos

$$\sum_{m\leq k\leq n} \binom{k}{m} = \binom{1}{1} + ... + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Estamos, portanto, somando os elementos da coluna 1 do triângulo de Pascal, excluindo o primeiro termo o qual é nulo. A sequência daqueles elementos define uma PA de primeira ordem. A soma destes termos é uma PA de ordem 2. Portanto, pelo teorema 2.1.9, o termo geral da soma é modelado por um polinômio de grau 2 na variável n, conforme polinômio obtido;

iii) Para $m = 2$, temos

$$\sum_{m\leq k\leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Assim, somamos os elementos da coluna 2 do triângulo de Pascal, excluindo os dois primeiros termos os quais são nulos. A sequência numérica daqueles elementos define uma PA de ordem 2. A soma destes termos é uma PA de ordem 3. Logo, o termo geral da soma é modelado por um polinômio de grau 3 na variável n, conforme polinômio obtido.

E, assim por diante.

Vamos considerar $\binom{0}{m}$ o primeiro termo da coluna m. Analisando a propriedade do somatório no índice superior no triângulo de Pascal, a soma dos $n+1$ primeiros elementos desta coluna, excluindo os m primeiros termos que são nulos define uma PA de ordem $m+1$. Portanto, pelo teorema 2.1.9, o termo geral desta soma é modelado por um polinômio de grau $m+1$ na variável n que pode ser obtido pela fórmula fechada da referida propriedade.

2.1.5 Somatório paralelo

Podemos obter essa propriedade ao expandir, repetidamente, o número binomial com o menor índice inferior utilizando a propriedade de adição 2.1.7. Vamos expandir o número $\binom{5}{3}$.

$$\begin{aligned}
\binom{5}{3} &= \binom{4}{3} + \binom{4}{\mathbf{2}} \\
&= \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{\mathbf{1}} \\
&= \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{\mathbf{0}} \\
&= \binom{4}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{0} + \binom{1}{\mathbf{-1}}.
\end{aligned}$$

Pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1, temos $\binom{1}{-1} = 0$. Assim, este termo e os próximos são nulos.

Logo,

$$\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}.$$

Estamos somando os quatro primeiros elementos situados na mesma diagonal do triângulo de Pascal clássico, com primeiro elemento localizado na linha 1 e na coluna 0. O resultado desta soma é igual ao número binomial imediatamente abaixo da última parcela, situado na mesma coluna desta. Estamos nos referindo a propriedade teorema das diagonais 1.4.11, válida para números inteiros não-negativos.

Será que esta propriedade permanece válida para os números binomiais estendidos?

Exemplo 2.1.11. Vamos calcular a soma dos 3 primeiros termos da diagonal da extensão superior do triângulo de Pascal, com primeira parcela igual a $\binom{-4}{0}$.

$$\binom{-4}{0} + \binom{-3}{1} + \binom{-2}{2} \quad = \quad (1) + (-3) + (3) = 1.$$

Podemos obter este resultado de outra maneira:

$$\binom{-4+2+1}{2} = \binom{-1}{2} = 1.$$

Ilustraremos este exemplo na extensão superior do triângulo de Pascal, conforme tabelas 2.7 e 2.8.

Tabela 2.7: Somatório paralelo - extensão superior do triângulo de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	$\binom{-4}{0}$	$\binom{-4}{1}$	$\binom{-4}{2}$	$\binom{-4}{3}$	$\binom{-4}{4}$	$\binom{-4}{5}$	$\binom{-4}{6}$	$\binom{-4}{7}$	$\binom{-4}{8}$	$\binom{-4}{9}$	
-3	$\binom{-3}{0}$	$\binom{-3}{1}$	$\binom{-3}{2}$	$\binom{-3}{3}$	$\binom{-3}{4}$	$\binom{-3}{5}$	$\binom{-3}{6}$	$\binom{-3}{7}$	$\binom{-3}{8}$	$\binom{-3}{9}$	
-2	$\binom{-2}{0}$	$\binom{-2}{1}$	$\binom{-2}{2}$	$\binom{-2}{3}$	$\binom{-2}{4}$	$\binom{-2}{5}$	$\binom{-2}{6}$	$\binom{-2}{7}$	$\binom{-2}{8}$	$\binom{-2}{9}$	
-1	$\binom{-1}{0}$	$\binom{-1}{1}$	$\binom{-1}{2}$	$\binom{-1}{3}$	$\binom{-1}{4}$	$\binom{-1}{5}$	$\binom{-1}{6}$	$\binom{-1}{7}$	$\binom{-1}{8}$	$\binom{-1}{9}$	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2.8: Somatório paralelo - extensão superior do triângulo de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
0	1										
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Vamos enunciar a propriedade do somatório paralelo:

Teorema 2.1.12. *Dados $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$, vale a identidade*

$$\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}.$$

Demonstração. Sejam k, n e r números inteiros não-negativos. Vimos a demonstração combinatorial dessa identidade pelo teorema da diagonal 1.4.11. Assim, a propriedade do somatório paralelo é válida para os números inteiros não-negativos.

Esta propriedade é uma identidade polinomial, já que ambos os lados são polinômios de grau n em r, o caso geral segue pela técnica do argumento polinomial.

Para os casos em que n é um número inteiro negativo, temos $k < 0$ (pois $k \leq n$) e ambos os lados da equação são nulos. □

No triângulo de Pascal, a identidade do somatório paralelo nos fornece a soma das $n+1$ primeiras parcelas da diagonal cujo primeiro elemento está situado na linha r e na coluna 0. O resultado é o coeficiente binomial imediatamente abaixo da última parcela escolhida da diagonal, na mesma coluna desta. Isso também é válido para a extensão superior do triângulo.

2.1.6 Subtração no índice superior

Analisando a disposição dos elementos da extensão superior do triângulo de Pascal, percebemos que as sequências numéricas das linhas e das colunas aparecem como sequências das colunas do triângulo de Pascal clássico (sem os sinais de menos). Sendo assim, qual a relação entre estes valores?

Observemos que:

i) $\displaystyle\binom{-2}{1} = (-1)^1\binom{1-(-2)-1}{1} = -\binom{2}{1}$;

ii) $\displaystyle\binom{-3}{2} = (-1)^2\binom{2-(-3)-1}{2} = (-1)^2\binom{4}{2}$. Dessa forma, temos $\displaystyle\binom{-3}{2} = \binom{4}{2}$.

Ilustrando esses exemplos conforme tabelas 2.9 e 2.10.

Tabela 2.9: Subtração no índice superior - tabela de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
⋮											...
-4	$\binom{-4}{0}$	$\binom{-4}{1}$	$\binom{-4}{2}$	$\binom{-4}{3}$	$\binom{-4}{4}$	$\binom{-4}{5}$	$\binom{-4}{6}$	$\binom{-4}{7}$	$\binom{-4}{8}$	$\binom{-4}{9}$	
-3	$\binom{-3}{0}$	$\binom{-3}{1}$	$\binom{-3}{2}$	$\binom{-3}{3}$	$\binom{-3}{4}$	$\binom{-3}{5}$	$\binom{-3}{6}$	$\binom{-3}{7}$	$\binom{-3}{8}$	$\binom{-3}{9}$	
-2	$\binom{-2}{0}$	$\binom{-2}{1}$	$\binom{-2}{2}$	$\binom{-2}{3}$	$\binom{-2}{4}$	$\binom{-2}{5}$	$\binom{-2}{6}$	$\binom{-2}{7}$	$\binom{-2}{8}$	$\binom{-2}{9}$	
-1	$\binom{-1}{0}$	$\binom{-1}{1}$	$\binom{-1}{2}$	$\binom{-1}{3}$	$\binom{-1}{4}$	$\binom{-1}{5}$	$\binom{-1}{6}$	$\binom{-1}{7}$	$\binom{-1}{8}$	$\binom{-1}{9}$	
0	$\binom{0}{0}$										
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$									
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$								
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$							
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$						
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$					
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$				
⋮											...

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2.10: Subtração no índice superior - tabela de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
⋮											...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
⋮											...

Fonte: Elaboração própria.

Vamos enunciar a propriedade da subtração no índice superior:

Teorema 2.1.13. *Consideremos r um número real e k um inteiro qualquer. Temos a seguinte identidade*

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}.$$

Demonstração. Pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1, temos

i) $k \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\binom{r}{k} &= \frac{r(r-1)\,...\,(r-k+1)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^k(-r)(1-r)\,...\,(k-r-1)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^k(k-r-1)\,...\,(1-r)(-r)}{k!} \\
&= \frac{(-1)^k(k-r-1)^{\underline{k}}}{k!} \\
&= (-1)^k\binom{k-r-1}{k};
\end{aligned}
$$

ii) $k < 0$.

$$\binom{r}{k} = 0.$$

Pelo lado direito da identidade, temos

$$(-1)^k\binom{k-r-1}{k} = (-1)^k \cdot 0 = 0$$

□

Vimos, pela relação de Stifel 1.4.2, que a sequência infinita de números da coluna k do triângulo de Pascal formam uma progressão aritmética de ordem k.

A identidade subtração no índice superior mostra também que a sequência numérica infinita (lida de baixo para cima) dos elementos das colunas k da extensão superior do triângulo de Pascal formam também uma PA de ordem k.

2.1.7 Soma de números binomiais com sinais alternados

A propriedade teorema das linhas alternadas 1.4.7 nos fornece a fórmula fechada para calcularmos a soma, com sinais alternados, de todos os elementos da linha n do triângulo de Pascal clássico.

Será que podemos encontrar uma fórmula fechada para calcularmos a soma parcial, com sinais alternados, da linha n deste triângulo? Ou ainda de maneira mais geral: existe uma fórmula fechada para calcularmos a soma, com sinais alternados, de números binomiais estendidos? É o que veremos pela propriedade soma de números binomiais com sinais alternados:

Teorema 2.1.14. *Sejam r um número real, k e m inteiros. Vale a identidade*

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq m}\binom{r}{k}(-1)^k &= \binom{r}{0}(-1)^0+\binom{r}{1}(-1)^1+...+\binom{r}{m}(-1)^m \\ &= (-1)^m\binom{r-1}{m}.\end{aligned}$$

Demonstração. Pelo lado esquerdo da identidade, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq m}\binom{r}{k}(-1)^k &= \sum_{k\leq m}(-1)^k(-1)^k\binom{k-r-1}{k} \text{ (por subtração no índice superior 2.1.13)} \\ &= \sum_{k\leq m}(-1)^{2k}\binom{k-r-1}{k} \\ &= \sum_{k\leq m}\binom{k-r-1}{k}.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq m}\binom{k-r-1}{k} &= \sum_{k\leq m}\binom{(-r-1)+k}{k} \\ &= \binom{-r-1+m+1}{m} \text{(por somatório paralelo 2.1.12)} \\ &= \binom{-r+m}{m}.\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\sum_{k\leq m}\binom{r}{k}(-1)^k = \binom{-r+m}{m}.$$

Vamos aplicar novamente a propriedade subtração no índice superior 2.1.13:

$$\begin{aligned}\sum_{k\le m}\binom{r}{k}(-1)^k &= \binom{-r+m}{m}\\ &= (-1)^m\binom{m+r-m-1}{m}\\ &= (-1)^m\binom{r-1}{m}.\end{aligned}$$

Dessa maneira, temos

$$\sum_{k\le m}\binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^m\binom{r-1}{m}.$$

$\square$

Podemos também fazer a demonstração combinatorial.

Demonstração. Sejam r inteiro positivo, m e k números inteiros não-negativos, com $0 \le k \le m$ e $m = r$. Substituindo esses números nesta identidade temos a propriedade clássica teorema das linhas alternadas 1.4.7 que foi demonstrada pela técnica combinatória. Assim, o lado esquerdo da identidade soma de números binomiais com sinais alternados é nulo. Percebemos que o lado direito também é nulo, neste caso.

Dessa maneira, esta propriedade é válida para r inteiro positivo, m e k inteiros não-negativos, com $0 \le k \le m$ e $m = r$.

Como se trata de uma identidade entre polinômios, pois ambos os lados são polinômios de grau m na variável r, o argumento polinomial mostra que a identidade é válida para todo r real.

Para os casos em que $m < 0$, temos então $k < 0$ e ambos os lados da equação são nulos. $\square$

Analisaremos a identidade soma dos números binomiais com sinais alternados para os casos em que os índices superiores assumam valores inteiros e os índices inferiores sejam inteiros não-negativos:

Exemplo 2.1.15. Consideremos $r = -3$ e $m = 2$.

Pelo lado esquerdo da equação, temos

$$
\begin{aligned}
\binom{-3}{k}(-1)^k &= \binom{-3}{0}(-1)^0 + \binom{-3}{1}(-1)^1 + \binom{-3}{2}(-1)^2 \\
&= \binom{-3}{0} - \binom{-3}{1} + \binom{-3}{2} \\
&= 1 - (-3) + 6 = 10.
\end{aligned}
$$

Pelo lado direito, temos

$$(-1)^m \cdot \binom{r-1}{m} = \binom{-4}{2} = 10.$$

Exemplo 2.1.16. Para $r = 2$ e $m = 3$.

Pelo lado esquerdo da equação, temos

$$\binom{2}{0} - \binom{2}{1} + \binom{2}{2} - \binom{2}{3} = 1 - 2 + 1 - 0 = 0$$

Pelo lado direito, temos

$$(-1)^3 \cdot \binom{2-1}{3} \quad = \quad (-1) \cdot \binom{1}{3} = 0.$$

Exemplo 2.1.17. Para $r = 4$ e $m = 4$.

Pelo lado esquerdo da equação, temos

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0.$$

Pelo lado direito, temos

$$(-1)^4 \binom{4-1}{4} = \binom{3}{4} = 0.$$

Exemplo 2.1.18. Para $r = 6$ e $m = 5$.

Pelo lado esquerdo da equação, temos

$$\binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} = 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 = -1.$$

Pelo lado direito, temos

$$(-1)^5 \binom{6-1}{5} = (-1) \cdot \binom{5}{5} = -1.$$

Ilustrando estes exemplos nas tabelas 2.11 e 2.12.

Tabela 2.11: Tabela de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	$\binom{-4}{0}$	$\binom{-4}{1}$	$+\binom{-4}{2}$	$\binom{-4}{3}$	$\binom{-4}{4}$	$\binom{-4}{5}$	$\binom{-4}{6}$	$\binom{-4}{7}$	$\binom{-4}{8}$	$\binom{-4}{9}$	
-3	$\binom{-3}{0}$	$-\binom{-3}{1}$	$+\binom{-3}{2}$	$\binom{-3}{3}$	$\binom{-3}{4}$	$\binom{-3}{5}$	$\binom{-3}{6}$	$\binom{-3}{7}$	$\binom{-3}{8}$	$\binom{-3}{9}$	
-2	$\binom{-2}{0}$	$\binom{-2}{1}$	$\binom{-2}{2}$	$\binom{-2}{3}$	$\binom{-2}{4}$	$\binom{-2}{5}$	$\binom{-2}{6}$	$\binom{-2}{7}$	$\binom{-2}{8}$	$\binom{-2}{9}$	
-1	$\binom{-1}{0}$	$\binom{-1}{1}$	$\binom{-1}{2}$	$\binom{-1}{3}$	$\binom{-1}{4}$	$\binom{-1}{5}$	$\binom{-1}{6}$	$\binom{-1}{7}$	$\binom{-1}{8}$	$\binom{-1}{9}$	
0	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{1}$	$\binom{0}{2}$	$\binom{0}{3}$	$\binom{0}{4}$	$\binom{0}{5}$	$\binom{0}{6}$	$\binom{0}{7}$	$\binom{0}{8}$	$\binom{0}{9}$	
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{2}$	$-\binom{1}{3}$	$\binom{1}{4}$	$\binom{1}{5}$	$\binom{1}{6}$	$\binom{1}{7}$	$\binom{1}{8}$	$\binom{1}{9}$	
2	$\binom{2}{0}$	$-\binom{2}{1}$	$+\binom{2}{2}$	$-\binom{2}{3}$	$\binom{2}{4}$	$\binom{2}{5}$	$\binom{2}{6}$	$\binom{2}{7}$	$\binom{2}{8}$	$\binom{2}{9}$	
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$	$+\binom{3}{4}$	$\binom{3}{5}$	$\binom{3}{6}$	$\binom{3}{7}$	$\binom{3}{8}$	$\binom{3}{9}$	
4	$\binom{4}{0}$	$-\binom{4}{1}$	$+\binom{4}{2}$	$-\binom{4}{3}$	$+\binom{4}{4}$	$\binom{4}{5}$	$\binom{4}{6}$	$\binom{4}{7}$	$\binom{4}{8}$	$\binom{4}{9}$	
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$-\binom{5}{5}$	$\binom{5}{6}$	$\binom{5}{7}$	$\binom{5}{8}$	$\binom{5}{9}$	
6	$\binom{6}{0}$	$-\binom{6}{1}$	$+\binom{6}{2}$	$-\binom{6}{3}$	$+\binom{6}{4}$	$-\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	$\binom{6}{7}$	$\binom{6}{8}$	$\binom{6}{9}$	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2.12: Tabela de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	
-3	$1 -$	-3	$+6$	-10	15	-21	28	-36	45	-55	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	1	0	-0	0	0	0	0	0	0	
2	1	-2	$+1$	-0	0	0	0	0	0	0	
3	1	3	3	1	$+0$	0	0	0	0	0	
4	1	-4	$+6$	-4	$+1$	0	0	0	0	0	
5	1	5	10	10	5	-1	0	0	0	0	
6	1	-6	$+15$	-20	$+15$	-6	1	0	0	0	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Vamos analisar a propriedade soma de números binomiais com sinais alternados da linha r do triângulo de Pascal clássico e na extensão superior deste triângulo, de acordo com os valores de m e k.

i) Sejam r inteiro positivo e m inteiro não-negativo, tal que $r \leq m$. A identidade binomial nos fornece a soma de todos os elementos da linha r, com sinais alternados, no triângulo de Pascal clássico. O resultado é nulo, (conforme exemplos 2.1.16 e 2.1.17. Já provamos isso quando expandimos $(1-1)^r$ conforme a propriedade binômio de Newton 1.5.2 e também pela identidade teorema das linhas alternadas 1.4.7, no caso em que $r = m$ em ambas as identidades;

ii) Consideremos r inteiro positivo e m inteiro não-negativo, com que $m < r$. Temos, dessa maneira, a soma dos $m+1$ primeiros elementos da linha r do triângulo de

Pascal clássico com sinais alternados, conforme exemplo 2.1.18;

iii) Consideremos $m = 0$ e $r = 0$. O resultado é igual a 1;

iv) Consideremos r um número inteiro negativo e m inteiro não-negativo. Temos a soma, com sinais alternados, dos $m + 1$ primeiros elementos da linha r da extensão superior do triângulo de Pascal, conforme exemplo 2.1.15.

Dessa maneira, a propriedade 2.1.14 nos fornece a soma dos $m+1$ primeiros termos, com sinais alternados, da linha r do triângulo de Pascal na versão clássica e na sua extensão superior. O resultado é o número binomial situado imediatamente acima da última parcela, na mesma coluna desta. O sinal deste resultado dependerá do valor de m. Analisando o lado direito desta propriedade, temos:

i) Para r inteiro não-nulo e m inteiro positivo. Se m for par, então o resultado da soma é positivo. Se m for ímpar, o resultado é negativo;

ii) Para $r = 0$ e $m = 0$, temos a soma igual a 1.

Ainda, vale destacar que a propriedade soma de números binomiais com sinais alternados nos permite obter os elementos das linhas da extensão superior do triângulo de Pascal de maneira prática.

Sabemos que a linha -1 tem alternadamente os elementos 1 ou -1. Utilizando a identidade mencionada podemos obter as linhas superiores (de baixo para cima) a partir desta linha, prosseguindo da seguinte maneira:

i) Para obtermos o segundo elemento da linha -2, fazemos a soma, com sinais alternados, dos dois primeiros elementos da linha -1;

ii) Para obtermos o terceiro elemento da linha -2, fazemos a soma, com sinais alternados, dos três primeiros elementos da linha -1;

iii) Para obtermos o quarto elemento da linha -2, fazemos a soma, com sinais alternados, dos quatro primeiros elementos da linha -1.

E, assim por diante. Vale ressaltar que o resultado dessa soma é positivo nas colunas pares e negativos nas colunas ímpares. Podemos proceder de maneira análoga para as demais linhas da extensão superior deste triângulo.

Não existe uma fórmula resultante para a soma parcial dos elementos de uma linha do triângulo de Pascal clássico preservando os sinais. Logo, não temos a fórmula fechada para o seguinte somatório:

$$\sum_{k \leq m} \binom{r}{k} = \binom{r}{0} + ... + \binom{r}{m},$$

r, k e m inteiros não-negativos, com $m < r$.

Vale ressaltar que podemos fazer a soma de todos os elementos, preservando os sinais, da linha r do triângulo de Pascal clássico, considerando $r \leq m$, conforme visto pela propriedade teorema das linhas 1.4.5.

2.1.8 Convolução de Vandermonde

Essa identidade foi descoberta pelo matemático Alexandre-Théophile Vandermonde, no século XVIII, (*cf.* [12]). Era conhecida, no entanto, por *Chu Shih-Chieh* na China pelo menos desde 1303. Esta propriedade nos informa que a soma (sobre todos os inteiros k) do produto de dois coeficientes binomiais, com índices superiores constantes e com índices inferiores com soma constante, é o coeficiente binomial obtido somando os dois índices superiores e os dois índices inferiores:

Teorema 2.1.19. *Consideremos r, s números reais e n, k inteiros, com $0 \leq k \leq n$. Temos a identidade*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Demonstração. Vamos demonstrar usando a técnica combinatorial, recorrendo a seguinte situação:

Suponhamos que existam r brasileiros e s africanos. De quantos modos podemos obter um grupo de n pessoas dessas nacionalidades?

Consideremos k, n, r, s inteiros não-negativos, com $(r + s) \geq n$. Vamos fazer a contagem de modo a obter $\binom{r+s}{n}$.

Temos um total de $r + s$ pessoas e queremos obter grupos de n pessoas. Logo, podemos fazer isso de $\binom{r+s}{n}$ maneiras possíveis.

Vamos fazer essa mesma contagem de outra maneira, de modo a obter

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}.$$

Escolhendo k brasileiros no total de r brasileiros, então nos restam escolher $n-k$ africanos dentre s. Pela regra do produto isso pode ser feito de $\binom{r}{k}\cdot\binom{s}{n-k}$ modos.

Como temos $0 \leq k \leq n$, pelo princípio aditivo existem $\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\cdot\binom{s}{n-k}$ maneiras de obter um grupo de n pessoas de r brasileiros e s africanos. Logo,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\cdot\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}.$$

Como essa propriedade é uma identidade entre polinômios, o argumento polinomial estende a validez para índices superiores reais.

Para os casos em que $n<0$, ambos os lados da identidade são iguais a zero. $\square$

Corolário 2.1.20. *Se n é um número inteiro não-negativo, então*

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Essa identidade é conhecida como *Identidade de Lagrange.*

Demonstração. Consideremos $r=s=n$ na identidade Convolução de Vandermonde, temos, pelo lado direito desta identidade, temos

$$\binom{r+s}{n}=\binom{2n}{n}.$$

Pelo dado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\cdot\binom{s}{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}\ \text{(por simetria 2.1.2)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

$\square$

2.1.9 Outras identidades binomiais

Os números no triângulo de Pascal satisfazem a inúmeras propriedades de coeficientes binomiais. Neste trabalho, demos ênfase às propriedades binomiais estendidas que podem ser ilustradas neste triângulo. Evidenciamos a abordagem combinatória para demonstrar as identidades binomiais estendidas.

Existem diversas propriedades envolvendo somatório de produtos de dois coeficientes binomiais. Cada uma delas é uma soma em k, onde k aparece uma vez em cada coeficiente binomial. Um exemplo dessas propriedades é a Convolução de Vandermonde 2.1.19.

A maioria das identidades envolvendo soma de produto de coeficientes binomiais podem ser obtidas da Convolução de Vandermonde, através de manipulações algébricas de propriedades como a subtração no índice superior, a simetria, a adição, dentre outras.

O fato interessante é que podemos encontrar as fórmulas fechadas que simplificam muitos esses somatórios a partir de manipulações algébricas dos coeficientes binomiais. Podemos encontrar algumas dessas identidades na referência [3].

2.2 Teorema Binomial

Nesta seção, apresentaremos brevemente o teorema binomial para expoentes reais. Para um aprofundamento da parte teórica consultar as referências: [6], [10], [11], [13] e [14].

Vimos no binômio de Newton que coeficientes binomiais surgem ao expandirmos o produto de uma potência inteira não-negativa n do binômio $(x+y)$, onde a sequência dos coeficientes numéricos do polinômio obtido é a mesma sequência dos números binomiais dispostos na linha n do triângulo de Pascal clássico.

Será que esta propriedade continua sendo válida para uma potência real qualquer?

Quando expandimos o produto de uma potência r, tal que $r \in \mathbb{R}$ do binômio $(x+y)$, o uso mais frequente é quando consideramos $y = 1$. Temos, assim, o teorema binomial:

Teorema 2.2.1. *Se $r \in \mathbb{R}$, então*

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r \cdot (r-1) \cdot ... \cdot (r-k+1) \cdot x^k}{k!},$$

para todos os valores de x, tais que $|x| < 1$.

Temos a soma infinita e precisamos da condição $|x|< 1$ para garantir a convergência da série (para um maior detalhamento do estudo de séries e convergências de séries consultar as referências [6], [11] e [13]).

Demonstração. cf. [14]. $\square$

Observemos a série de potência:

$$\begin{aligned}(1+x)^r &= 1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)\cdot x^k}{k!}\\ &= 1+r\cdot x+\frac{r\cdot(r-1)\cdot x^2}{2!}+\ldots+\frac{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)\cdot x^k}{k!}+\ldots\\ &= \binom{r}{0}x^0+\binom{r}{1}x^1+\binom{r}{2}x^2+\binom{r}{3}x^3+\ldots+\binom{r}{k}x^k+\ldots\end{aligned}$$

Logo,

$$(1+x)^r=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{r}{k}x^k,\ \text{com } r\in\mathbb{R} \text{ e } k \text{ inteiro não-negativo.}$$

É denominada série de Maclaurin para $(1+x)^r$, chamada série binomial. Percebemos a presença dos coeficientes binomiais estendidos nesta série.

Analisaremos os valores de r:

i) Consideremos r inteiro não-negativo, com $0 \le k \le r$. O teorema binomial foi demonstrado pela interpretação combinatória na propriedade binômio de Newton 1.5.2. Como o teorema binomial é uma série no caso geral e, portanto, não é uma identidade entre polinômios, não podemos utilizar a técnica do argumento polinomial para estender a validez para as potências reais.

   Observando o lado direito do teorema binomial, temos o último termo nulo, já que no seu numerador há um fator $(r-r)$. Como este fator é presente em todos os termos subsequentes na série infinita, e como tais termos são também nulos, concluímos que a série binomial tem um número finito de termos. Neste caso, os únicos termos não-nulos são aqueles com $0 \le k \le r$. Podemos verificar este fato nas linhas do triângulo de Pascal clássico;

ii) Consideremos r um número real diferente de um número inteiro não-negativo.

Temos a soma infinita da série, pois não há termos nulos. Podemos verificar nas linhas da extensão superior do triângulo de Pascal que não existem elementos nulos, pois todos os coeficientes binomiais possuem índices superiores inteiros negativos.

Dessa maneira, a definição estendida dos coeficientes binomiais 2.0.1 justifica os casos mencionados. Além do mais, o triângulo de Pascal na forma clássica e estendido superiormente fornecem, de maneira prática, os coeficientes da expansão do produto de qualquer potência inteira r do binômio $(1+x)$. A sequência destes coeficientes é a mesma sequência numérica da linha r do triângulo de Pascal clássico e na sua extensão superior. Para $r < 0$, devemos ter a condição $|x| < 1$.

Podemos também usar a série binomial para obter as fórmulas de aproximação polinomial para $(1+x)^r$. Dessa forma, podemos utilizar os primeiros termos da expansão obtida para aproximar as raízes r-ésimas de um número (*cf.* [10], p. 679).

Capítulo 3

Aplicações das propriedades dos coeficientes binomiais estendidos para o ensino médio

Neste capítulo, veremos algumas aplicações das propriedades dos números binomiais estendidos, utilizando a teoria apresentada neste trabalho, buscando uma linguagem mais acessível ao nível do ensino médio. Após o enunciado de cada questão, daremos sugestões que podem ser utilizadas no processo de resolução.

As atividades apresentadas permitem explorar conteúdos do ensino básico, tais como: sistema de numeração decimal, potenciação, adição de números na base decimal, binômio de Newton e sua relação com o triângulo de Pascal. Abordaremos a definição dos coeficientes binomiais estendidos e demostraremos as propriedades binomiais. Utilizaremos o triângulo de Pascal e a extensão superior deste triângulo para ilustrar as identidades.

3.0.1 Atividade I

Nesta atividade, provaremos uma identidade binomial através da interpretação combinatória. Para isso, devemos considerar índices superiores e inferiores inteiros não-negativos.

Considere n e k números inteiros não-negativos, com $k \leqslant n$. Mostre através da interpretação combinatorial a seguinte identidade:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}.$$

(Dica: Conte de duas formas diferentes o número de modos de escolher um grupo com n membros de um grupo de n homens e de n mulheres, tal que o líder seja uma mulher).

Demonstração. Vamos apresentar a seguinte situação:

De quantas maneiras distintas podemos escolher um grupo com n membros de um grupo de n homens e de n mulheres, tal que o líder seja uma mulher?

Vamos contar de modo a obter $n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$.

Escolheremos primeiro o líder. Isso pode ser feito de n maneiras. Temos, então, um total de $(n + n - 1) = 2n - 1$ pessoas e queremos selecionar um grupo com $n - 1$ membros, já que o líder foi escolhido. Isso pode ser feito de $\binom{2n-1}{n-1}$ maneiras.

Pelo princípio multiplicativo, temos $n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$ modos de selecionar um grupo com n pessoas de um grupo de n homens e de n mulheres, tal que o líder seja uma mulher.

Vamos fazer essa mesma contagem de outra maneira, de modo a obter $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2$.

O número de modos de escolher um grupo de k mulheres de um total de n mulheres é $\binom{n}{k}$. O número de possibilidades de escolher um grupo de $n - k$ homens de um total de n homens é $\binom{n}{n-k}$. Uma vez escolhido um grupo com k mulheres, temos k maneiras de escolher o líder. Pelo princípio multiplicativo, temos

$$k \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$$

possibilidades. Por simetria 2.1.2, obtemos

$$k \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \binom{n}{k}^2.$$

Como $1 \leqslant k \leqslant n$, aplicando o princípio aditivo, temos

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}.$$

□

3.0.2 Atividade II

Esta atividade é interessante para ser aplicada no ensino médio, pois enfatiza a relação entre os números binomiais e a disposição dos mesmos no desenvolvimento do binômio de Newton, bem como no triângulo de Pascal. É uma atividade que permite resgatar os conhecimentos de potenciação, sistema de numeração decimal e adição de números nesta base. Partindo de um caso particular, a questão solicita a generalização do resultado da potência para o expoente inteiro não-negativo n de base igual a 11.

Qual o valor de 11^4? Por que este número é fácil de calcular para alguém que conheça coeficientes binomiais? Genelarize para 11^n, com n inteiro não-negativo.

(Dica: Expresse 11 como a soma das parcelas $(10 + 1)$) e utilize o binômio de Newtom. Compare o resultado da potência inteira não-negativa n com a disposição dos números binomiais na linha n do triângulo de Pascal. Para isso, use o conhecimento de sistema de numeração decimal).

Calculando as potências inteiras e não-negativas n de base 11, para $0 \leq n \leq 5$, temos:

i) $11^0 = \mathbf{1}$

ii) $11^1 = \mathbf{11}$

iii) $11^2 = \mathbf{121}$

iv) $11^3 = \mathbf{1331}$

v) $11^4 = \mathbf{14641}$

vi) $11^5 = \mathbf{161051}$.

Vimos a relação do desenvolvimento do binômio de Newton 1.5.2 com a disposição dos números no triângulo de Pascal clássico. Consideremos x e y como variáveis, n e k números inteiros não-negativos, com $0 \leq k \leq n$, então

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + ... + \binom{n}{n}x^0 y^n = \sum_k \binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Utilizando esta fórmula, podemos expressar 11^n no binômio $(10+1)^n$. Consideraremos $0 \leq n \leq 5$:

i) $(10+1)^0 = \binom{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}10^0 1^0;$

ii) $(10+1)^1 = \binom{\mathbf{1}}{\mathbf{0}}10^1 1^0 + \binom{\mathbf{1}}{\mathbf{1}}10^0 1^1;$

iii) $(10+1)^2 = \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{0}}10^2 1^0 + \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}10^1 1^1 + \binom{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}10^0 1^2;$

iv) $(10+1)^3 = \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{0}}10^3 1^0 + \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}10^2 1^1 + \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}10^1 1^2 + \binom{\mathbf{3}}{\mathbf{3}}10^0 1^3;$

v) $(10+1)^4 = \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{0}}10^4 1^0 + \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{1}}10^3 1^1 + \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}}10^2 1^2 + \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}10^1 1^3 + \binom{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}10^0 1^4;$

vi) $(10+1)^5 = \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{0}}10^5 1^0 + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{1}}10^4 1^1 + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}10^3 1^2 + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}10^2 1^3 + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}10^1 1^4 + \binom{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}10^0 1^5.$

E, assim sucessivamente. Logo, para a potência inteira e não-negativa n, temos

$$\begin{aligned}(10+1)^n &= \binom{n}{0}10^n 1^0 + \binom{n}{1}10^{n-1}1^1 + ... + \binom{n}{n}10^0 1^n \\ &= \binom{n}{0}10^n + \binom{n}{1}10^{n-1} + ... + \binom{n}{n}10^0 \\ &= \sum_{0 \leq k \leqslant n} \binom{n}{k}10^{n-k}.\end{aligned}$$

Calculando cada coeficiente binomial, temos

i) $(10+1)^0 = \mathbf{1} \cdot 10^0 1^0 = \mathbf{1};$

ii) $(10+1)^1 = \mathbf{1} \cdot 10^1 1^0 + \mathbf{1} \cdot 10^0 1^1 = \mathbf{11};$

iii) $(10+1)^2 = \mathbf{1} \cdot 10^2 1^0 + \mathbf{2} \cdot 10^1 1^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0 1^2 = \mathbf{121};$

iv) $(10+1)^3 = \mathbf{1} \cdot 10^3 1^0 + \mathbf{3} \cdot 10^2 1^1 + \mathbf{3} \cdot 10^1 1^2 + \mathbf{1} \cdot 10^0 1^3 = \mathbf{1331};$

v) $(10+1)^4 = \mathbf{1}\cdot 10^4 1^0 + \mathbf{4}\cdot 10^3 1^1 + \mathbf{6}\cdot 10^2 1^2 + \mathbf{4}\cdot 10^1 1^3 + \mathbf{1}\cdot 10^0 1^4 = \mathbf{14641}$;

vi) $(10+1)^5 = \mathbf{1}\cdot 10^5 1^0 + \mathbf{5}\cdot 10^4 1^1 + \mathbf{10}\cdot 10^3 1^2 + \mathbf{10}\cdot 10^2 1^3 + \mathbf{5}\cdot 10^1 1^4 + \mathbf{1}\cdot 10^0 1^5 = \mathbf{161051}$.

Comparando a sequência dos números dispostos na linha n do triângulo de Pascal clássico com a expansão da potência inteira e não-negativa n do binômio $(10+1)$, percebemos que os resultados dessa expansão aparecem de maneira explícita até a linha 4 e de forma implícita a partir da linha 5.

Utilizando o binômio de Newton 1.5.2 e aplicando os conhecimentos de sistema de numeração decimal, podemos obter os seguintes resultados:

Exemplo 3.0.1. Para $n = 5$.

$$\begin{aligned}(10+1)^5 &= \binom{5}{0}10^5 1^0 + \binom{5}{1}10^4 1^1 + \binom{5}{2}10^3 1^2 + \binom{5}{3}10^2 1^3 + \binom{5}{4}10^1 1^4 + \binom{5}{5}10^0 1^5\\ &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 10\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0\\ &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 1\cdot 10^4 + 1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0\\ &= \mathbf{1}\cdot 10^5 + \mathbf{6}\cdot 10^4 + \mathbf{1}\cdot 10^3 + \mathbf{0}\cdot 10^2 + \mathbf{5}\cdot 10^1 + \mathbf{1}\cdot 10^0.\end{aligned}$$

Assim, $10^5 = 161.051$.

Exemplo 3.0.2. Para $n = 6$.

$$\begin{aligned}(10+1)^6 &= \binom{6}{0}10^6 1^0 + \binom{6}{1}10^5 1^1 + \binom{6}{2}10^4 1^2 + \binom{6}{3}10^3 1^3 + \binom{6}{4}10^2 1^4 + \binom{6}{5}10^1 1^5 + \binom{6}{6}10^0 1^6\\ &= 1\cdot 10^6 + 6\cdot 10^5 + 15\cdot 10^4 + 20\cdot 10^3 + 15\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0\\ &= 1\cdot 10^6 + 6\cdot 10^5 + (10+5)\cdot 10^4 + (2\cdot 10)\cdot 10^3 + (10+5)\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0\\ &= 1\cdot 10^6 + 6\cdot 10^5 + 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 2\cdot 10^4 + 1\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0\\ &= \mathbf{1}\cdot 10^6 + \mathbf{7}\cdot 10^5 + \mathbf{7}\cdot 10^4 + \mathbf{1}\cdot 10^3 + \mathbf{5}\cdot 10^2 + \mathbf{6}\cdot 10^1 + \mathbf{1}\cdot 10^0.\end{aligned}$$

Logo, $10^6 = 1.771.561$.

A partir da linha 5 do triângulo de Pascal clássico, as sequências numéricas de cada uma dessas linhas apresentam alguns números maiores ou iguais a 10. Desta forma, temos que fazer a manipulação algébrica para reduzir cada um destes coeficientes numéricos e apresentá-los de maneira análoga à representação de um dado número no sistema de numeração decimal (*cf.*[4]):

Qualquer número inteiro a, no sistema de numeração decimal, pode ser representado por

$$a = r_0 \cdot 10^0 + r_1 \cdot 10^1 + r_2 \cdot 10^2 + ... + r_n \cdot 10^n,$$

com $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, ..., r_n < 10$, com $r_n \neq 0$. Podemos utilizar a seguinte representação do número a no sistema de base 10:

$$a = [r_n ... r_0]_{10}.$$

Observamos que é a mesma representação quando expressamos a expansão da potência inteira não-negativa n do binômio $(10 + 1)$ através do binômio de Newton 1.5.2.

Quando $r_n \geq 10$, podemos representá-lo como a soma de duas parcelas (sendo sempre uma delas igual a 10) e depois agregar as potências de base decimal com o mesmo expoente.

Podemos ainda fazer de maneira mais prática. Vamos exemplificar.

A sequência de números da linha 5 no triângulo clássico de Pascal é a seguinte: $1 - 5 - 10 - 10 - 5 - 1$. Lendo essa sequência no sistema decimal ou sistema posicional, cada um dos termos tem uma *ordem* contada da direita para a esquerda. Cada terna de *ordens*, também contada da direita para a esquerda, forma uma *classe*.

Para o número 10, lido da direita para a esquerda que ocupará a terceira ordem ou a posição das centenas, temos 10 centenas que equivale a 1 unidade de milhar e **0** centena. Como temos 10 unidades de milhar e mais uma das 10 centenas, temos um total de 11 unidades de milhar que equivale a **1** unidade de milhar e 1 dezena de milhar. Esta, somada às 5 dezenas de milhar, formam **6** dezenas de milhar. Deixamos o restante da sequência inalterada. Assim, temos a sequência numérica **161051** que é o resultado da potência 11^5.

Para cada sequência numérica da linha n do triângulo de Pascal, com $n \geq 5$, lidos da direita para a esquerda, devemos, a cada etapa, proceder como numa soma usual no sistema de numeração na base 10.

Dessa maneira, obtemos rapidamente o resultado da potência 11^n ao olharmos a sequência dos coeficientes binomiais da linha n do triângulo de Pascal. Portanto, o resultado da potência 11^n é fácil de calcular para alguém que conheça coeficientes binomiais.

Podemos notar que todo esse raciocínio é decorrente do conhecimento da representação de números no sistema de numeração decimal, soma de números na base decimal, binômio de Newton e sua relação com os coeficientes binomiais no triângulo de Pascal clássico.

3.0.3 Atividade III

Esta atividade é um exercício adaptado da referência [3]. É interessante para ser abordada no ensino médio, já que se trata de uma propriedade binomial que pode também ser ilustrada na extensão superior do triângulo de Pascal.

A atividade permite explorar as definições dos coeficientes binomiais de maneira restrita ou de forma estendida e propicia o uso da técnica do argumento polinomial para estender a validez da propriedade para os números reais.

Existe uma "propriedade hexagonal" curiosa ilustrada pelos seis números $1, 4, 10, 15, 6, 1$ que cercam o número 5, no triângulo de Pascal clássico. Multiplicando números alternados neste hexágono, obtemos sempre o mesmo produto: $(1)\cdot(10)\cdot(6) = (4)\cdot(15)\cdot(1) = 60$. A mesma propriedade é válida se extrairmos um outro hexágono de qualquer parte do triângulo de Pascal.

Ilustraremos este exemplo nos seguintes triângulos de Pascal, conforme tabelas 3.1 e 3.2.

Tabela 3.1: Triângulo de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	$\binom{0}{0}$							
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
$\vdots$								

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 3.2: Triângulo de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$								...

Fonte: Elaboração própria.

Vamos enunciar a propriedade hexagonal.

Dados $n, k \in \mathbb{Z}$; $n > 0$ e $1 \leq k \leq n$, temos

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}.$$

Essa identidade relaciona os termos do triângulo de Pascal que formam um hexágono.

a) Verifique a propriedade para algum valor inteiro positivo de n e algum valor inteiro positivo de k.

b) Demonstre a propriedade hexagonal.

c) Verifique a propriedade para algum valor de $n \in \mathbb{R}$ e algum valor de $k \in \mathbb{Z}$.

d) A propriedade hexagonal é válida para qualquer $n \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$?

(Dica: Utilize a definição de coeficientes binomiais 1.3.1 para demonstrar através do método algébrico a propriedade hexagonal para inteiros positivos. Use o argumento polinomial para estender a identidade para índices superiores reais).

(Outra dica: Demonstre algebricamente a propriedade para os reais fazendo uso da definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1.

a) Consideremos $n = 5$ e $k = 1$.

Pelo lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} &= \binom{5-1}{1-1}\binom{5}{1+1}\binom{5+1}{1} \\
&= \binom{4}{0}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{6}{1} \\
&= (1)\cdot(10)\cdot(6) = 60.
\end{aligned}$$

Pelo lado direito, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1} &= \binom{5-1}{1}\binom{5+1}{1+1}\binom{5}{1-1} \\
&= \binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{5}{0} \\
&= (4)\cdot(15)\cdot(1) = 60.
\end{aligned}$$

Podemos visualizar este exemplo nas tabelas 3.1 e 3.2. Percebemos que o número binomial “cercado” pelos seis coeficientes binomiais da propriedade hexagonal é o número $\binom{n}{k} = \binom{5}{1} = 5$.

b) Vamos demonstrar, pelo método algébrico, esta propriedade.

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{Z}; n > 0$ e k inteiro, tal que $1 \leq k < n$, pela definição de coeficientes binomiais 1.3.1, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(n-k-1)!\cdot(k+1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n+1-k)!} \\
&= \frac{\mathbf{k}(n-1)!}{\mathbf{k}\cdot(k-1)!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!}\,\frac{(\mathbf{n+1})n!(\mathbf{n\text{-}k})}{(\mathbf{n+1})\cdot(\mathbf{n\text{-}k})\cdot(n-k-1)!\cdot(k+1)!}\,\frac{(n+1)\cdot n!}{k\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\cdot\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} \\
&= \binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1}.
\end{aligned}$$

□

c) Consideremos $n = -3$ e $k = 2$.

Pelo lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} &= \binom{-3-1}{2-1}\binom{-3}{2+1}\binom{-3+1}{2} \\
&= \binom{-4}{1}\cdot\binom{-3}{3}\cdot\binom{-2}{2} \\
&= (-4)\cdot(-10)\cdot(3) = 120.
\end{aligned}$$

Pelo lado direito, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k}\binom{n+1}{k+1}\binom{n}{k-1} &= \binom{-3-1}{2}\binom{-3+1}{2+1}\binom{-3}{2-1} \\
&= \binom{-4}{2}\cdot\binom{-2}{3}\cdot\binom{-3}{1} \\
&= (10)\cdot(-4)\cdot(-3) = 120.
\end{aligned}$$

Verificando este exemplo na extensão superior do triângulo de Pascal de acordo com as tabelas 3.3 e 3.4.

Tabela 3.3: Extensão superior do triângulo de coeficientes binomiais.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	$\binom{-4}{0}$	$\binom{-4}{1}$	$\binom{-4}{2}$	$\binom{-4}{3}$	$\binom{-4}{4}$	$\binom{-4}{5}$	$\binom{-4}{6}$	$\binom{-4}{7}$	$\binom{-4}{8}$	$\binom{-4}{9}$	
-3	$\binom{-3}{0}$	$\binom{-3}{1}$	$\binom{-3}{2}$	$\binom{-3}{3}$	$\binom{-3}{4}$	$\binom{-3}{5}$	$\binom{-3}{6}$	$\binom{-3}{7}$	$\binom{-3}{8}$	$\binom{-3}{9}$	
-2	$\binom{-2}{0}$	$\binom{-2}{1}$	$\binom{-2}{2}$	$\binom{-2}{3}$	$\binom{-2}{4}$	$\binom{-2}{5}$	$\binom{-2}{6}$	$\binom{-2}{7}$	$\binom{-2}{8}$	$\binom{-2}{9}$	
-1	$\binom{-1}{0}$	$\binom{-1}{1}$	$\binom{-1}{2}$	$\binom{-1}{3}$	$\binom{-1}{4}$	$\binom{-1}{5}$	$\binom{-1}{6}$	$\binom{-1}{7}$	$\binom{-1}{8}$	$\binom{-1}{9}$	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 3.4: Extensão superior do triângulo de valores.

L/C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\vdots$											...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
$\vdots$											...

Fonte: Elaboração própria.

Notamos que o número binomial "cercado"pelos seis coeficientes deste exemplo é $\binom{n}{k} = \binom{-3}{2} = 6$.

A propriedade hexagonal é válida para os coeficientes binomiais estendidos?

Iremos trocar o n por r de tal maneira que r seja um número real e $k \in \mathbb{Z}$. Vamos provar a identidade

$$\binom{r-1}{k-1}\binom{r}{k+1}\binom{r+1}{k} = \binom{r-1}{k}\binom{r+1}{k+1}\binom{r}{k-1}.$$

d) Vamos utilizar o método algébrico para demonstrar tal propriedade.

Demonstração. Pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1, temos dois casos a considerar:

i) Para $k \leq 0$, ambos os lados da identidade são nulos.

ii) Para $k > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\binom{r-1}{k-1}\binom{r}{k+1}\binom{r+1}{k} &= \frac{(r-1)\cdot ... \cdot (r-k+1)}{(k-1)!} \cdot \frac{(r)\cdot ... \cdot (r-k)}{(k+1)!} \cdot \frac{(r+1)\cdot ... \cdot (r-k+2)}{k!} \\
&= \frac{\mathbf{(k)} \cdot (r-1)\cdot ... \cdot \mathbf{(r\text{-}k)}}{\mathbf{(k)} \cdot (k-1)! \cdot \mathbf{(r\text{-}k)}} \cdot \frac{\mathbf{(r+1)} \cdot ... \cdot (r-k)}{\mathbf{(r+1)} \cdot (k+1)!} \cdot \frac{(r+1)\cdot (r) \cdot ... \cdot (r-k+2)}{(k)\cdot (k-1)!} \\
&= \frac{(r-1)\cdot ... \cdot (r-k)}{k!} \cdot \frac{(r+1)\cdot ... \cdot (r-k+1)}{(k+1)!} \cdot \frac{r \cdot ... \cdot (r-k+2)}{(k-1)!} \\
&= \binom{r-1}{k}\binom{r+1}{k+1}\binom{r}{k-1}.
\end{aligned}$$

□

Podemos também usar o argumento polinomial para estender a validez para os índices superiores reais.

Demonstração. Provamos a propriedade hexagonal para r e k inteiros positivos, com $1 \leq k < r$ usando a definição de números binomiais 1.3.1 nesta atividade. Trata-se de uma identidade polinomial, pois ambos os lados da equação são polinômios de grau $3k$ na variável r, satisfeita para todos r e k inteiros positivos, com $1 \leq k < r$. Segue que esses polinômios são idênticos e, portanto, a identidade é válida para qualquer $r \in \mathbb{R}$.

Para os casos em que $k \leq 0$, ambos os lados da identidade são nulos. □

3.0.4 Atividade IV

Esta atividade é baseada na referência [3] e permite a conexão de conhecimentos matemáticos de potenciação, fatorial, definição de coeficientes binomiais estendidos e uso de propriedades decorrentes de tal definição.

Muitas das identidades binomiais são válidas para índices superiores reais r. Quando r assume o valor $-\frac{1}{2}$, o número binomial $\binom{-\frac{1}{2}}{k}$, com $k \geq 0$ pode ser apresentado como produto de uma potência e um coeficiente binomial o que facilita muito os cálculos. Temos as seguintes identidades:

$$\binom{r}{k} \cdot \binom{r-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\binom{2r}{2k} \cdot \binom{2k}{k}}{2^{2k}}, r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}; k \geq 0. \tag{3.0.1}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-\frac{1}{4})^n \binom{2n}{n}; n \in \mathbb{Z}. \tag{3.0.2}$$

a) Verifique a primeira identidade (3.0.1) para algum valor de r e algum valor de k.

b) Verifique a segunda identidade (3.0.2) para algum valor de n.

c) Prove a igualdade (3.0.1) e deduza a identidade (3.0.2).

(Dica: Utilize o método algébrico de demonstração. Para isto, use a definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1 e a identidade binomial subtração do índice superior 2.1.13 para deduzir a segunda identidade).

a) Verificaremos a primeira identidade (3.0.1) para $r = -\frac{1}{2}$ e $k = 4$:

Pelo lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
\binom{r}{k} \cdot \binom{r-\frac{1}{2}}{k} &= \binom{\frac{-1}{2}}{4} \cdot \binom{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{4} \\
&= \binom{-\frac{1}{2}}{4} \cdot \binom{-1}{4} \\
&= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{2})}{4!} \cdot \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)}{4!} \\
&= \frac{35}{128}.
\end{aligned}$$

Pelo lado direito da identidade, temos

$$\frac{\binom{2r}{2k}\cdot\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{\binom{-1}{8}\cdot\binom{8}{4}}{2^{8}} = \frac{35}{128}.$$

b) Testaremos a segunda identidade (3.0.2) para $n = 4$.

Pelo lado esquerdo, temos

$$\binom{-\frac{1}{2}}{4} = \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})\cdot(-\frac{7}{2})}{4!} = \frac{35}{128}.$$

Pelo lado direito, temos

$$(-\frac{1}{4})^n\cdot\binom{2n}{n} = (-\frac{1}{4})^4\cdot\binom{8}{4} = \frac{35}{128}.$$

c) Demonstraremos pelo método algébrico a identidade (3.0.1).

Demonstração. Aplicando a definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1 no lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
\binom{r}{k}\cdot\binom{r-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{r\cdot...\cdot(r-k+1)}{k!}\cdot\frac{(r-\frac{1}{2})\cdot...\cdot(r-k+\frac{1}{2})}{k!} \\
&= \frac{r\cdot...\cdot(r-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{2}\cdot...\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(2r-1)\cdot(2r-3)\cdot...\cdot(2r-2k+1)}{k!} \\
&= \frac{2r\cdot...\cdot 2(r-k+1)}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{(2r-1)\cdot(2r-3)\cdot...\cdot(2r-2k+1)}{2^k\cdot k!} \\
&= \frac{(2r)\cdot(2r-1)\cdot(2r-2)\cdot...\cdot(2r-2k+1)}{2^{2k}\cdot k!\cdot k!}\cdot\frac{(2k!)}{(2k!)} \\
&= \frac{(2r)\cdot...\cdot(2r-2k+1)}{(2k!)}\cdot\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{(2k)\cdot(2k-1)\cdot...\cdot(2k-k+1)}{k!}\cdot\frac{(k)\cdot(k-1)\cdot...\cdot 1}{k!} \\
&= \frac{\binom{2r}{2k}\cdot\binom{2k}{k}}{2^{2k}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\binom{r}{k}\cdot\binom{r-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\binom{2r}{2k}\cdot\binom{2k}{k}}{2^{2k}}, r\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}; k\geq 0.$$

□

Esta propriedade nos leva as identidades binomiais que podem ser manipuladas com menos complexidade. Vejamos um exemplo:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-\frac{1}{4})^n\binom{2n}{n}; n\in\mathbb{Z}.$$

d) Vamos provar esta identidade.

Demonstração. Tomando $k = r = n$, com $n \in \mathbb{Z}$ e substituindo na identidade (3.0.1), temos

$$\binom{n}{n} \cdot \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\binom{2n}{2n} \cdot \binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Para $n < 0$, ambos os lados da equação são iguais a zero. Para $n \geq 0$, temos

$$\binom{n}{n} = \binom{2n}{2n} = 1.$$

Logo,

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Pela propriedade de subtração do índice superior 2.1.13, temos

$$\binom{n-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n}.$$

Assim,

$$(-1)^n \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Dessa maneira, temos

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-\frac{1}{4})^n \binom{2n}{n}.$$

$\square$

Vejamos um fato curioso:

Para $n = 4$, temos

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{4} &= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot (-\frac{7}{2})}{4!} \\
&= (-\frac{1}{2})^4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
&= (-\frac{1}{4})^4 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
&= (-\frac{1}{4})^4 \cdot \binom{8}{4} \\
&= (-\frac{1}{4})^n \cdot \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, transformamos um produto de números ímpares em um fatorial.

3.0.5 Atividade V

Esta atividade é baseada na parte teórica da referência [3]. Por se tratar de uma atividade que permite trabalhar conhecimentos matemáticos como potenciação e definição de números binomiais estendidos. Permite a utilização da propriedade da atividade **IV** para "enxugarmos"os cálculos.

Podemos expressar o produto de dois coeficientes binomiais cujos índices superiores são iguais a $r = -\dfrac{1}{2}$ da seguinte maneira:

Dados k inteiro e n inteiro não-negativo, temos

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$

a) Verifique a identidade binomial para algum valor de n e de k.

b) Prove a identidade.

(Dica: Utilize o método algébrico de demonstração e a propriedade da atividade **IV**).

a) Testaremos a identidade para $n = 3$ e $k = 2$.

Pelo lado esquerdo, temos

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \binom{-\frac{1}{2}}{2}\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{3}{16}.$$

Podemos utilizar a definição estendida de coeficientes binomiais 2.0.1 ou utilizar a propriedade da atividade **IV** para efetuar os cálculos do lado esquerdo desta identidade.

Pelo lado direito da propriedade, temos

$$\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{(-1)^3}{4^3}\binom{4}{2}\binom{2}{1} = -\frac{3}{16}.$$

b) Utilizaremos a demonstração algébrica.

Demonstração. Pela atividade **IV**, temos

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-\frac{1}{4})^n\binom{2n}{n}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} &= (-\frac{1}{4})^k\cdot\binom{2k}{k}\cdot(-\frac{1}{4})^{n-k}\cdot\binom{2(n-k)}{n-k}\\ &= \frac{(-1)^n}{4^n}\cdot\binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k}.\end{aligned}$$

□

3.0.6 Atividade VI

Esta atividade permite a conexão dos conhecimentos de coeficientes binomiais estendidos e potenciação. Podemos obter a fórmula fechada para calcularmos o somatório em k, com $0 \leqslant k \leqslant n$ do produto de dois coeficientes binomiais cujos índices superiores iguais a $-\dfrac{1}{2}$ e cujos índices inferiores tem soma constante.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}; n \geq 0.$$

a) Verifique a identidade para algum valor de n.

b) Prove a identidade.

(Dica: Demonstre a identidade pelo método algébrico. Utilize a Convolução de Vandermonde 2.1.19, a definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1 e conhecimentos de potenciação.

a) Verificaremos para $n = 3$.

Pelo lado esquerdo da identidade, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{3} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} &= \binom{-\frac{1}{2}}{0} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{1} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{2} + \binom{-\frac{1}{2}}{2} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{1} + \binom{-\frac{1}{2}}{3} \cdot \binom{-\frac{1}{2}}{0} \\ &= -\frac{8}{8} = -1. \end{aligned}$$

Podemos efetuar esses cálculos utilizando a definição estendida de números binomiais 2.0.1 ou também através das propriedades das atividades **IV** e **V**. Ainda podemos utilizar a convolução de Vandermonde 2.1.19.

Pelo lado direito, temos

$$\binom{-1}{n} = \binom{-1}{3} = (-1)^3 = -1.$$

Percebemos que a fórmula fechada para encontrar o somatório do produto dos números binomiais cujos índices superiores são iguais a $-\dfrac{1}{2}$ é bem simples e permite que os cálculos sejam simplificados de maneira surpreendente.

b) Provaremos pelo método algébrico.

Demonstração. Consideremos n é um número inteiro não-negativo. O lado esquerdo desta propriedade é igual ao lado esquerdo da identidade Convolução de Vandermonde 2.1.19, considerando o índice superior igual a $-\frac{1}{2}$. Assim, temos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \binom{-\dfrac{1}{2}}{n-k} = \binom{-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}}{n} = \binom{-1}{n}.$$

Pela definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1, para $n \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \binom{-1}{n} &= \frac{(-1) \cdot (-2) \cdot ... \cdot (-n)}{n!} \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Dessa maneira, temos

$$\binom{-1}{n} = (-1)^n = \begin{cases} -1, \text{ se } n \text{ é ímpar,} \\ \text{ou} \\ 1, \text{ se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \binom{-1}{n} = (-1)^n.$$

$\square$

3.0.7 Atividade VII

Esta atividade permite a conexão das atividades **V** e **VI** para obtermos a fórmula fechada do somatório em k, com $0 \leqslant k \leqslant n$ do produto de dois números binomiais com índices superiores e inferiores com somas constantes. Temos assim

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \cdot \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n, n \in \mathbb{Z}; n \geq 0.$$

a) Verifique a identidade para algum valor de n.

b) Demonstre a identidade binomial.

(Dica: Utilize as propriedades das atividades **V** e **VI** deste capítulo.

a) Consideremos $n = 3$.

Pelo lado esquerdo da equação, temos

$$\sum_{k=0}^{3}\binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k} = \binom{0}{0}\cdot\binom{6}{3}+\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}+\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}+\binom{6}{3}\cdot\binom{0}{0}$$

$$= (1)\cdot(20)+(2)\cdot(6)+(6)\cdot(2)+(20)\cdot(1) = 64.$$

Podemos utilizar a definição de coeficientes binomiais estendidos 2.0.1 para calcular os valores de cada fator ou utilizar a definição de números binomiais 1.3.1, já que os índices superiores e inferiores são números inteiros não-negativos.

Pelo lado direito da identidade binomial, temos $4^n = 4^3 = 64$.

Percebemos que a fórmula resultante proporciona cálculos muito mais simplificados.

b) Provaremos pelo método algébrico.

Demonstração. Sabemos, pela atividade **VI** que

$$\text{Identidade } A : \sum_{k=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \binom{-1}{n} = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}; n \geq 0.$$

Pela propriedade da atividade **V**, temos

$$\text{Identidade } B : \binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-k} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k},$$

com k inteiro e n inteiro não-negativo.

Substituindo a identidade B na identidade A, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = (-1)^n.$$

Dessa forma, temos

$$\frac{(-1)^n}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = (-1)^n.$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n, n \in \mathbb{Z}; n \geq 0.$$

□

É interessante observar que identidades binomiais são também utilizadas para demonstrar outras propriedades.

Capítulo 4

Considerações Finais

Nosso trabalho teve como foco principal o estudo de algumas propriedades dos coeficientes binomiais estendidos e tem o intuito de propor aos professores do ensino médio um material de apoio teórico para a abordagem de tal temática.

Sabemos que os livros didáticos do ensino médio definem os coeficientes binomiais apenas para os números inteiros não-negativos. Mas, ao explanarmos este conteúdo, os discentes podem levantar o seguinte questionamento: os coeficientes binomiais também são válidos para os números reais?

De fato, foi possível constatar que muitas propriedades binomiais clássicas do triângulo de Pascal são casos particulares das identidades dos coeficientes binomiais estendidos.

Sugerimos a abordagem da temática deste trabalho relacionada ao conteúdo de contagem, pois pudemos demonstrar muitas propriedades binomiais estendidas através do argumento combinatorial.

Ademais, a contagem constitui um tema propício para resgatar o interesse do aluno, pois podemos solucionar várias situações de contagem utilizando as operações aritméticas básicas e o raciocínio lógico.

Do ponto de vista teórico-metodológico, foi possível fazer um estudo cuidadoso da definição estendida dos coeficientes binomiais e de suas propriedades. Apresentamos a extensão superior do triângulo de Pascal para ilustrar algumas identidades binomiais estendidas.

Para demonstrar as propriedades binomiais estendidas utilizamos várias técnicas, tais como o argumento combinatório, o método algébrico e a técnica do argumento polinomial. Vale ressaltar que usamos algumas identidades para provar outras propriedades.

Foi enriquecedor, neste trabalho, buscar atividades para serem aplicadas ao ensino médio. Vimos que as atividades propostas tem conexão com conteúdos do ensino médio, tais como: contagem, triângulo de Pascal, binômio de Newton, polinômios, progressões aritméticas, conjuntos numéricos, sistema de numeração decimal, potenciação de números reais, dentre outros.

Desse modo, esperamos que este trabalho possa contribuir com perspectivas inovadoras de atuação e, consequentemente, que possa constituir um tema instigante aos alunos, propiciando a capacidade de fazer a conexão da temática abordada com outros conteúdos matemáticos.

Referências Bibliográficas

[1] DOMINGOS, H. e IEZZI. Álgebra Moderna. 4 ed reform. São Paulo: Atual Editora, 2003.

[2] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. Elementos da Álgebra. 5.ed. Rio de Janeiro: Impa, 2008.

[3] GRAHAM, R.L.; KNUTH, D.E.; PATASHNIK, O. Matemática Concreta: Fundamentos para a Ciência da Computação. Tradução Valéria de Magalhães Iorio. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2008.

[4] HEFEZ, A. Aritmética. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016 (COLEÇÃO PROF-MAT; 8).

[5] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. Polinômios e Equações Algébricas. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012 (COLEÇÃO PROFMAT; 4).

[6] LEITHOLD, L. O Cálculo com Geometria Analítica. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1984.

[7] LIMA, E. L. Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013 (COLEÇÃO PROFMAT; 7).

[8] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática Discreta. 2.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015 (COLEÇÃO PROFMAT: 12).

[9] MORGADO, A. C. et al. Análise Combinatória e Probabilidade. 9.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006 (COLEÇÃO PROFMAT: 9).

[10] MUNEM, M. A.; FOULIS, D.J. Cálculo. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978. Título original: Calculus With Analytic Geometry.

[11] NETO, A. C. M. Fundamentos de Cálculo. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015 (COLEÇÃO PROFMAT: 15).

[12] ROSEN, K.H. Matemática Discreta e suas Aplicações. Tradução João Giudice. São Paulo: McGraw-Hill, 2009. Título original: Discrete Mathematics and its Apllications. 6. ed. Americana.

[13] SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com Geometria Analítica. Vol 2. Tradução Alfredo Alves de Faria. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

[14] STEWART, J. Cálculo. Vol 2. São Paulo: Cengage Learning, 2009 (Tradução da 6 a ed. norte americana).

[15] USPENSKY, V. O triângulo de Pascal. Moscou: Editora Mir, 1984.

Apêndice

Progressões Aritméticas

Podemos usar a definição por indução ou recorrência para definir uma Progressão Aritmética ou PA a qual é uma sequência numérica em que a diferença entre um termo e seu antecessor é constante. Representaremos este valor por r denominada *razão* da PA.

Definição 4.0.1. Uma sequência numérica é uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Representando a PA com a notação (a_n), temos

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$.

Logo, uma PA com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência numérica cujo primeiro termo é a_1 e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao antecessor somado com a razão.

Exemplo 4.0.2. Uma *progressão aritmética* (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$a_{n+1} = a_1 + r,$$

onde r é um número real fixo chamado *razão.*

a) Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

b) Se $S_n = a_1 + ... + a_n$, mostre que

$$S_n = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}.$$

a) Vamos provar por indução matemática sobre n.

Demonstração. Consideremos a seguinte proposição:

$$P(n) : a_n = a_1 + (n-1)r.$$

i) CASO BASE: Vamos verificar a validez de $P(n)$ para $n = 1$:

O lado direito e o lado esquerdo da proposição são iguais a a_1. Logo, $P(1)$ é verdadeira;

ii) PASSO DE INDUÇÃO: Consideremos n um número natural arbitrário e vamos supor que $P(n)$ é verdadeira. Mostraremos a validez da implicação:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + nr.$$

De fato, temos $a_{n+1} = a_n + r$, por definição. Por hipótese de indução, temos

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Logo,

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr.$$

Portanto, pelo princípio de indução matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

b) Como $S_n = a_1 + ... + a_n$, usando o item anterior, temos

$$S_n = a_1 + [a_1 + r] + [a_1 + 2r] + ... + [a_1 + (n-1)r]$$

que também pode ser escrita da seguinte maneira

$$S_n = [a_1 + (n-1)r] + [a_1 + (n-2)r] + [a_1 + (n-3)r] + ... + [a_1 + 2r] + [a_1 + r] + a_1.$$

Vamos somar ambas as equações:

$$2S_n = [2a_1+(n-1)r]+[2a_1+(n-1)r]+[2a_1+(n-1)r]+...+[2a_1+(n-1)r] = n[2a_1+(n-1)r]$$

.

Logo, temos

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)r}{2} = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}.$$

Provaremos por indução sobre n.

Demonstração. Seja a seguinte proposição:

$$P(n) : S_n = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}.$$

i) PASSO BASE: Vamos verificar a validez de $P(n)$ para $n = 1$:

   Ambos os lados da equação são iguais a_1. Logo, $P(1)$ é verdadeira;

ii) PASSO DE INDUÇÃO: Seja n um número natural arbitrário. Vamos supor que $P(n)$ é verdadeira. Vamos mostrar que a igualdade é válida para $P(n+1)$. Ou seja, mostraremos a proposição condicional:

$$S_n = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{(a_1 + a_{n+1})}{2}.$$

   De fato, temos

$$S_{n+1} = a_1 + ... + a_n + a_{n+1}.$$

   Por hipótese de indução, temos

$$S_n = a_1 + ... + a_n = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2}.$$

   Logo,

$$S_{n+1} = n \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{2} + a_{n+1}.$$

   Pelo item anterior, sabemos que $a_n = a_1 + (n-1)r$ e $a_{n+1} = a_1 + nr$, então

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= n \cdot \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]}{2} + a_1 + nr \\ &= \frac{2a_1(n+1) + nr(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(a_1 + a_1 + nr)}{2} \\ &= (n+1) \cdot \frac{(a_1 + a_{n+1})}{2}. \end{aligned}$$

   Portanto, pelo princípio de indução matemática, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Progressões Aritméticas de ordem superior

As Progressões Aritméticas de ordem superior dificilmente são abordadas no ensino básico. Vamos definir o operador diferença entre dois termos consecutivos de uma sequência numérica, *cf.* [8] e [9].

Definição 4.0.3. Define-se para as sequências o operador Δ, chamado operador diferença, por

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Portanto, da definição segue imediatamente que uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética (PA) se, e somente se, $(\Delta a_n) = a_{n+1} - a_n$ é constante.

Exemplo 4.0.4. Dada a sequência $(a_n) = (1, 5, 7, 9, ...)$. Se aplicarmos o operador diferença, teremos: $(\Delta a_n) = a_{n+1} - a_n = 2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência (a_n) é uma progressão aritmética.

Dizemos que uma sequência (a_n) é uma PA de segunda ordem ou ordem dois quando o operador diferença $(\Delta a_n) = a_{n+1} - a_n$ é uma PA não constante. Uma sequência (a_n) é uma PA de terceira ordem ou ordem três quando o operador diferença $(\Delta a_n) = a_{n+1} - a_n$ é uma PA de segunda ordem.

Definição 4.0.5. De modo geral, uma PA de ordem k, com $k \geq 2$ é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior formam uma PA de ordem $(k - 1)$.

Segundo [8] a sequência cujo termo de ordem n é a soma $S_n = a_1 + ... + a_n$ dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem p é uma progressão aritmética de ordem $(p + 1)$.

Basta observarmos que o operador diferença, aplicado a (S_n), fornece $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ e define, portanto, uma progressão aritmética de ordem p.

Teorema 4.0.6. *Toda sequência na qual o termo de ordem n é um polinômio em n, de grau p, é uma progressão aritmética de ordem p e, reciprocamente, se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, então (a_n) é um polinômio de grau p em n.*

Demonstração. *cf.* [8] (p. 43) □

Exemplo 4.0.7. (PROFMAT-UEFS: Matemática Discreta-2017) Em um trabalho escolar, João foi convidado a calcular as áreas de vários quadrados diferentes, dispostos em sequência, de tal maneira que o primeiro quadrado da sequência tem lado medindo 1 cm, o segundo quadrado tem lado medindo 2 cm, o terceiro quadrado da sequência tem lado medindo 3 cm e assim por diante. A área do quadrado que ocupa a posição n, na sequência, é representada por A_n.

a) Qual é o valor da diferença $A_n - A_{n-1}$, em centímetros quadrados, para $n \geq 2$?

b) Encontre uma expressão para a soma $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

a) Como a área do quadrado que ocupa a posição n, na sequência é representada por $A_n = n^2$, temos

$$A_n - A_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1.$$

Observemos que a sequência $(b_n) = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$ cujos termos são os lados dos quadrados é uma PA, pois a razão $r = b_n - b_{n-1} = 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(a_n) = (1, 4, 9, 16.25, ...)$ cujos termos representam as áreas dos quadrados de lados iguais aos termos de (b_n) é uma PA de segunda ordem. Aplicando o operador diferença, temos:

i) $c_1 = \Delta a_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$;

ii) $c_2 = \Delta a_2 = a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5$;

iii) $c_3 = \Delta a_3 = a_4 - a_3 = 16 - 9 = 7$;

iv) $c_4 = \Delta a_4 = a_5 - a_4 = 25 - 16 = 9$;

v) $c_5 = \Delta a_5 = a_6 - a_5 = 36 - 25 = 11$.

E, assim sucessivamente. Logo, temos a sequência $(c_n) = (3, 5, 7, 9, 11, ...)$ a qual é um PA não-estacionária. A sequência representada por (a_n), onde a_n é a área do quadrado de lado n é uma PA de ordem 2.

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = 1 + 4 + 9 + 16 + 25, ...$ é a soma dos termos de uma PA de segunda ordem. Portanto, a soma S_n de seus n primeiros termos define uma PA de ordem três.

Usando a volta do teorema (4.0.6), a soma S_n de seus n primeiros termos define uma PA de ordem 3 e o termo geral de S_n é dado por um polinômio de grau três em n.

Dessa maneira, podemos escrever $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$. Atribuindo a n os valores $1, 2, 3$ e 4 e resolvendo o sistema de quatro equações, obteremos o seguinte polinômio do terceiro grau em n

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Técnica do Argumento Polinomial

Várias propriedades da definição estendida dos coeficientes binomiais 2.0.1 são demonstradas pelo método combinatorial, o qual abrange os números inteiros não-negativos. Para estender a validez para os números reais de uma identidade entre polinômios na variável r, com $r \in \mathbb{R}$, podemos utilizar a técnica do argumento polinomial toda vez que conseguirmos provar uma propriedade para os números inteiros não-negativos. Seguiremos as abordagens feitas por [1], [2] e [5].

Definição 4.0.8. Seja $A[x]$ um anel de integridade. Uma função $f : A \longrightarrow A$ denomina-se função polinomial sobre $A[x]$ se existem $a_0, a_1, ..., a_n$ em $A[x]$ tal que, para todo $x \in A[x]$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_j \in A[x]$, para todo $0 \leq j \leq n$.

Os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos são os anéis de integridade infinitos mais relevantes.

O polinômio $f(x) = a_0$ é chamado de polinômio constante.

Quando $f(x) = 0$, denominamos de polinômio identicamente nulo o qual pode ser escrito na forma: $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$, qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Seja $f(x) \neq 0$ um polinômio não identicamente nulo. Temos, assim, algum $a_j \neq 0$ e há um índice máximo.

Vamos definir o grau de $f(x)$, denotado por $gr(f(x))$ como o maior índice. Para o polinômio identicamente nulo, não definimos o seu grau, já o polinômio constante possui grau igual a zero.

Definição 4.0.9. Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ em $A[x]$. Definimos a operação de adição desses polinômios como segue

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j,$$

onde $c_j = a_j + b_j$, para $0 \leq j \leq n$.

Temos

$$gr(f(x) + g(x)) \leq max\{gr(f(x), gr(g(x))\}, \text{para } f(x) \neq 0, g(x) \neq 0 \text{ e}(x) + g(x) \neq 0.$$

Definição 4.0.10. Dados os polinômios: $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ em $A[x]$, definimos a *multiplicação* desses polinômios como segue

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j,$$

onde $c_0 = a_0 \cdot b_0$

$c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0$

$c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0$

$\vdots$

$c_j = a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_{j-1} + ... + a_j \cdot b_0 = \sum_{j=\lambda+\mu} a_\lambda \cdot b_\mu$

$\vdots$

$c_{n+m} = a_n \cdot b_m$.

O resultado da multiplicação de dois polinômios é chamado de *produto*.

Temos ainda

$$gr(f(x) \cdot g(x)) = gr(f(x)) + gr(g(x)).$$

As operações de adição e multiplicação de polinômios tem propriedades as quais são demonstradas *cf.* [5].

Definição 4.0.11. Seja f um polinômio sobre $A[x]$. Um elemento $\mu \in A[x]$ é chamado de raiz de f se $f(\mu) = 0$ (zero do anel).

Dessa maneira, iremos analisar as raízes dos seguintes polinômios:

i) $f(x) = a_0$. O polinômio constante não possui raízes, pois para qualquer $\mu \in A[x], f(\mu) = a_o \neq 0$.

ii) $f(x) = 0+0x+0x^2+...+0x^n$, qualquer $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O polinômio identicamente nulo possui infinitas raízes, pois para qualquer $\mu \in A[x]$, temos $f(\mu) = 0$.

Proposição 4.0.12. *Seja $f \in A[x]$ um polinômio definido*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

com $a_j \neq 0$, então f tem no máximo n raízes em $A[x]$.

Demonstração. *cf.* [5] $\square$

Podemos ter quantidades de raízes ou zeros de um polinômio maiores que o grau deste. Como o polinômio identicamente nulo admite infinitas raízes, então ele admite quantidades de raízes maiores que o seu grau.

Proposição 4.0.13. *Sejam f e g polinômios de $A[x]$, que admitem forma padrão*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, 0 \leqslant j \leqslant n, g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, 0 \leqslant j \leqslant n,$$

qualquer $x \in A[x]$. Então, $f = g$ se, e somente se, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ...,$

Demonstração. *cf.* [1] $\square$

Logo, a diferença entre os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ da proposição (4.0.13) é um polinômio identicamente nulo. Portanto,

$$f(x) - g(x) = 0.$$

Sendo assim, vamos apresentar a técnica do argumento polinomial.

Sabemos que o coeficiente binomial $\binom{r}{k}$ é um polinômio de grau k em r, conforme a definição de números binomiais estendidos 2.0.1. Observemos a seguinte propriedade:

$$(r-k)\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k}, k \in \mathbb{Z} \text{ e } r \in \mathbb{R} \tag{4.0.1}$$

Tanto o lado esquerdo quanto o lado direito dessa identidade são ambos polinômios de grau $k+1$ em r. Um polinômio de grau menor ou igual $k+1$ pode ter, no máximo, $k+1$ raízes distintas, conforme vimos na proposição 4.0.12 . Portanto, a diferença entre dois polinômios de grau menor ou igual a $k+1$ que tem também grau menor ou igual a $k+1$ não pode se anular em mais de $k+1$ pontos, salvo se for identicamente nulo, conforme a proposição 4.0.13.

Assim, se dois polinômios de grau menor ou igual a $k+1$ coincidem em mais de $k+1$ pontos, então eles tem que coincidir em todos os pontos. No segundo capítulo, provamos a identidade referida para r inteiro positivo através da demonstração combinatorial. Assim, estes dois polinômios são iguais em um número infinito de pontos. Logo, eles são idênticos.

Vimos que a identidade binomial 4.0.1 é uma identidade entre polinômios de grau $k+1$ em r e é válida para um número infinito de pontos. Portanto, os polinômios são idênticos e a identidade é válida para qualquer r real.

Sendo assim, conseguindo provar uma identidade binomial para os números inteiros não-negativos e sabendo que se trata de uma identidade entre polinômios (na variável r), ou seja, se os dois polinômios da identidade binomial são iguais em um número infinito de pontos, então eles são idênticos e a propriedade é válida para todo $r \in \mathbb{R}$. Essa técnica é chamada de argumento polinomial e é muito utilizada para estender a validez de identidades polinomiais para os números reais.

Observemos a propriedade de simetria:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ com } n, k \in \mathbb{Z} \text{ e } n \geq 0. \tag{4.0.2}$$

O lado esquerdo é um polinômio de grau k em n. No entanto, o lado direito da identidade não é um polinômio. Logo, a propriedade de simetria não é uma identidade entre polinômios. Dessa forma, a técnica do argumento polinomial não pode ser usada e, portanto, não podemos estender a validez dessa identidade para qualquer índice superior real.