Universidade Estadual de Feira de Santana

Departamento de Ciências Exatas

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS POR MEIO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

ELIENE RODRIGUES MACHADO

Feira de Santana

2019

ELIENE RODRIGUES MACHADO

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS POR MEIO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Ciências Exatas (DEXA) da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Grilo Rosa.

Feira de Santana

2019

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Machado, Eliene Rodrigues
M13p Uma proposta de ensino de gráficos de funções quadráticas por meio de materiais manipuláveis / Eliene Rodrigues Machado. - 2019.
64.: il.

Orientador: Marcos Grilo Rosa
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, 2019.

1. Função quadrática (matemática). 2. Matemática - Ensino. 3. Parábola (matemática). 4. Gráficos. 5. Gráficos de função quadrática – Ensino – Materiais manipuláveis. I. Rosa, Marcos Grilo, orient. III. Universidade Estadual de Feira de Santana. IV. Título.

CDU:517.5

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB5/695

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Eliene Rodrigues Machado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos doze dias do mês de novembro de dois mil e dezenove às 9h no MT55 - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Uma Proposta de Ensino de Gráficos de Funções Quadráticas por meio de Materiais Manipuláveis"**, da discente **Eliene Rodrigues Machado**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Marcos Grilo Rosa (Orientador, UEFS), Graça Luzia Dominguez Santos (UFBA) e Jacqueline Costa Cintra (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO, condicionado a atender as sugestões da Banca Examinadora.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 12 de novembro de 2019.

Prof. Dr. Marcos Grilo Rosa (UEFS)
Orientador

Profa. Dra. Graça Luzia Dominguez Santos (UFBA)

Profa. Dra. Jacqueline Costa Cintra (UEFS)

Visto do Coordenador:

Profª Drª Ana Carla Percontini da Paixão
Coordenadora do Profmat / UEFS

RESUMO

O estudo de gráficos de funções quadráticas na Educação Básica inicia-se no 9º Ano do ensino fundamental e prossegue no ensino médio. Mediante a experiência em ensinar esse conteúdo em sala de aula, percebemos a dificuldade que os alunos apresentam em construir gráficos e de compreenderem o significado de cada coeficiente. O objetivo desse trabalho é propor uma estratégia de ensino de gráficos de funções quadráticas por meio de materiais manipuláveis. Elaboramos um material que permite analisar a variação de um dos coeficientes da função quadrática mantendo os demais fixos. Nossa proposta pode servir de apoio ao professor nas aulas sobre o estudo do comportamento do gráfico de uma função quadrática.

Palavras-chave: Função quadrática; Parábola; Gráficos; Material manipulável; Coeficientes.

ABSTRACT

The study of quadratic function graphs in basic education begins in the 9th grade of elementary school and continues in high school. Through experience in teaching this content in the classroom, we realize the difficulty students have in constructing graphs and in understanding the meaning of each coefficient. The aim of this paper is to propose a strategy for teaching quadratic function graphs through manipulable materials. We elaborated a material that allows us to analyze the variation of one of the quadratic function coefficients while keeping the others fixed. Our proposal can serve as a support to the teacher in classes on the study of the behavior of a quadratic function graph.

Keywords: Quadratic function; Parable; Graphics; Handle material; Coefficients.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao meu Glorioso Deus, pois se não fosse a fé não teria conseguido.

À Universidade Estadual de Feira (UEFS), por ter promovido juntamente com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) para os professores da rede estadual de ensino o Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (Profmat).

A todos os docentes com os quais mantive contatos e aprendizagem e além de disponibilizaram seu tempo para nos orientar e aprofundar os conhecimentos, contribuíram para elaboração deste trabalho.

A todos os colegas da turma que, com paciência e sabedoria, enriqueceram as aulas com suas experiências, especialmente a Adna e a Graziela.

Ao professor Dr. Marcos Grilo Rosa por ter orientado esse trabalho.

À minha querida família por contribuírem na minha formação, meus Pais Edvaldo e Maria do Carmo, e minha irmã, Emilene Machado, pessoas que souberam me compreender e me apoiar nos momentos mais difíceis desta árdua caminhada.

Ao Ministério da Educação, pelo financiamento, uma vez que este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Atualmente, os dados que avaliam os níveis de aprendizagem dos alunos em relação à Matemática do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB entre os anos de 2015 a 2017 revelam que o ensino médio continua estagnado, visto que a média de proficiência do ensino médio em matemática total passou de 251,57 para 251,31; sendo que o adequado e esperado no ano de 2017 era de 375,00, conforme disponíveis no INEP (2017) - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. Esses dados nos levam a refletir como o professor de matemática da educação básica pode criar estratégias de ensino que possam colaborar para a melhoria desses índices, nos anos iniciais e anos finais do ensino fundamental assim como no ensino médio. Segundo a avaliação do Ministério de Educação e Cultura (MEC), a maioria dos estudantes não é capaz de resolver problemas com operações fundamentais com números naturais ou reconhecer o gráfico de uma função a partir de valores fornecidos em um texto.

O conceito de função é trabalhado nas escolas desde as séries iniciais do ensino fundamental I, que compreende do 1º ano ao 5º ano, com a ideia de relação biunívoca e começa a ser aprofundado no 9º ano do ensino fundamental II com o conceito de função quadrática e suas representações gráficas, estendendo-se no ensino médio. Um dos conteúdos trabalhados no 9º ano do ensino fundamental II e no 1º ano do ensino médio é a construção de gráficos de funções quadráticas que na maioria das vezes os alunos são orientados a construírem com lápis e papel. Além das dificuldades de operacionalização dos cálculos aritméticos, na maioria das vezes os alunos não obtém o esboço da função quadrática por erros de cálculos, dando assim a oportunidade de desistirem da plotagem gráfica.

Como professora da área de matemática com alguns anos de experiência na rede pública de ensino, lecionando o conceito de funções quadráticas e suas representações gráficas, foi possível observar que os alunos não conseguem relacionar e visualizar as informações que um gráfico de função quadrática pode fornecer e suas aplicabilidades no cotidiano.

Tendo em vista essas dificuldades, trabalhar com geometria dinâmica pode ser interessante para mostrar aos alunos a relação entre a forma algébrica e a representação gráfica de uma função quadrática. Vários estudos realizados como os de Souza e Silva (2006, p. 107), Melo e Rehfeldt; (2016, p.18) e Sá (2017, p.1) foram feitos na área de Matemática incluindo softwares dinâmicos tais como Geogebra, Winplot, Parábola e KmPlot com aplicações de proposta de atividades para estudar os coeficientes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e a plotagem do seu gráfico.

Além disso, também encontra-se na literatura alguns trabalhos desenvolvidos tais como os dos autores Sanches, Santos, Geretti (2011, p.2-3);Mackedanz e Rodrigues (2017, p. 1) envolvendo materiais didáticos para o ensino de funções quadráticas, como por exemplo, produção de espelhos parabólicos e construção do conceito de função polinomial de 2º grau, jogo das funções quadráticas, dentre outros. Segundo Rêgo e Rêgo (2012, p. 40), “as novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno”.

Neste sentido, essa dissertação tem como objetivo propor uma estratégia de ensino de gráficos de funções quadráticas por meio de materiais manipuláveis. Este trabalho está organizado como segue: no Capítulo 1 apresentamos o referencial teórico necessário para o entendimento da nossa proposta; no Capítulo 2 apresentamos a construção de um material manipulável para trabalhar gráfico de função quadrática; no Capítulo 3 propomos um conjunto de atividades que podem ser desenvolvidas com o nosso material manipulável; em seguida tecemos algumas considerações finais sobre o trabalho.

Capítulo 1

FUNÇÕES QUADRÁTICAS

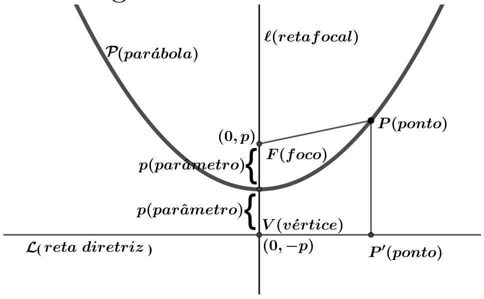
Neste capítulo serão apresentados o conceito de função quadrática, sua forma canônica, sua representação gráfica e a compreensão dos movimentos de translação e rotação em torno do eixo Ox aplicados a uma parábola. O comportamento dos coeficientes a, b e c serão analisados a partir do esboço do gráfico da função quadrática. Ao longo desse capítulo, utilizaremos como referências [1], [2], [5], [6], [7], [10],[13],[14] e [15]. A parábola é uma das cônicas estudadas em Geometria Analítica no 3º ano do ensino médio e é inicialmente apresentada para os alunos no 9º ano do ensino fundamental, quando é estudado o conteúdo de gráfico da função quadrática.

Definição 1.0.1. A parábola $\mathcal{P}$ é o lugar geométrico descrito pelo ponto $P \in \mathbb{R}^2$ que equidista de uma reta $\mathcal{L}$ e de um ponto $F \notin \mathcal{L}$. Esse ponto F é chamado de foco e $\mathcal{L}$ é denominada de reta diretriz. Ou seja,

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F) = d(P, \mathcal{L})\}.$$

A Figura 1.1 apresenta a visualização geométrica de uma parábola.

Figura 1.1: Parábola $\mathcal{P}$



Fonte: Própria autora

Elementos principais da parábola

- A **reta focal** ℓ da parábola $\mathcal{P}$ passa pelo Foco F e é perpendicular à reta diretiz.
- O **vértice V de** $\mathcal{P}$ é o ponto no qual a parábola $\mathcal{P}$ intersecta a reta focal ℓ. Se A é o ponto onde $\mathcal{L}$ intersecta ℓ, então V é o ponto médio do segmento AF.
- O **parâmetro** p da parábola $\mathcal{P}$ é o número $2p = d(F, \mathcal{L})$. Notemos que $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p$. O parâmetro p é positivo.

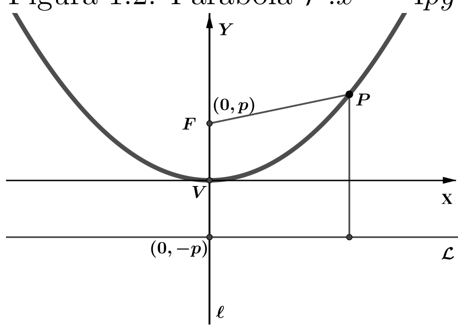
1.1 Dedução da equação de uma parábola

Nessa seção, daremos ênfase à parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy, justamente pelo razão de que nas escolas do 9º do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio apresentam essa temática ao utilizarem o conteúdo de parábolas que são gráficos de funções do tipo $y = f(x)$. Iremos determinar a equação da parábola considerando duas situações:

i) A parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo Oy. Analisaremos os casos:

a) O Foco F está **acima** da reta diretriz $\mathcal{L}$, conforme mostra a Figura 1.2.

Figura 1.2: Parábola $\mathcal{P}$:$x^2 = 4py$



Fonte: Própria autora

Nessa situação, sejam $F = (0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$. Consideremos que o vértice esteja na origem, logo, dados $P = (x, y)$ pertencente à Parábola $\mathcal{P}$ e um ponto $P' = (x, -p)$, temos:

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \mathcal{P} &\iff d(F, P) = d(P, \mathcal{L}) \\
&\iff \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} \\
&\iff \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \\
&\iff \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \\
&\iff x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \\
&\iff x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \\
&\iff x^2 = 4py
\end{aligned}$$

A equação da parábola é dada por $x^2 = 4py$, cuja concavidade está voltada para cima.

Colocando y em função de x,

$$y = \frac{x^2}{4p},$$

e fazendo $a = \dfrac{1}{4p}$, temos:

$$y = ax^2.$$

ou seja,

$$f(x) = ax^2. \tag{1.1.1}$$

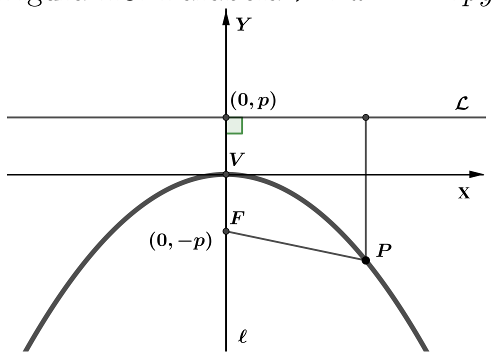
A expressão 1.1.2 corresponde a uma função quadrática. Analisando o coeficiente $a = \dfrac{1}{4p}$ e sabendo que p é uma distância, temos que $a = \dfrac{1}{4p} > 0$, por isso, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ tem a concavidade da parábola voltada para cima. A representação gráfica no plano cartesiano é dada pela figura.

b) O foco F está **abaixo** da reta diretriz $\mathcal{L}$, conforme mostra a Figura 1.3.

Sejam $F = (0. -p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, onde $2p = d(\mathcal{L}, F)$. Consideremos que o vértice esteja na origem. Logo, dados $P = (x, y)$ pertencente à Parábola $\mathcal{P}$ e um ponto $P' = (x, p)$, temos:

$$
\begin{aligned}
P=(x,y)\in\mathcal{P} &\iff d(F,P)=d(P,\mathcal{L})\\
&\iff \sqrt{(x-0)^2+(y+p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2}\\
&\iff \sqrt{x^2+(y+p)^2}=\sqrt{(y-p)^2}\\
&\iff \sqrt{x^2+(y+p)^2}=|y-p|\\
&\iff x^2+(y+p)^2=(y-p)^2\\
&\iff x^2+y^2+2yp+p^2=y^2-2yp+p^2\\
&\iff x^2=-4py
\end{aligned}
$$

Figura 1.3: Parábola $\mathcal{P}$: $x^2=-4py$



Fonte: Própria autora

Portanto, equação da parábola é dada por $x^2=-4py$, cuja concavidade está voltada para cima.

Colocando y em função de x,

$$y=-\frac{x^2}{4p},$$

e fazendo $a=-\dfrac{1}{4p}$ com $a>0$, temos:

$$y=-ax^2.$$

ou seja,

$$f(x)=-ax^2. \tag{1.1.2}$$

A expressão 1.1.2 corresponde a uma função quadrática com o coeficiente $a=\dfrac{1}{4p}>0$ e o gráfico da função $f(x)=-ax^2$ tem a concavidade da parábola voltada para baixo. A representação gráfica no plano cartesiano é dada pela figura.

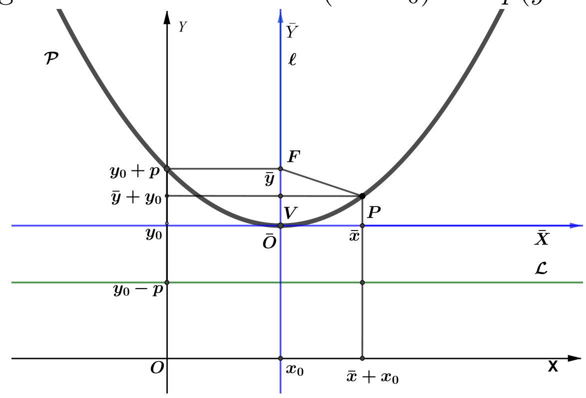
ii) A parábola com o vértice $V=(x_0,y_0)$ e reta focal coincidente com o eixo Oy. Analisaremos os casos:

a) O Foco F está **acima** da reta diretriz $\mathcal{L}$.

Nesse caso, o foce é $F = (x_0, y_0 + p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 - p$ e a reta focal dada por $\ell : x = x_0$. Vamos mostrar que a equação da parábola será dada por

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Figura 1.4: Parábola $\mathcal{P}$: $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$



Fonte: Própria autora

Demonstração. O foco F tem coordenadas $(x_0, y_0 + p)$, a diretriz $\mathcal{L}$ tem equação $y = y_0 - p$ e a reta focal ℓ tem equação $x = x_0$. Desse modo segue,

$$d(F, P) = d(\mathcal{L}, P),$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + p))]^2} = y - (y_0 - p),$$

$$(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + p)]^2 = [y - (y_0 - p)]^2,$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 - 2y(y_0 + p) + (y_0 + p)^2 = y^2 - 2y(y_0 - p) + (y_0 - p)^2,$$

$$(x - x_0)^2 - 2yp + 2y_0p = 2yp - 2y_0p,$$

$$(x - x_0)^2 = 4yp - 4y_0p,$$

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

$\square$

Portanto, a equação da parábola é dada por

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Colocando y em função de x,

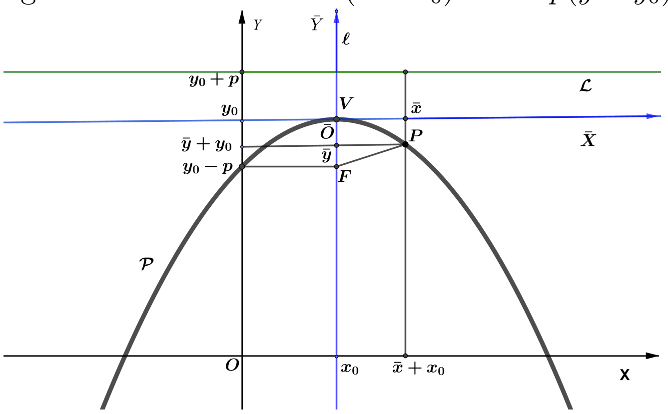
$$y = \frac{x^2}{4p} - \frac{xx_0}{2p} + \frac{x_0^2 + 4py_0}{4p}.$$

Fazendo $a = \dfrac{1}{4p}$, $b = -\dfrac{xx_0}{2p}$ e $c = \dfrac{x_0 + 4py_0}{4p}$, obtemos a equação $y = ax^2 + bx + c$ equivalente a uma função quadrática.

b) O foco F está abaixo da reta diretriz $\mathcal{L}$.

Nesse caso, o foce é $F = (x_0, y_0 - p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 + p$ e a reta focal dada por $\ell : x = x_0$. Seguindo os cálculos de maneira análoga ao item a), a equação da parábola é $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.

Figura 1.5: Parábola $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$



Fonte: Própria autora

Colocando y em função de x,

$$y = -\frac{x^2}{4p} + \frac{xx_0}{2p} + \frac{4py_0 - x_0^2}{4p}.$$

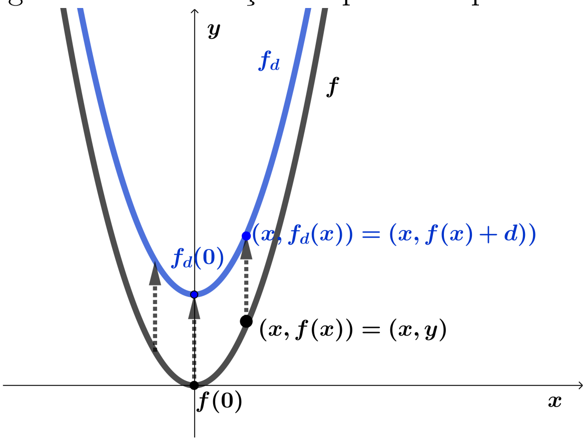
Fazendo $a = \dfrac{1}{4p}$, $b = \dfrac{xx_0}{2p}$ e $c = \dfrac{4py_0 - x_0}{4p}$, obtemos a equação $y = -ax^2 + bx + c$ equivalente a uma função quadrática.

1.2 Movimento de Translação

Definição 1.2.1. (Translação vertical) Sejam $d \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uma translação vertical aplicada a f é uma função $f_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_d(x) = f(x) + d$. O gráfico de f_d é originado a partir do gráfico de f, deslocando-o d valores "para cima", se $d > 0$, ou d valores "para baixo", se $d < 0$.

Observação 1: Na Figura 1.6, temos uma traslação do gráfico de f para cima na qual um ponto $(x, f(x))$ é levado para o ponto $(x, f(x) + d)$, com $d > 0$.

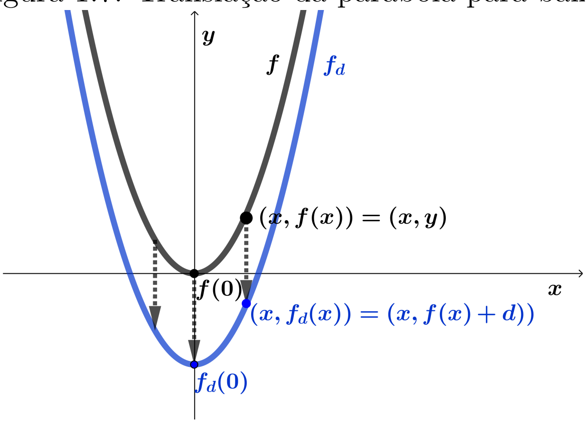
Figura 1.6: Translação da parábola para cima



Fonte: Própria autora

Observação 2: Na Figura 1.7, temos uma traslação do gráfico de f para baixo na qual um ponto $(x, f(x))$ é levado para o ponto $(x, f(x) + d)$, com $d < 0$.

Figura 1.7: Translação da parábola para baixo

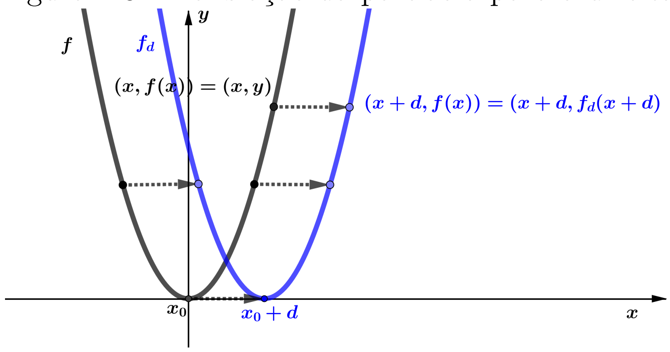


Fonte: Própria autora.

Definição 1.2.2. (Translação horizontal) Sejam $d \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Uma translação horizontal aplicada a f é uma função $f_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f_d(x) = f(x + d)$. O gráfico de f_d é originado a partir do gráfico de f, deslocando-o d valores "para a esquerda", se $d > 0$, ou "para a direita", se $d < 0$.

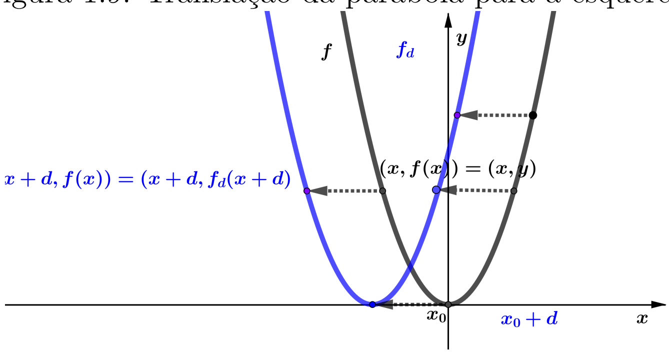
A Figura 1.8 ilustra uma translação horizontal de uma parábola para a direita e a Figura 1.9 ilustra uma translação horizontal de uma parábola para a esquerda.

Figura 1.8: Translação da parábola para a direita



Fonte: Própria autora

Figura 1.9: Translação da parábola para a esquerda



Fonte: Própria autora.

1.3 Função Quadrática

Definição 1.3.1. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se função quadrática quando existem números reais, a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Forma canônica de uma função quadrática

Consideremos a função quadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c, com $a \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Em curtas situações é conveniente escrever $m = -\dfrac{b}{2a}$ e $k = \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4a}$. Assim para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$f(x) = a(x-m)^2 + k$$

A expressão é conhecida como a forma canônica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Coordenadas do vértice da parábola

Suponhamos $a > 0$ e consideremos a forma canônica da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)\right]$$

O binômio $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ que depende de x é sempre maior que zero e o segundo binômio $\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ é sempre um valor constante. Vamos analisar dois casos:

a) $a > 0$

i) Quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é igual a zero, ou seja, quando $x = -\dfrac{b}{2a}$, $f(x)$ assume seu valor mínimo. Portanto, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ii) A função $f(x) = ax^2 + bx + c$ não possui valor máximo, isto é, uma função ilimitada superiormente.

b) $a < 0$

i) Analogamente, $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ é o valor máximo de $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

ii) a função $f(x)$ não possui valor mínimo, isto é, uma função ilimitada inferiormente.

Desta forma, o valor máximo ou mínimo que uma função quadrática pode assumir, é dado por

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

e

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{2a} = -\frac{b^2 - 4ac}{2a} = -\frac{\triangle}{4a}$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola de uma função quadrática são dadas por

$$V = (x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}).$$

1.4 Análise das variações dos parâmetros a, b e c no gráfico da função quadrática

Nessa seção, abordaremos as alterações nos gráficos das funções quadráticas quando variamos um dos coeficientes e fixamos os demais. Para isso, teremos como auxílio o aplicativo GeoGebra para plotar os gráficos e usaremos as referências [5], [6] e[13]. O GeoGebra é um software de matemática que auxilia no processo de ensino e aprendizagem de vários conteúdos; podemos utilizá-lo nas aulas de geometria, álgebra, probabilidade, estatística,além de auxiliar na construção de tabelas e gráficos. Nesse trabalho, o software constitui uma ferramenta importante para ilustrar alterações nos gráficos decorrentes das variações de um determinado coeficiente com os demais fixos.

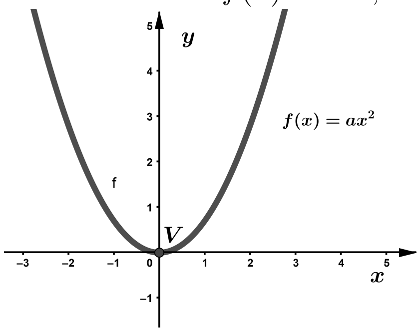
1.4.1 Variação do coeficiente a com b e c fixos

Seja a função f definida por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ em que $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Abordaremos o efeito da variação do coeficiente a no gráfico de uma função quadrática em duas situações:

a) Em relação à concavidade da parábola.

i) Na função $f(x) = ax^2$ com $a > 0$, a concavidade da parábola será voltada para cima, conforme mostra a figura abaixo:

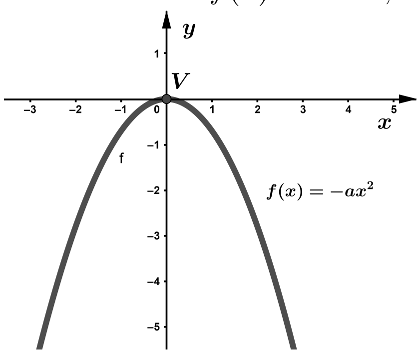
Figura 1.10: Gráfico de $f(x) = ax^2$, com $a > 0$



Fonte: Própria autora

ii) Na função $f(x) = -ax^2$ com $a > 0$, a concavidade da parábola será voltada para baixo, conforme mostra a figura abaixo:

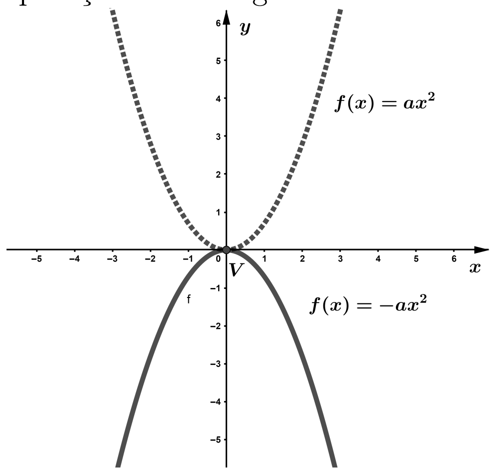
Figura 1.11: Gráfico de $f(x) = -ax^2$, com $a > 0$



Fonte: Própria autora.

O vértice encontra-se na origem com o coeficiente $a > 0$ e ao variarmos o coeficiente a para o seu simétrico $-a$, a parábola faz uma reflexão em relação ao eixo OX, conforma mostra a Figura 1.12.

Figura 1.12: Comparação entre os gráficos de uma função quadrática



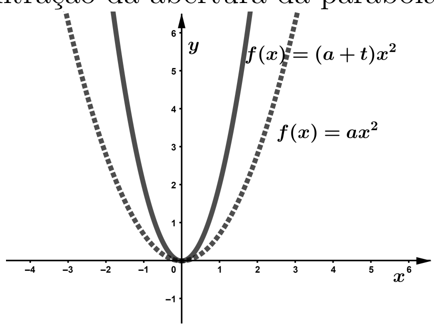
Fonte: Própria autora.

b) Em relação à abertura da parábola

i) $a > 0$

A) Se somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ ao valor de $a > 0$ e obtivermos um $a' = a + t$, a medida que t varia, tal que $0 < a < a'$, a abertura do gráfico da função f passará por uma contração, conforme mostra a Figura 1.13. A variação do coeficiente a da lei de formação da função quadrática ocasiona mudanças no gráfico de f.

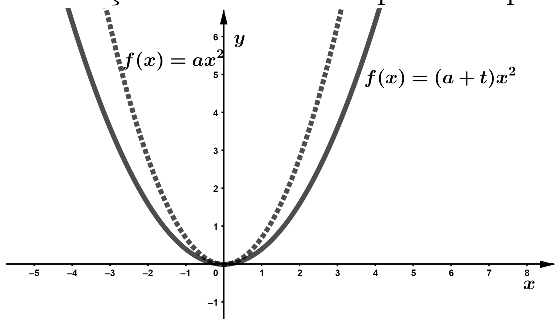
Figura 1.13: Contração da abertura da parábola para $0 < a < a'$



Fonte: Própria autora.

B) Se somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ ao valor de $a > 0$ e obtivermos um $a' = a + t$,com t variando, tal que $a > a' > 0$, a abertura do gráfico da função f passará por uma dilatação da abertura da parábola, conforme mostra a Figura 1.14.

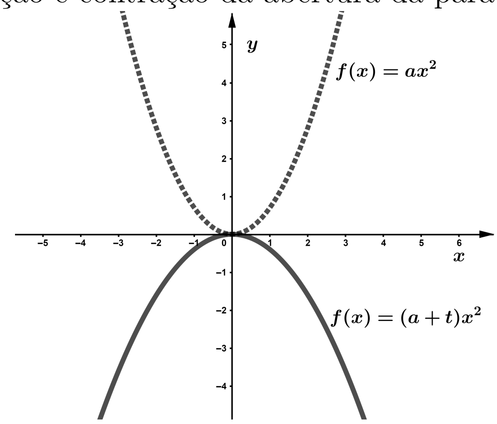
Figura 1.14: Dilatação da abertura da parábola para $0 < a' < a$



Fonte: Própria autora.

C) Se somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ variando ao valor de $a > 0$ e obtivermos um $a' = a + t$ tal que $a' < 0 < a$, a abertura do gráfico da função f passará por uma dilatação, degenerando a medida que t varia até virar uma reta para em seguida, passar por uma contração. E como $a' < 0$, a concavidade da parábola encontra-se voltada para baixo. Observe a Figura 1.15.

Figura 1.15: Dilatação e contração da abertura da parábola para $a' < 0 < a$

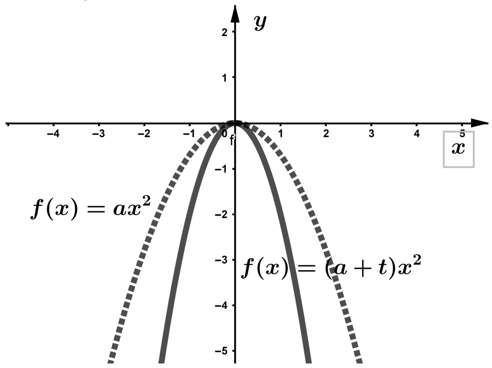


Fonte: Própria autora.

ii) $a < 0$

A) Se somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ ao valor de $a < 0$ e obtivermos um $a' = a + t$ a medida que t varia tal que $a' < a < 0$, a abertura do gráfico da função f passará por uma contração da abertura da parábola, conforme mostra a Figura 1.16.

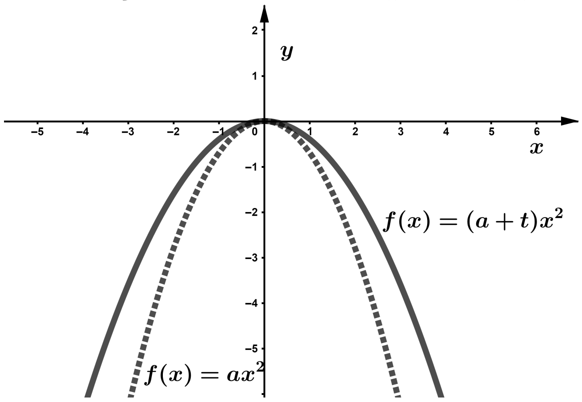
Figura 1.16: Contração da abertura da parábola para $a' < a < 0$



Fonte: Própria autora.

B) Se somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ variando ao valor de $a < 0$ e obtivermos um $a' = a + t$ tal que $a < a' < 0$, a abertura do gráfico da função f passará por uma dilatação da abertura, conforme mostra a figura abaixo.

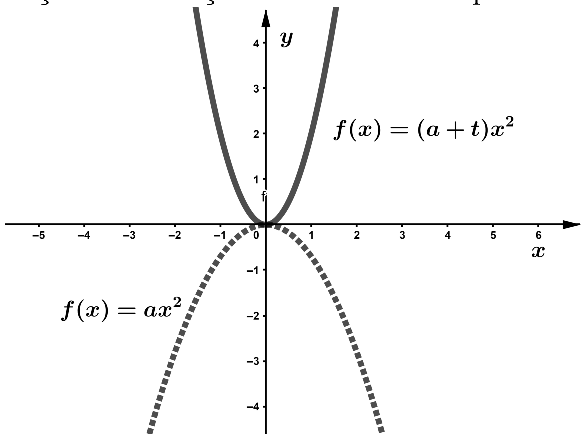
Figura 1.17: Dilatação da abertura da parábola para $a < a' < 0$



Fonte: Própria autora.

C) Se somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ variando ao valor de $a < 0$ e obtivermos um $a' = a + t$ tal que $a < 0 < a'$, a abertura do gráfico da função f passará por uma contração da abertura, degenerando até virar uma reta para em seguida, passar por uma contração, conforme mostra a figura abaixo.

Figura 1.18: Dilatação e contração da abertura da parábola para $a < 0 < a'$



Fonte: Própria autora.

Com o vértice posicionado na origem, quando variamos o coeficiente a e fixamos os demais coeficientes, observamos características relevantes em relação à concavidade e à abertura da parábola no gráfico da função quadrática. Considerando o vértice como um ponto (x_0, y_0) arbitrário,a análise é feita de forma semelhante.

1.4.2 Variação do coeficiente b com a e c fixos

Seja a função f definida por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Abordaremos o efeito da variação do coeficiente b no gráfico de uma função quadrática com o vértice na origem ou fora da origem em três casos:

i) $b = 0$ com o vértice na origem ou fora da origem.

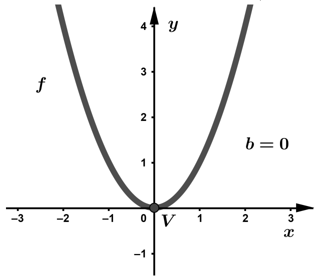
A) Supondo $a > 0$ com o vértice na origem.

Quando o vértice da parábola da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ está posicionado na origem. Como já vimos que essa situação levam os coeficientes b e c a se anularem, dessa forma o vértice da parábola é dado por

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{0}{2.a}, -\frac{0^2 - 4.a.0}{4.a}\right) = (0, 0).$$

Portanto, a parábola da função f contém o vértice localizado na origem.

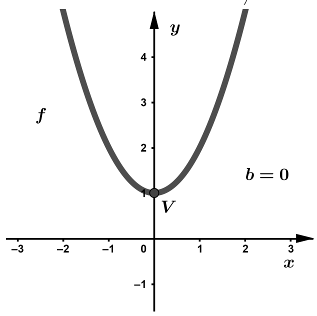
Figura 1.19: Coeficiente $b = 0$, $a > 0$ e $V(0.0)$



Fonte: Própria autora

Com o caso $a < 0$ segue de modo análogo, observe a representação gráfica

Figura 1.20: Coeficiente $b = 0$, $a > 0$ e $V(x_0, y_0)$



Fonte: Própria autora

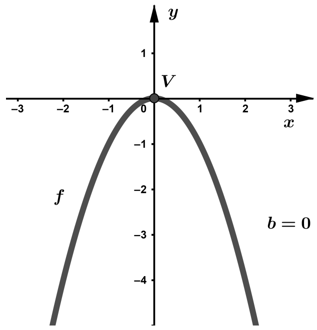
B) Supondo $a > 0$ com o vértice posicionado fora da origem.

Dessa forma, o vértice da parábola da função f desloca-se para um ponto $V' = (x_0, y_0)$ que será dado por

$$V' = \left(-\frac{b}{2.a}, -\frac{b^2 - 4.a.c}{4.a}\right) = \left(-\frac{0}{2.a}, -\frac{0^2 - 4.a.c}{4.a}\right) = (0, c),$$

com $c \in \mathbb{R} - \{0\}$. E o vértice da parábola do gráfico da função originada da função f intersecta no eixo Oy. Observemos a figura 1.21.

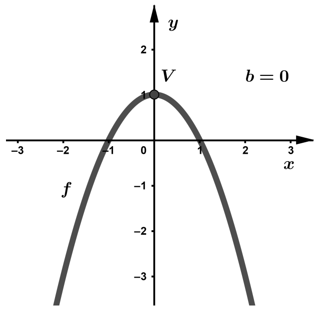
Figura 1.21: Coeficiente $b = 0$, $a < 0$ e $V(0, 0)$



Fonte: Própria autora

E por outro lado, se $b = 0$ e $a < 0$, teríamos a seguinte representação do gráfico da função originada por f.

Figura 1.22: Coeficiente $b = 0$, $a < 0$ e $V(x_0, y_0)$



Fonte: Própria autora

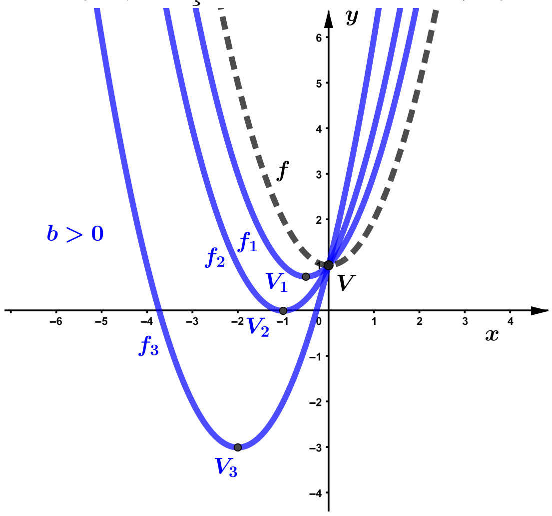
ii) $b > 0$ com $a > 0$ com o vértice fora da origem.

Ao somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ ao valor de $b > 0$ e obtermos um $b' = b + t$ a medida que t varia tal que $0 < b < b + t$, o gráfico da função originada de f intersecta o eixo Oy no ramo crescente e o vértice da parábola será representado por

$$V = \left(-\frac{b'}{2.a}, -\frac{b'^2 - 4.a.c}{4.a} \right)$$

A Figura 1.23 mostra o que acontece com a parábola do gráfico da função f quando aumentamos cada vez o valor do coeficiente b e mantendo a e c fixos. Observe que o vértice das parábolas originadas de f encontram-se localizaodos na parte negativa do eixo Ox, pertencendo ao segundo quadrante ou ao terceiro quadrante ou sobre o eixo Ox.

Figura 1.23: Variação do coeficiente $b > 0$ e $a > 0$



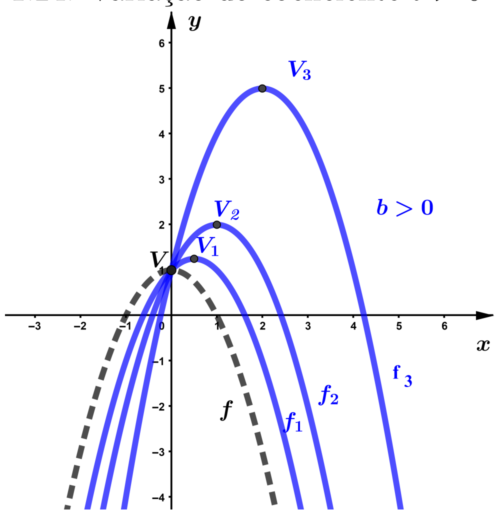
Fonte: Própria autora.

No entanto, ao fazermos o coeficiente $b > 0$ e $a < 0$ segue de maneira análogo. Mas a concavidade da parábola do gráfico da função originada de f encontra-se voltada para baixo e o vértice é dado por

$$V = \left(-\frac{b'}{2.a}, -\frac{b'^2 - 4.a.c}{4.a}\right).$$

Observe a representação gráfica quando $b + t > 0$ e $a < 0$ na figura abaixo.

Figura 1.24: Variação do coeficiente $b > 0$ e $a < 0$



Fonte: Própria autora

Nota-se que as parábolas dos gráficos das funções originada da função f continuam intersectando o eixo OY no ramo crescente, mas o vértice da parábola se desloca para parte positiva do eixo Ox, que pode estar no primeiro quadrante, ou no quarto quadrante ou sobre o eixo Ox.

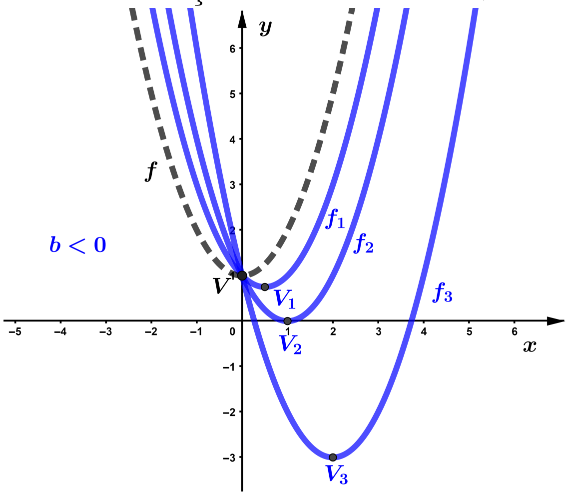
iii) $b < 0$ e $a > 0$ com o vértice fora da origem

Ao somarmos um valor $t \in \mathbb{R}$ ao valor de $b < 0$ e obtermos um $b' = b + t$ a medida que t varia tal que $b + t < b < 0$, o gráfico da função originada de f intersecta o eixo Oy no ramo crescente e o vértice da parábola será representado por

$$V = \left(-\frac{b'}{2.a}, -\frac{b'^2 - 4.a.c}{4.a}\right).$$

A Figura 1.25 mostra o que acontece com o gráfico da função f cada vez que alterarmos o valor do coeficiente b e mantendo a e c fixos. Observe que o vértice das parábolas originadas de f encontram-se localizados na parte positiva do eixo Ox, pertencendo ao segundo primeiro ou sobre o eixo Ox ouno quarto quadrante.

Figura 1.25: Variação do coeficiente $b < 0$ e $a > 0$



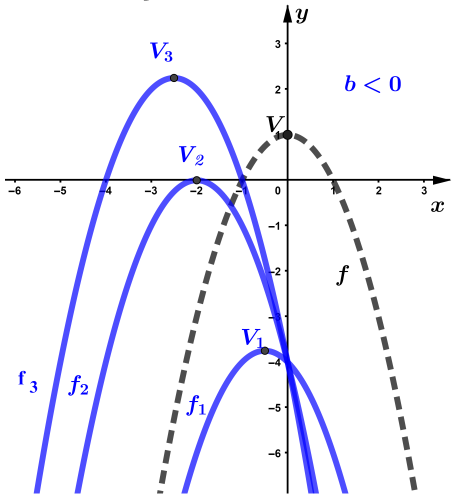
Fonte: Própria autora.

Por outro lado, ao fazermos o coeficiente $b < 0$ e $a < 0$ segue de maneira análogo. Mas a concavidade da parábola do gráfico da função f encontra-se voltada para baixo e o vértice é dado por

$$V = \left(-\frac{b'}{2.a}, -\frac{b'^2 - 4.a.c}{4.a}\right).$$

Observe a representação gráfica quando $b + t < 0$ e $a < 0$ na figura abaixo.

Figura 1.26: Variação do coeficiente $b < 0$ e $a < 0$



Fonte: Própria autora

Nota-se que os gráficos das funções originada da função f continuam intersectando o eixo OY no ramo decrescente, mas o vértice da parábola se desloca para parte positiva do eixo Ox, que pode estar no primeiro quadrante, ou no quarto quadrante ou sobre o eixo Ox.

1.4.3 Variação do coeficiente c com a e b fixos

Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, o ponto que a parábola intersecta o eixo Oy é dado por $P(0, c)$. De fato, para $x = 0$, temos:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c.$$

O ponto $(0, c)$ é a interseção da parábola do gráfico de f com o eixo Oy. Agora, analisaremos a variação do coeficiente c da função f em três casos:

i) $c = 0$ com $a > 0$

O ponto P (0,c) = (0,0) e o gráfico da função f intersecta o eixo Oy na origem. Caso o valor do coeficiente $a < 0$, o gráfico da função f ainda continua intersectando no eixo $0y$ na origem.

ii) $c > 0$ com $a > 0$

Considere $t \in \mathbb{R}$ variando, se acrescentarmos $|t|$ unidades a ordenada do ponto $P = (0, c)$, teremos $P' = (0, c + t) = (0, c')$ Nessa situação temos três casos para serem analisados:

a) Se $c' > 0$, o gráfico da função intersecta o eixo Oy na parte positiva.

b) Se $c' = 0$, o gráfico da função intersecta o eixo Oy na origem.

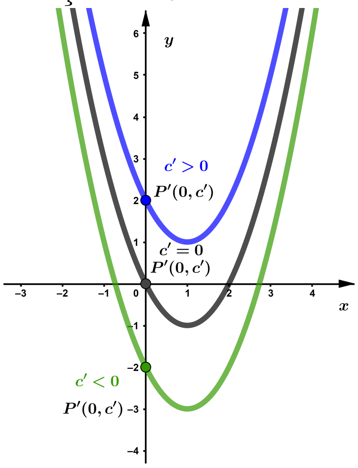
a) Se $c' < 0$, o gráfico da função intersecta o eixo Oy na parte negativa.

Observações:

- Na situação em que $a < 0$ segue de maneira análoga
- A analise para o caso $c < 0$ também segue de forma semelhante ao item ii).

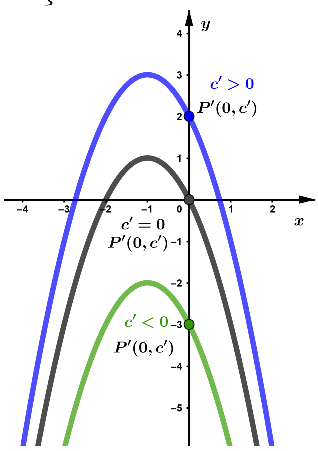
Para os três casos analisados observe os gráficos a seguir

Figura 1.27: Variação do Coeficiente $c = 0$ com $a > 0$



Fonte: Própria autora.

Figura 1.28: Variação do Coeficiente $c = 0$ com $a < 0$



Fonte: Própria autora.

Capítulo 2

MATERIAIS MANIPULÁVEIS PARA O ESTUDO DOS COEFICIENTES DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos as etapas da confecção do material manipulável, que proporciona o estudo do gráfico de uma função quadrática quando variamos um coeficiente e deixamos os demais fixos.

2.1 Construção de materiais manipuláveis para o ensino de gráfico de função quadrática

A experiência de lecionar o conteúdo de gráficos de funções quadráticas aos alunos, levou a professora/autora desta dissertação a perceber a dificuldade em que os estudantes apresentavam na construção do gráfico. Esta é a razão que motiva essa proposta de trazer uma estratégia de ensino que utiliza um material manipulável para estudar a variação dos seus coeficientes.

Antes da confecção do material foi necessário esboçar em papel ofício e perceber e visualizar como seria a movimentação das parábolas dos gráficos da função quadrática quando variamos os um dos c coeficientes da função quadrática e fixarmos os demais.

Posteriormente, vários testes confeccionamos o material manipulável em papel cartão, o que demandou um certo tempo para aperfeiçoar a manipulação de forma mais adequada tentando uma melhor visualização do gráfico.

A utilização desse material por professores em sala de aula possibilitará resgatar conhecimentos prévios a respeito do conceito de funções quadráticas e da construção dos seus gráficos. A inserção desse material manipulável na sala de aula oportunizará ao aluno perceber características e propriedades de uma função quadrática que estão associadas aos coeficientes da parábola, como a contração/dilatação da concavidade da parábola e movimentos de translação.

2.1.1 Etapas de construção dos materiais manipuláveis

Ao pensarmos em um material manipulável que pudesse ser utilizado com os alunos na construção de gráficos de funções quadráticas buscamos uma alternativa didático-metodológica. A nossa estratégia possibilita que os alunos observem as mudanças ocorridas na representação gráfica das funções quadráticas ao variarmos um dos coeficientes e fixarmos os demais.

Vamos detalhar passo a passo a construção do protótipo para dar oportunidade aos professores de aprenderem a confeccionar seu próprio material manipulável a ser utilizado em sala de aula. Espera-se que o este seja de fácil manuseio, tanto pelo professor quanto pelo aluno. Os materiais manipuláveis serão apresentados a seguir em três versões didáticas.

Material Manipulável 01: variação do coeficiente a da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- **Detalhamento**

Neste primeiro material manipulável são envolvidos dois casos a serem para serem analisados em relação à variação do coeficiente a sendo a f com os demais coeficientes fixos, a saber, a concavidade da parábola com o vértice na origem ou em um ponto arbitrário. Levando o questionamento:o que acontece com a parábola quando escolhemos valores cada vez menores ou maiores para o coeficiente a, ou seja, a sua influência que terá na abertura da parábola?

- **Grau de funcionalidade com o produto final em mdf**[1]

Para testarmos a funcionalidade, foram necessários fazermos alguns testes para visualizarmos o comportamento do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, ao variarmos o coeficiente a. O material é composto por um retângulo que possui dimensões $95cm$ x $56cm$. Este retângulo foi subdividido em três retângulos menores, com as seguintes dimensões: $86cm$ x $17cm$, que abordará a análise da concavidade da parábola; e os outros dois com 86cm x 56cm, para avaliar a abertura da parábola.

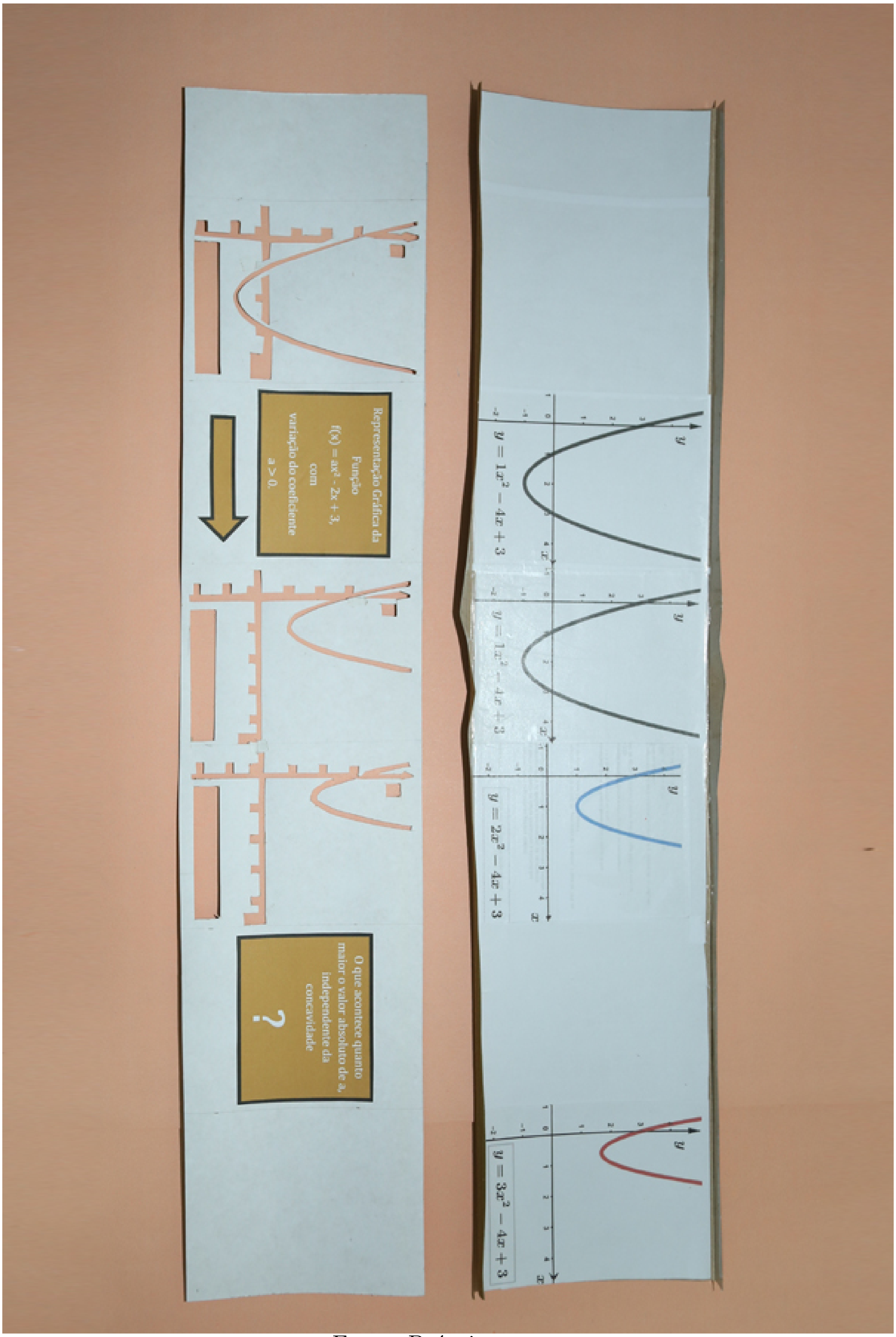
Cada retângulo contém uma parte externa vazada e uma parte interna com as representações gráficas e os valores dos coeficientes escolhidos.Conforme mostram as Figuras 2.1, 2.2 e 2.3, temos os materiais manipuláveis em papel cartão e todas as plotagens dos gráficos foram construídas no software Geogebra. Este material serviu para a confecção do modelo final na versão em material mdf.

[1]fibra média densidade

Figura 2.1: Concavidade da parábola

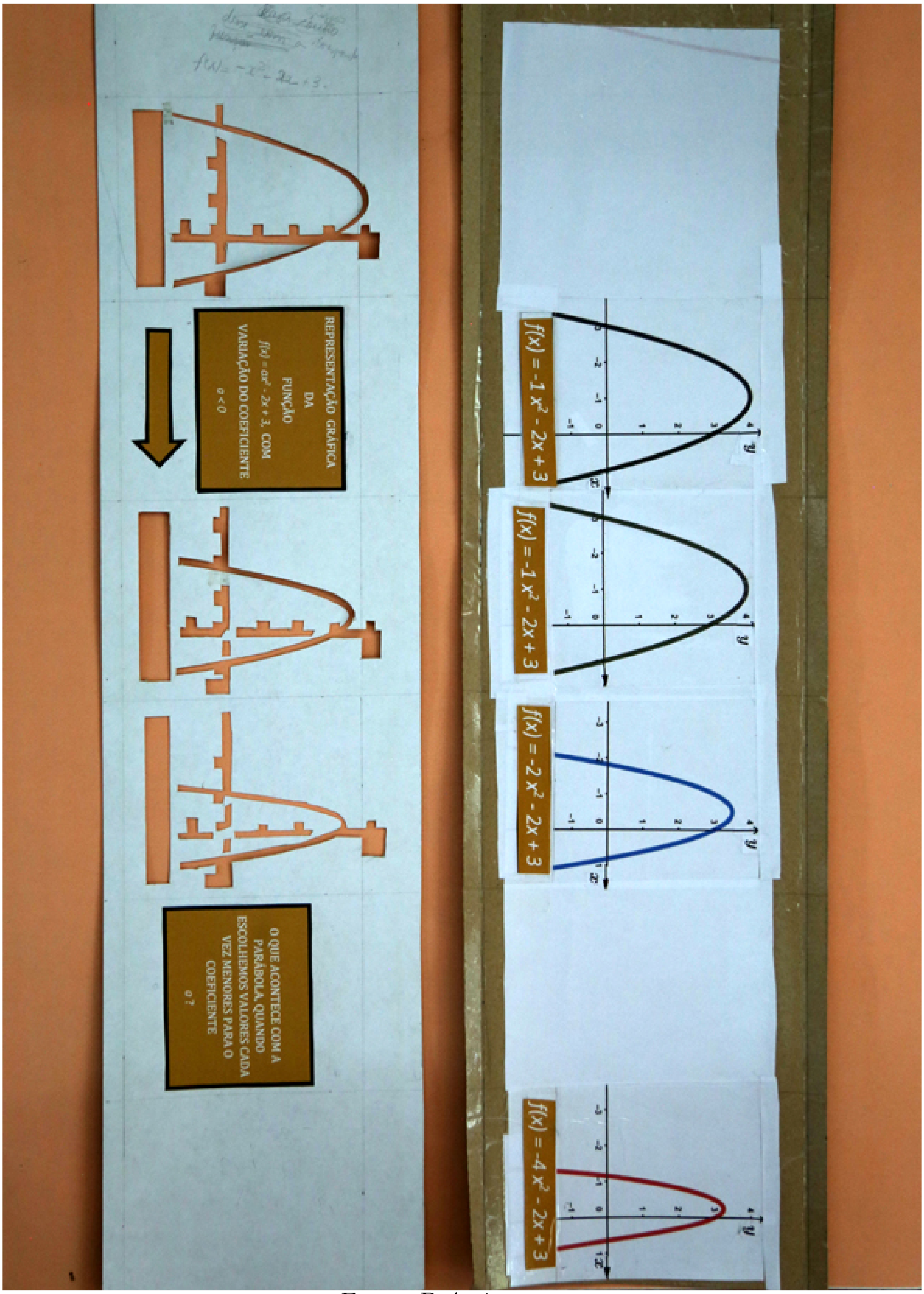
Fonte: Própria autora

Figura 2.2: Abertura da parábola



Fonte: Própria autora

Figura 2.3: Abertura da Parábola



Fonte: Própria autora

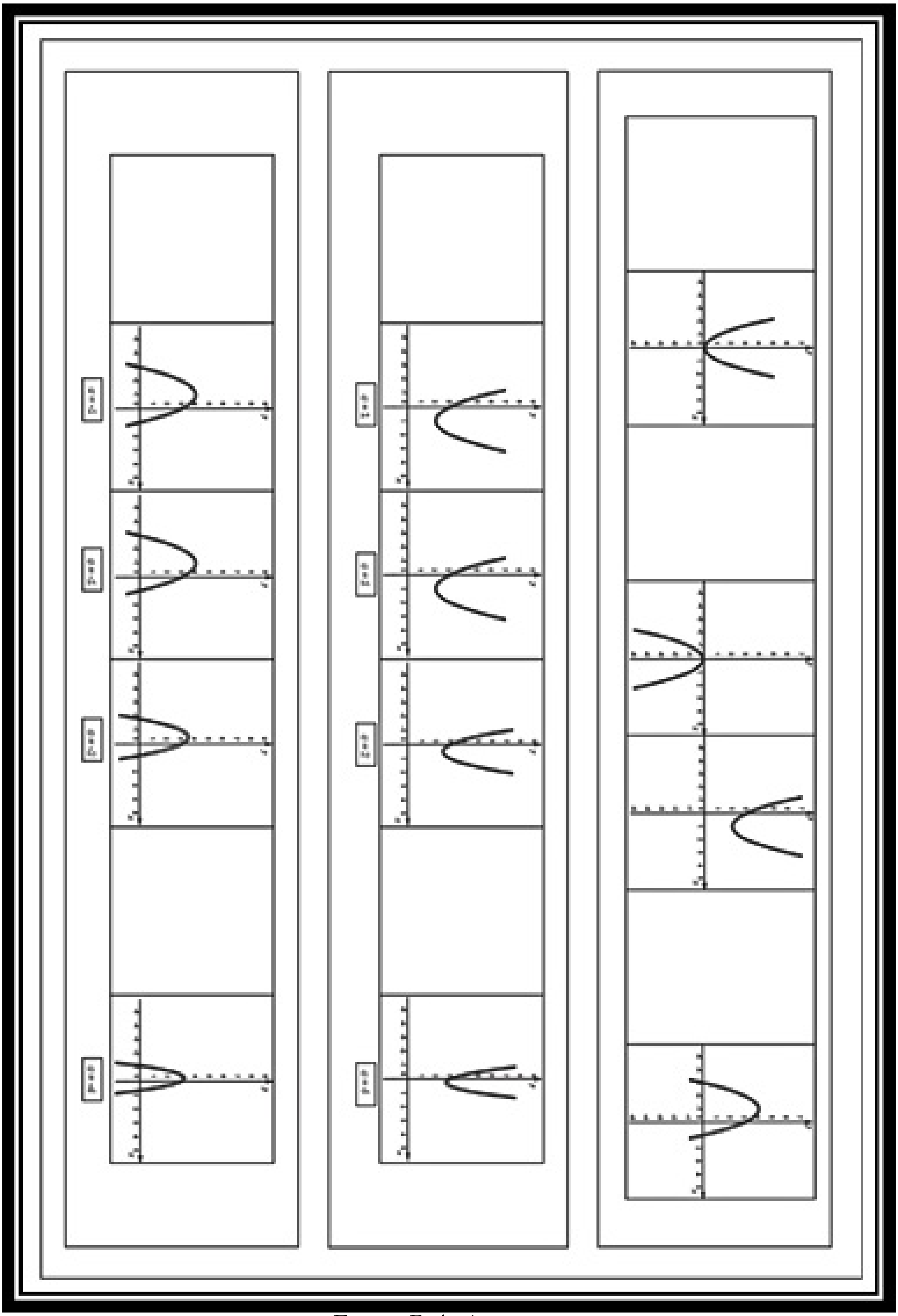
- **Manuseio**

Para manusear o material manipulável $n°01$ é necessário seguir com o apio da proposta de atividade apresentada no capítulo 3.

- **Refinamento da estética do material manipulável**

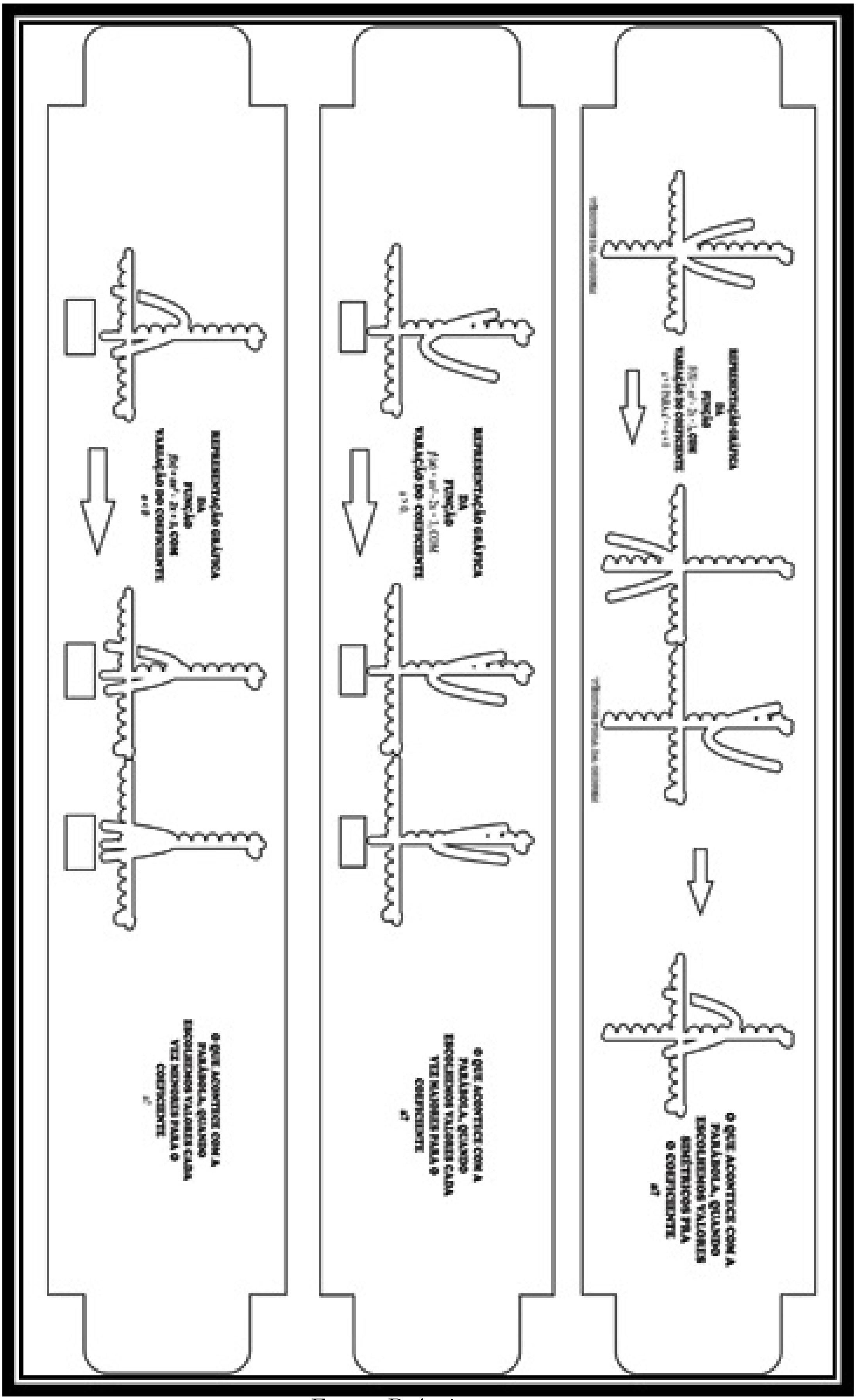
Apresentamos a versão final que pode contribuir nas aulas de gráficos de funções quadráticas para professores das escolas públicas e particulares de ensino. O material manipulável antes de ter a sua arte finalizada foi confeccionado em papel cartão com o auxílio de materiais tais como: tesoura, gráficos plotados no software Geogebra e impresso em papel de ofício, cola, régua, lápis, borracha e computador. Mediante vários testes de aplicabilidade do material manipulável, confeccionamos a arte final em madeira mdf representada nas Figuras 2.4 , 2.5 e 2.6

Figura 2.4: Plano de fundo do material manipulável 01



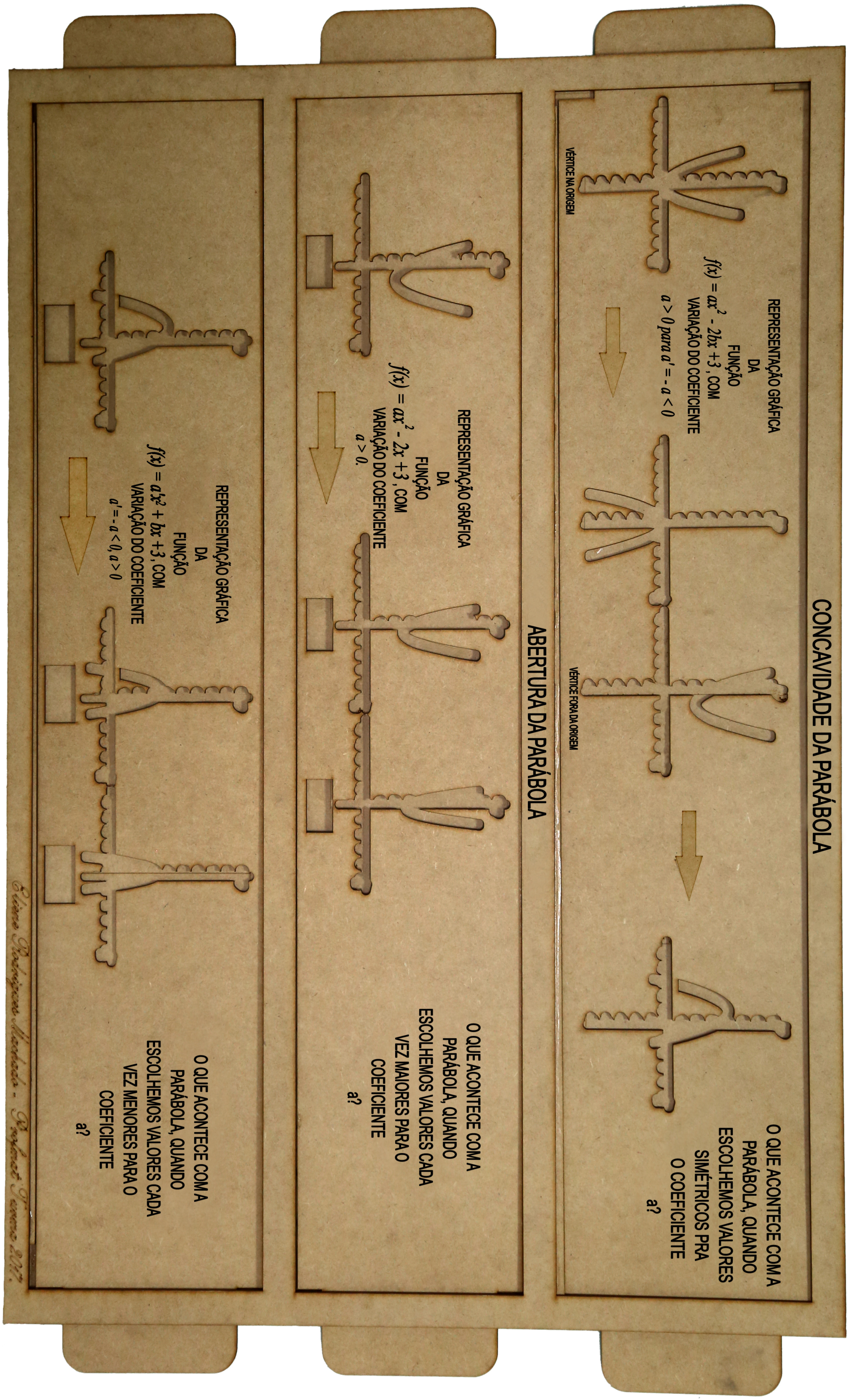
Fonte: Própria autora

Figura 2.5: Plano superior do do material manipulável 01



Fonte: Própria autora

Figura 2.6: Arte final do material manipulável 01



Fonte: Própria autora

Material Manipulável 02: Variação do coeficiente b da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

- **Detalhamento**

Este material manipulável tem a finalidade de estudar a variação do coeficiente b e sua influência no traçado da curva da parábola da função quadrática. Dividimos em duas partes:

i) Na primeira parte, iniciamos com o valor do coeficiente $b = 0$. Em seguida, atribuímos valores para $b > 0$, para avaliar o que acontece com valores cada vez maiores para o coeficiente b.

ii) Na segunda parte, iniciamos novamente com o valor do coeficiente $b = 0$. Em seguida, atribuímos valores para $b < 0$, para avaliar o que acontece com valores cada vez menores para o coeficiente b.

- **Grau de funcionalidade com o produto final em mdf**

O material manipulável $n°02$ tem um formato retangular cujas dimensões são $96cm$ x $40cm$, o qual foi subdividido em dois retângulos menores com dimensões $38cm$ x $17cm$. Cada um dos retângulos menores contém uma parte externa vazada e uma parte interna com as representações gráficas e os valores dos coeficientes escolhidos, conforme vemos na Figura 2.7.

Testamos a funcionalidade no papel ofício e posteriormente elaboramos a versão em papel cartão. Foram feitos vários vários testes para visualizar o efeito que ao variarmos o coeficiente b ao fixarmos os demais para perceber o feito causado no gráfico da função quadrática ao manipular o material em papel cartão.

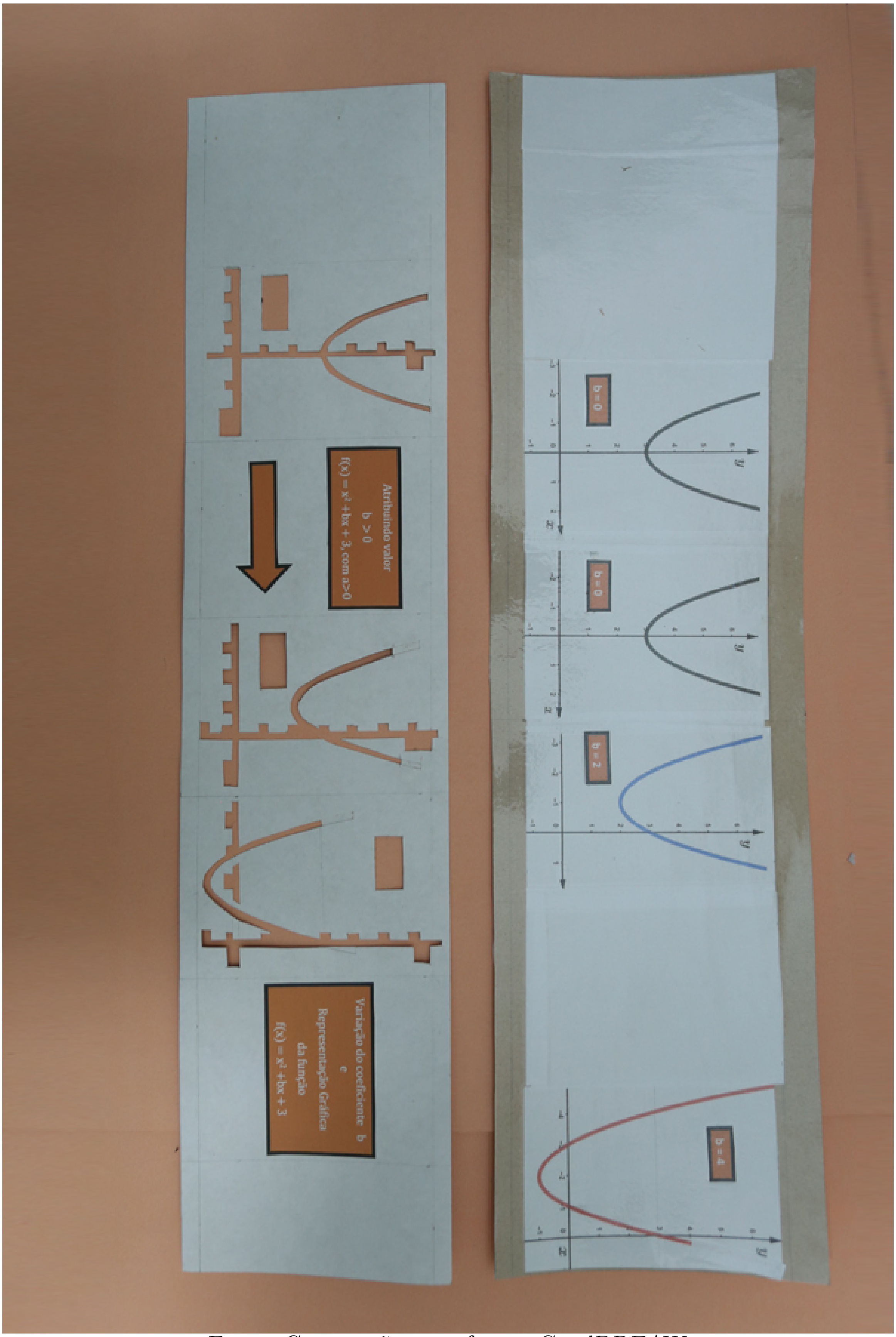
- **Manuseio**

Para manusear o material manipulável $n°02$ é necessário seguir com o apio da proposta de atividade apresentada no capítulo 3.

- **Refinamento da estética do material manipulável**

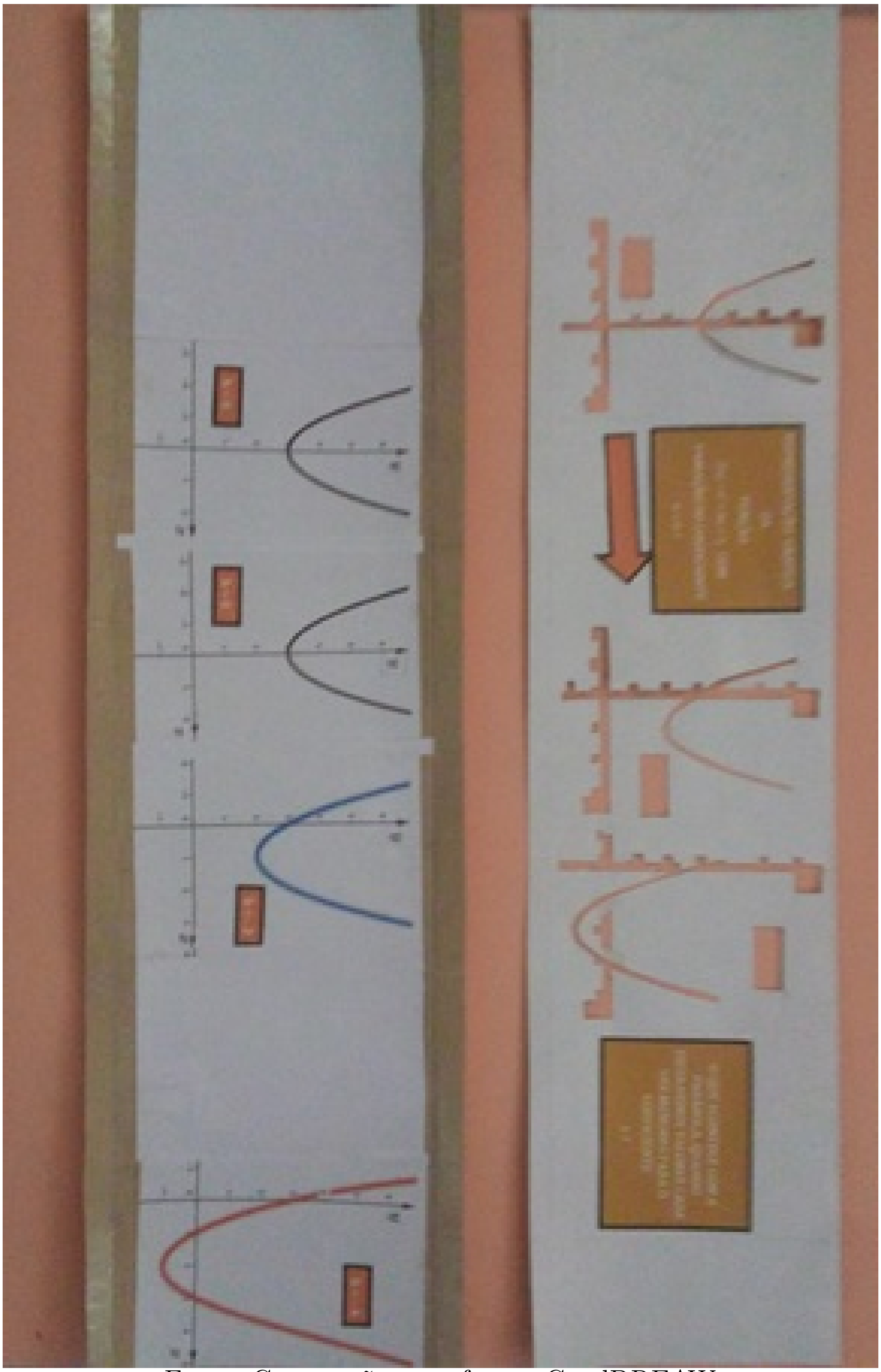
Apresentamos a versão final que segue o mesmo padrão adotado no protótipo da variação do coeficiente a, conforme mostram as Figuras 2.7 e 2.8.

Figura 2.7: Construção do material manipulável em papel cartão



Fonte: Construção no software CorelDREAW

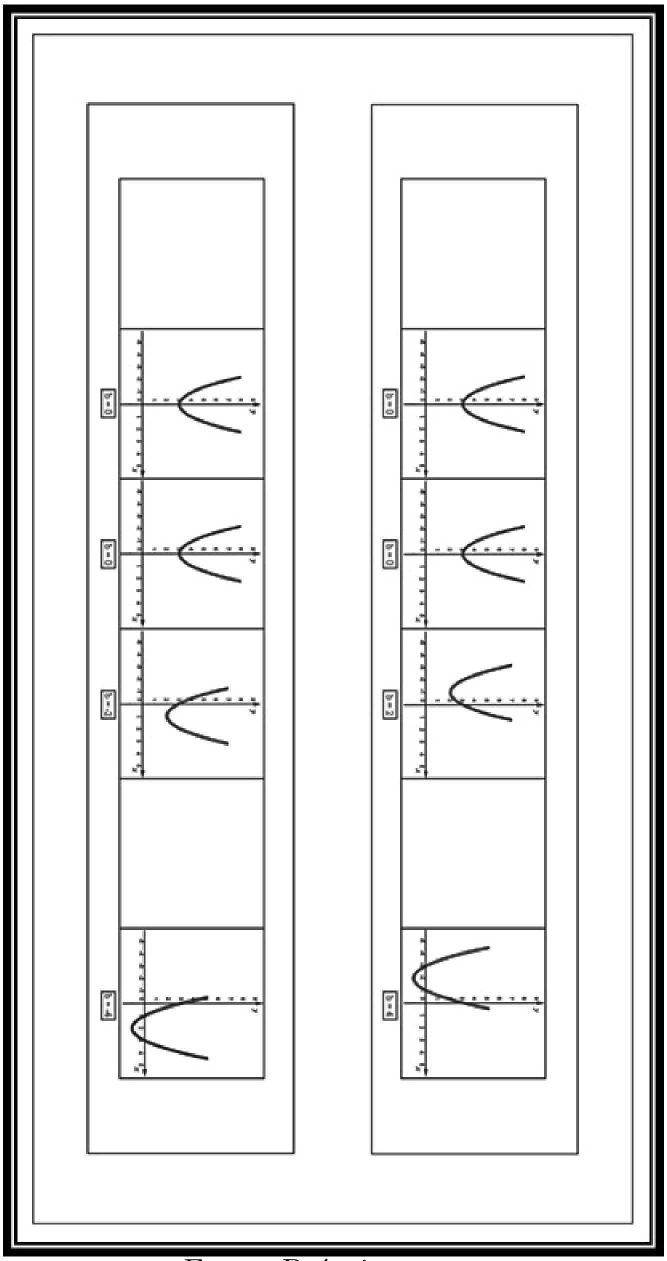
Figura 2.8: Construção do material manipulável em papel cartão



Fonte: Construção no software CorelDREAW

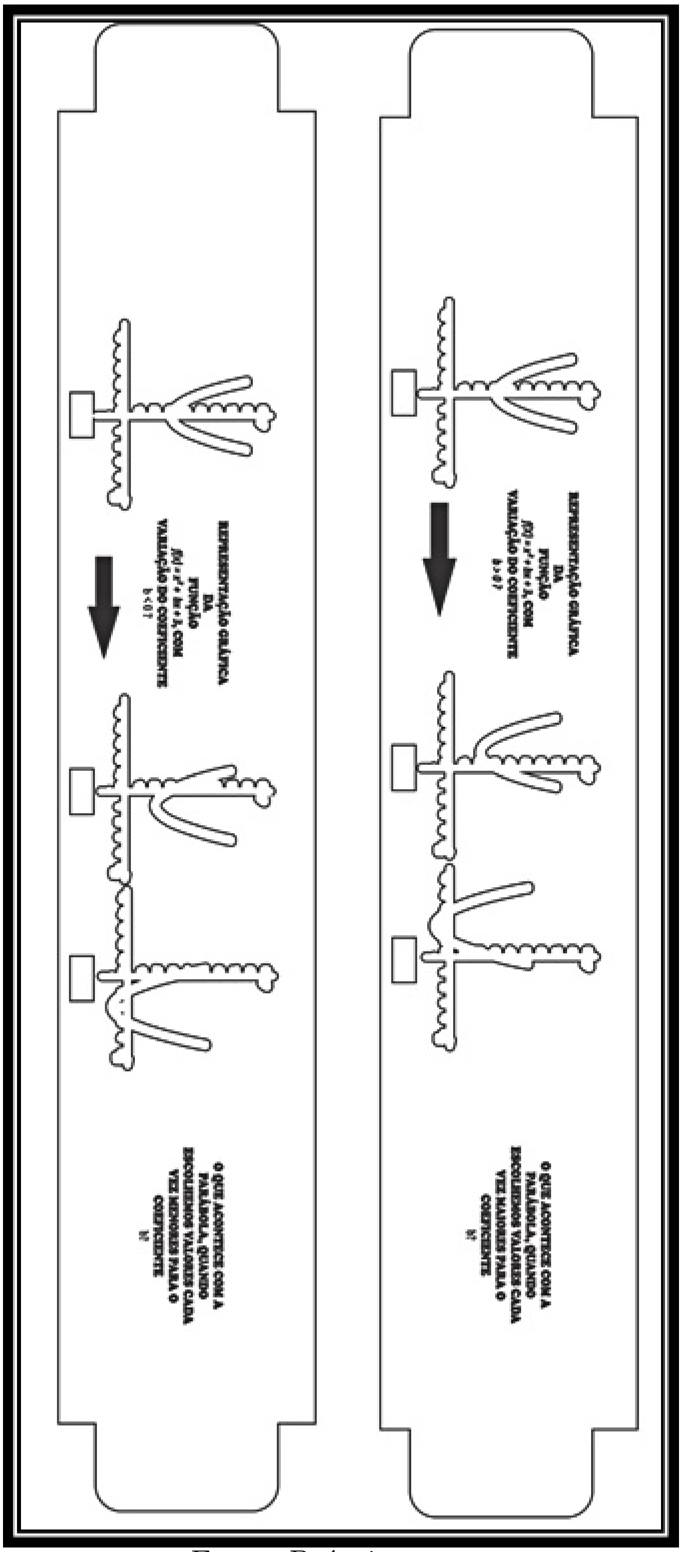
A arte final está representada na Figura 2.10 e o plano de corte nas Figuras 2.9 e 2.10.

Figura 2.9: Plano de fundo do material manipulável 02



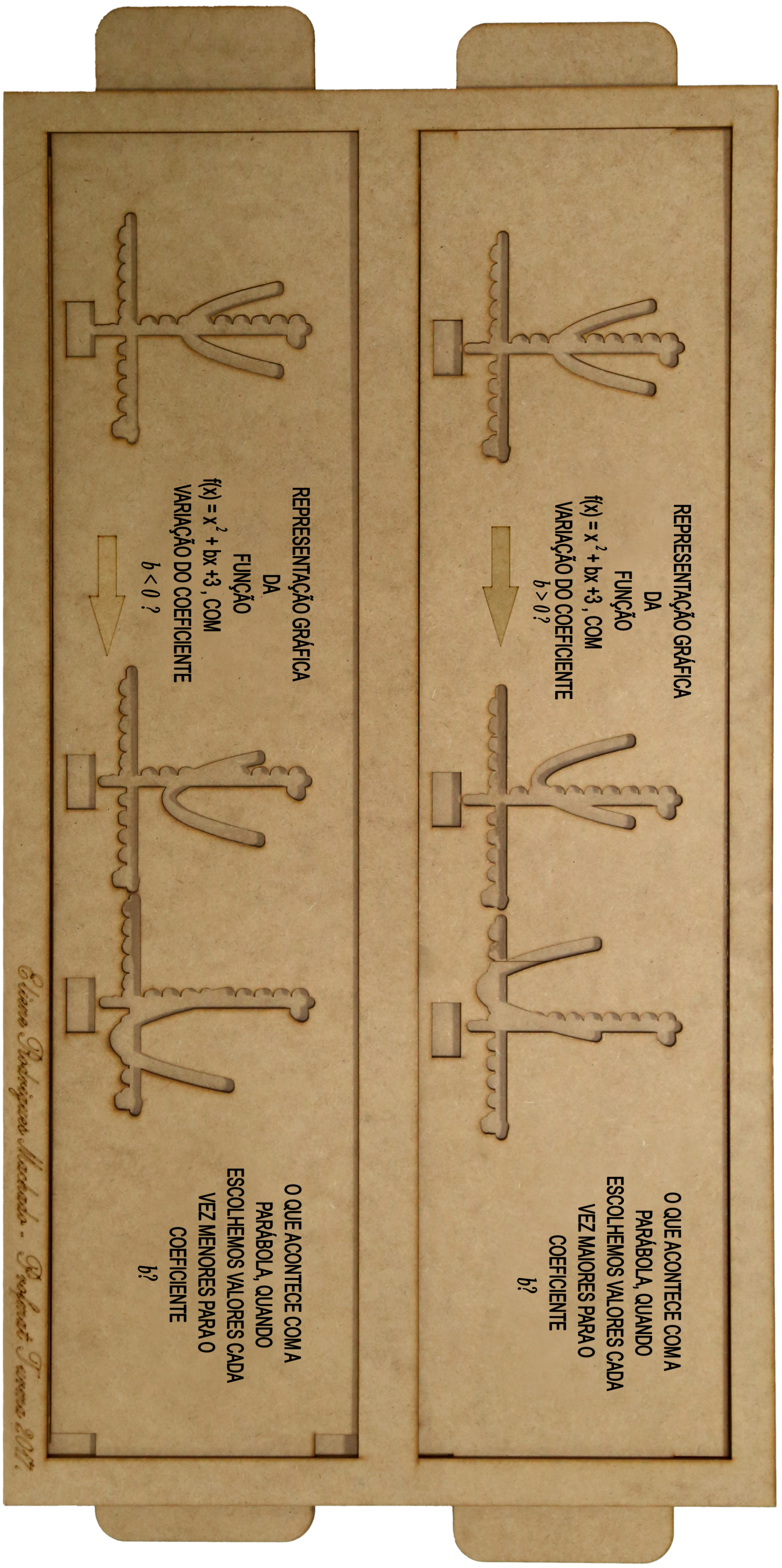
Fonte: Própria autora

Figura 2.10: Plano superior do material manipulável 02



Fonte: Própria autora

Figura 2.11: Arte final do material manipulável 02



Fonte: Própria autora

Material Manipulável 03: Variação do coeficiente c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

- **Detalhamento**

Com este material manipulável, pretende-se estudar o que acontece com a parábola quando variamos o coeficiente c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e seus efeitos na representação gráfica através do movimento de translação vertical.

- **Grau de funcionalidade com o produto**

A construção do material foi semelhante as anteriores, produzido com os mesmos recursos tecnológicos e sendo composto por duas folhas retangulares com dimensões $60cm$ x $48cm$. No primeiro plano, temos cortes de duas parábolas para mostrar a variação do coeficiente c; O segundo plano é composto por várias parábolas que representam graficamente funções quadráticas com variações do coeficiente c.Foram feitos vários testes de simulação para verificar o desempenho do material manipulável e para este utilizamos os seguinte materiaos estilete, cola, papel cartão, folha de ofício, impressora, computador, software Geogebra, pepel adesivo e tesoura.

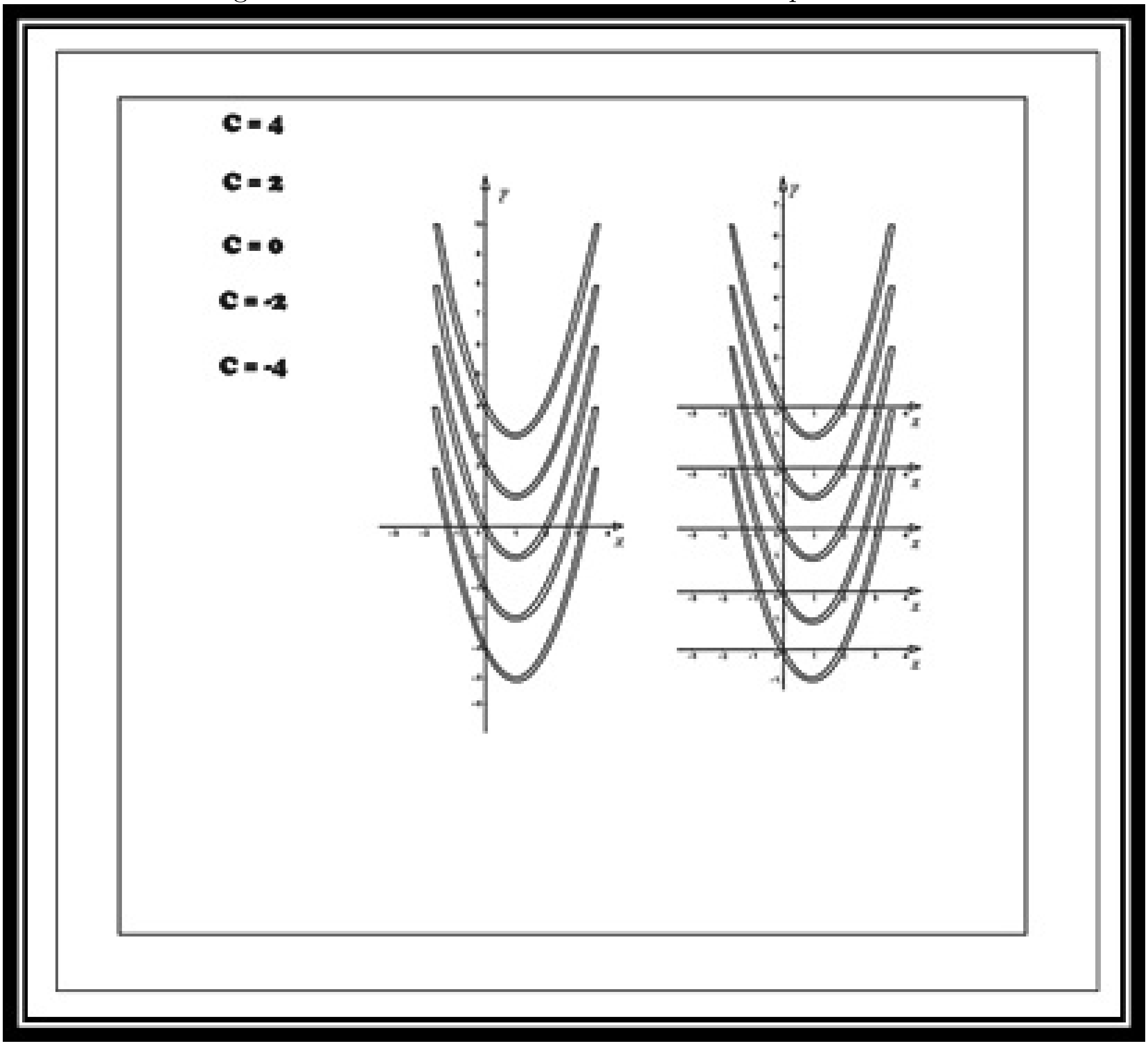
- **Manuseio**

Para manusear o material manipulável $n°03$ é necessário seguir com o apio da proposta de atividade apresentada no capítulo 3.

- **Refinamento do estético do material manipulável**

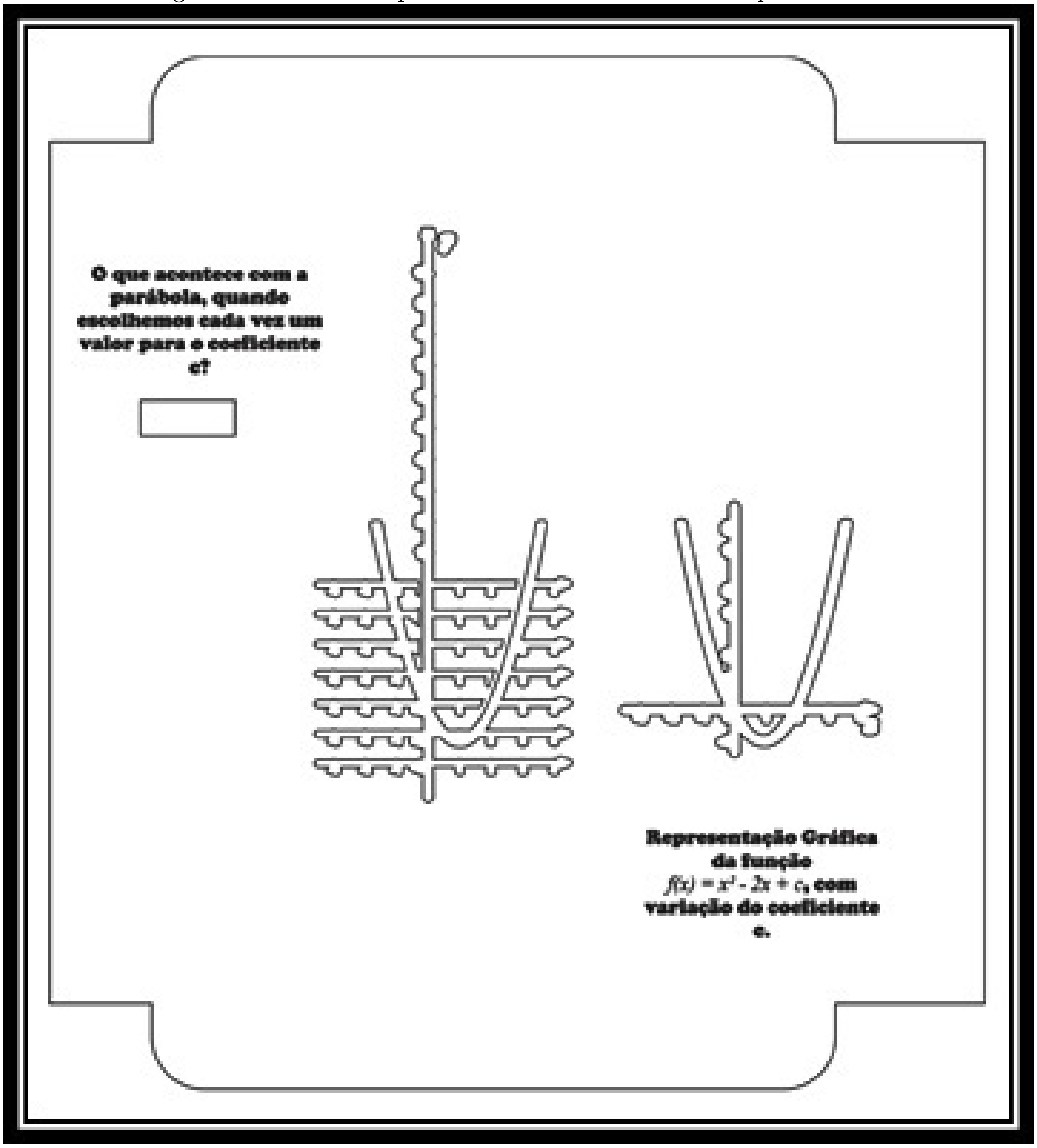
Após de vários testes, produzimos a arte final, conforme mostram as Figuras 2.12, 2.13 e 2.14

Figura 2.12: Plano de fundo do material manipulável 03



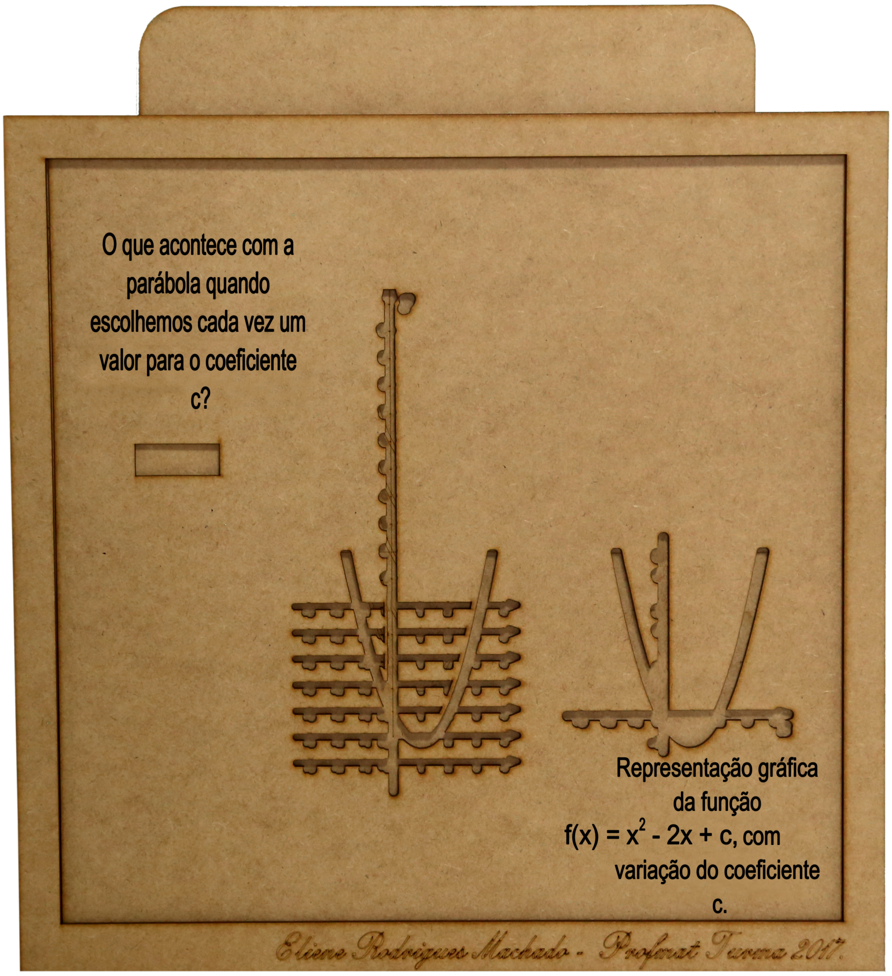
Fonte: Própria autora

Figura 2.13: Plano superior vazado do material manipulável 03



Fonte: Própria autora

Figura 2.14: Arte final do material manipulável 03



Fonte: Própria autora

2.2 A relevância da proposta de atividade como prática metodológica para o ensino de gráfico de função quadrática - 1º ano do ensino médio

A inserção dos materiais manipuláveis dentro do universo das salas de aulas, contudo, não deve ser feita destituída dos planejamentos necessários que garantam o sucesso dessa empreitada. Para Smole e Diniz, (2012, p. 11), por exemplo, "[...] de nada valem materiais didáticos na sala de aula se eles não estiverem atrelados a objetivos bem claros e se seu uso ficar restrito apenas à manipulação ou ao manuseio que o aluno quiser fazer dele".

A prática educativa requer do professor de matemática métodos diferenciados e atrativos para os estudantes aprenderem gráficos de funções quadráticas. Apresentar este conteúdo utilizando material manipulável pode atrair a atenção do aluno com a finalidade de que o mesmo possa utilizar os conhecimentos prévios do conceito ao manipulá-lo e, assim, obter melhores resultados após a aplicação.

Lima (2007, p. 139) sinaliza os três pilares fundamentais para obtenção do êxito do aluno para aprender matemática que são: conceituação, manipulação e aplicação. Esses pilares fundamentarão as atividades no Capítulo 3. Segundo Lima (2007, p. 140-141):

i) "**Conceituação**: corresponde a busca de formulações certas e claras das definições matemáticas sempre tendo uma conexão entre as hipóteses e teses. Saber o conceito é sempre relevante para um bom êxito no resultado das aplicações".

ii) "**Manipulação**: ao manipular os objetos matemáticos, o indivíduo pode colocar em prática suas habilidades e desenvolver suas atitudes mentais automáticas, para refletir sobre estratégias matemáticas rápidas e focando pontos cruciais".

   Quando Lima se refere aos objetos matemáticos ele não está fazendo necessariamente uma alusão ao material manipulável como propomos nesse trabalho. Dessa forma, a partir de suas proposições, desenvolvemos uma alternativa para que a manipulação proposta por Lima , seja feita por meio de uma atividade cujo diferencial é o material manipulável.

iii) "**Aplicação**: O aluno pode utilizar-se da teoria da matemática para obter resultados, conclusões e previsões que vão de problemas simples do cotidiano e outras situações que ultrapassam o conteúdo de matemática e que adentram em outras áreas".

Para melhor compreensão das variações dos coeficientes e dos seus efeitos na parábola, que às vezes são imperceptíveis pelos alunos no momento de construção dos gráficos de funções quadráticas, foi relevante dividirmos o material manipulável em três partes, a fim de melhor analisarmos cada uma das características dos coeficiente da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ individualmente.

Portanto, os discentes terão a oportunidade de desenvolverem suas competências e habilidades que foram adquiridas anteriormente no processo de ensino e aprendizagem sobre o conteúdo de gráfico de funções quadráticas ao utilizarem o material manipulável em cada proposta de atividade.

Capítulo 3

PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo, serão apresentadas três propostas de atividades para o professor desenvolver em sala de aula com os alunos por meio do uso dos materiais manipuláveis para o estudo dos coeficientes de uma função quadrática.

3.1 Comportamento do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 - 2x + 3$ ao variar o coeficiente a.

- **ÁREA DO CONHECIMENTO**: Matemáticas e suas tecnologias
- **DISCIPLINA**: Matemática;
- **OBJETIVO**: Analisar e comparar os efeitos da variação do coeficiente a na construção de gráficos de funções quadráticas;
- **CONTEÚDO**: Variação do coeficiente a;
- **SÉRIE**: 1º Ano do Ensino Médio;
- **TEMPO ESTIMADO**: 1h40min (duas aulas);
- **MATERIAIS NECESSÁRIOS**: Material manipulável nº01, ficha com perguntas, lápis, borracha, régua e papel milimetrado;
- **APRESENTAÇÃO**: O estudo de gráfico de função quadrática é visto pelos alunos como conteúdo desnecessário por não conseguirem fazer a relação da variação do coeficiente a com o comportamento do gráfico. Em virtude dessa lacuna presente na

trajetória de aprendizagem do 1º Ano do ensino médio, utilizaremos uma metodologia diferenciada através do manuseio do material manipulável 01. Convidamos o estudante a colocar em prática as suas competências e habilidades para uma melhor reflexão à respeito do conteúdo abordado. Portanto, a finalidade dessa proposta de atividade é contribuir para o ensino e aprendizagem dos alunos na compreensão da influência do coeficiente a no gráfico de uma função quadrática.

- **DESENVOLVIMENTO**:

1º Momento: Os alunos deverão se divididos em grupo que deverão conter no máximo 4 alunos.

2º Momento: Cada grupo deverá ter em mãos lápis, régua, borracha e folha de papel milimetrado para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Após terminar a tarefa, cada grupo deve descrever a curva descrita pelo gráfico e responder questionamentos feitos pelo professor: 1. O que vocês acham que acontecerá ao trocarmos o sinal do coeficiente a, ou seja, colocar o simétrico de a no lugar do coeficiente a? 2. Agora, pense na situação de aumentarmos ou diminuirmos o valor de a. O que vocês acham o que pode acontecer? E também, o que acontece se fizéssemos a mesma coisa com o simétrico de a? Nesse momento, o professor provoca a discussão para que os alunos possam perceber os efeitos sofridos no gráfico da função em relação ao coeficiente a.

3º Momento: Em seguida, será disponibilizado o material manipulável nº01 e as orientações de como os alunos devem manuseá-lo. A partir daí, deverá responder as atividades solicitadas na ficha.

4º Momento: O professor solicita aos alunos que de posse do material nº01, analisem o gráfico descrito e as consequências quando variamos o coeficiente $a > 0$ até o seu simétrico.

5º Momento: Os alunos serão desafiados para analisarem novamente o coeficiente $a > 0$; mas dessa vez, eles deverão observar o comportamento sofrido pelo gráfico ao variar o valor de a ao acrescentarmos uma constante $t > 0$, sendo $t = 1$ ou $t = 3$.

O professor continua a investigação perguntando: o que acontece com o gráfico da função $f(x) = x^2 – 2x + 3$ quando for acrescentado o valor 1 ao coeficiente a? Em seguida, acrescentamos 3 ao valor de a e pedimos aos alunos que façam uma comparação entre os gráficos e descrevendo o comportamento da função nestas variações.

6º Momento: Os alunos deverão proceder conforme o momento anterior, mas avaliando o caso em que o coeficiente $a < 0$ é acrescido dos valores -1 e, na sequência, -3.

7º Momento: O professor continua questionando os alunos sobre o que acontece com a concavidade da parábola.

8º Momento: O que acontece com o gráfico da função quando o coeficiente $a > 0$ é acrescido de um valor $t < 0$, tal que o resultado seja $a + t < 0$?

9º Momento: Por outro lado, se $a < 0$ e $t > 0$, o que acontece se tivermos $a + t > 0$?

10º Momento: Para finalizar a atividade, o professor deverá sortear duas equipes para que elas possam socializar a avaliação da atividade, comparando a construção de todos os gráficos no papel ao invés de manusearem o material manipulável.

3.2 Comportamento gráfico da Função Quadrática $f(x) = x^2 + bx + 3$ ao variar o coeficiente b.

- **ÁREA DO CONHECIMENTO**: Matemática e suas tecnologias;
- **DISCIPLINA**: Matemática;
- **OBJETIVO**: Analisar e compreender a variação do coeficiente b na construção de gráficos de funções quadráticas;
- **CONTEÚDO**: Variação do coeficiente b da função $f(x) = x^2 + bx + 3$;
- **SÉRIE**: 1º Ano do Ensino Médio;
- **TEMPO ESTIMADO**: 1h40min (2 aulas);
- **MATERIAIS NECESSÁRIOS**: Material manipulável nº02, ficha com perguntas, lápis e borracha;
- **APRESENTAÇÃO**:A maior parte dos estudantes não sabem o papel que o coeficiente b exerce no gráfico da função quadrática. Vamos observar a movimentação do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + 3$, partindo da caso $b = 0$ e $a > 0$ em torno do ponto $(0, 3)$. O vértice da parábola desloca para a parte positiva do eixo $0x$ ou para parte negativa do eixo Ox quando alteramos o valor do coeficiente b. Em seguida, com o material manipulável nº02, vamos explorar a variação do coeficiente b da função $f(x) = x^2 + bx + c$.

  Observação: Antes de aplicarmos essa proposta de atividade, o professor deve explicar, em linhas gerais, o que significa a translação de figuras geométricas.

- **DESENVOLVIMENTO**:

1º Momento: O professor organizará a classe com os mesmos grupos da atividade anterior.

2º Momento: Os alunos deverão utilizar lápis, papel, régua, borracha e folha de papel milimetrado para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 + 3$. Após terminar a tarefa, deverão responder os seguintes questionamentos:

i) Qual o valor do coeficiente b na função quadrática?

ii) Como ficaria o gráfico da função caso o coeficiente b seja acrescido de valores positivos ou negativos?

iii) Será que precisaríamos construir novamente todos os gráficos ao modificarmos somente o valor do coeficiente b?

3º Momento: Neste instante, o professor distribuirá o material manipulável $n^o 02$ para cada grupo e os orientará quanto ao manuseio. Em seguida, o professor deve entregar uma ficha contendo as situações apresentadas abaixo. Com o manuseio do material manipulável, o grupo deverá analisar e responder as atividades propostas.

Com o manuseio do material manipulável analise e responda as atividades propostas.

i) Qual o valor do coeficiente b?

ii) O que acontece com o gráfico da função quadrática em relação ao eixo Ox quando acrescentamos o valor 2 ao coeficiente $b = 0$? Retorne para função original e agora acrescente ao parâmetro $b = 0$ o valor 4. O que você pode concluir? (Essa análise será feita com o material manipulável 02 para $b > 0$).

iv) E se agora você acrescentasse -2, o que acontece? Retorne para a função original e agora acrescente o valor -4. O que você pode observar? (Essa análise será feita com o material manipulável 02 para $b < 0$) . Ao finalizar a tarefa, o professor pedirá aos grupos para relatarem o que observaram na execução da atividade.

v) Agora, com o material posicionado na função $y = x^2 – 2x + 3$, o que acontece com o gráfico caso subtraíssemos 4 unidades do coeficiente b?

vi) Se ao invés de subtrairmos, somarmos o valor 6 ao coeficiente b, o que poderíamos afirmar sobre o gráfico da função quadrática?

4º Momento: Recolhimento do material e análise das estratégias. O professor sorteará aleatoriamente dois grupos que não tenha apresentado para socializarem as suas observações e elencarão dificuldades a serem discutidas.

3.3 Comportamento gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 2x + c$ ao variar o coeficiente c.

- **ÁREA DO CONHECIMENTO:** Matemática e suas tecnologias;
- **DISCIPLINA**: Matemática;
- **OBJETIVO**: Objetivo: Analisar e compreender a variação do coeficiente c na construção de gráficos de funções quadráticas;
- **CONTEÚDO**: Variação do coeficiente c da função $f(x) = x^2 - 2x + c$;
- **SÉRIE**: 1º Ano do Ensino Médio;
- **TEMPO ESTIMADO**: 1h40min (2 aulas);
- **MATERIAIS NECESSÁRIOS**: Material manipulável nº03, ficha com perguntas, lápis e borracha;
- **APRESENTAÇÃO**: O material manipulável nº03 explora a variação do coeficiente c da função quadrática
  $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- **DESENVOLVIMENTO**:

1º Momento: O professor arrumará a sala com os mesmos grupos que foram formados anteriormente.

2º Momento: Os alunos deverão utilizar lápis, papel, régua, borracha e folha de papel milimetrado para construir o gráfico da função $f(x) = x^2 – 2x$. Após terminar a tarefa, deverão responder os seguintes questionamentos:

i) O que acontece com o gráfico da função se variarmos o coeficiente $c = 0$ para $c = 2$?

ii) Será necessário realizar todos os cálculos aritméticos novamente para encontrar o gráfico da nova função?

iii) Qual a relação estabelecida entre o gráfico e o coeficiente c?

3º Momento: Neste instante, o professor distribuirá o material manipulável $n^o 03$ para cada grupo e os orientará como manuseá-lo. Em seguida, entregará uma ficha contendo os seguintes questionamentos:

De posse do material didático nº 03, no qual a função quadrática é dada por $f(x) = x^2 – 2x$ e a sua representação gráfica, analise casa situação e resolva-as. **Questões:**

i) Qual o valor do coeficiente c?

ii) O que acontece com o gráfico da função quadrática em relação ao eixo Oy quando acrescentamos o valor 2 ao coeficiente $c = 0$. Retorne para função original e agora acrescente ao coeficiente $c = 0$ o valor 4. O que você pode concluir?

iv) E se você acrescentasse -2? Retorne para a função original e agora acrescente -4, o que você pode observar? Após o término da atividade, o professor pedirá aos alunos para relatar o ocorrido na experiência.

v) Agora, com o material posicionado na função $y = x^2 – 2x + 2$, o que acontece com o gráfico caso subtraíssemos 6 unidades do coeficiente c?

vi) Se ao invés de subtrairmos, somarmos uma constante 2 ao coeficiente c, o que poderíamos afirmar sobre o gráfico da função quadrática da questão anterior?

4º Momento: Recolhimento do material e análise das estratégias. O professor pedirá dois grupos que não tenha apresentado ainda para socializarem as suas experiências, onde poderão elencar dificuldades para serem discutidas.

Considerações Finais

O ensino de função quadrática é um desafio aos professores de matemática. O estudo do gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ através de um material manipulável favorece a compreensão da variação dos coeficientes de maneira mais visível, permitindo ao professor e também aos alunos uma melhor associação entre a teoria e a prática.

Os modelos didáticos apresentados nesse trabalho para serem utilizados em sala de aula, em papel cartão ou em mdf, podem ser alternativas viáveis para auxiliar professores de matemática no ensino de gráficos de funções quadráticas. É possível mostrar aos alunos que as mudanças nos coeficientes têm relação direta na construção dos gráficos, refletindo em translações e contração/dilatação da parábola, obtendo assim uma nova função quadrática.

Referências Bibliográficas

[1] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[2] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais. *Manual de Redação Matemática: Com um dicionário etimológico de palavras usadas na Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[3] GONÇALVES, Fernanda Anaia; GOMES, Lígia Baptista; VIDIGAL, Sônia Maria Pereira. *Materiais manipulativos para o ensino de figuras planas*. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez(Org.). Coleção Mathemoteca. Edições Mathema,2012.

[4] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Ministério de Educação*. Disponível em:http://www.enem.inep.gov.br/. Acesso em agosto de 2019.

[5] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[6] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[7] LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[8] MACKEDANZ, Luiz Fernando; RODRIGUES, Marco Aurélio Torres. *Produção de espelhos parabólicos e construção do conceito de função polinomial de 2º grau* . Revista Brasileira de Ensino de Física [online]. 2018, vol.40, n.1, e1502. Epub July 20, 2017. ISSN 1806-1117. Disponível em:http://www.rpm.org.br/cdrpm/41/2.htm Acesso em: 20 de maio de 2019.

[9] MELO, Gercilio da Rocha; REHFELDT, Márcia Jussara Hepp. *Explorando funções afins e quadráticas por meio do software KmPlot com alunos do Ensino Médio*. REMAT, Caxias do Sul, RS, v. 2, n. 1, p. 18-28, 2016.Disponível em:

https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1248/0 . Acesso em 23 de maio de 2019.

[10] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigo da Rocha. *Coleção Elementos da Matemática: Conjuntos e Funções Aritmética.* 3. ed. Fortaleza: Editora VesteSeller, 2010.

[11] RÊGO, Rômulo Marinho; RÊGO, Rogéria Gaudencio. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino da matemática.* In: LORENZATO, Sérgio. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2012.

[12] SANCHES, Denise Godoi Ribeiro; SANTOS, Márcia Boiko dos ; GERETTI, Laís Viel. *O ensino de funções com o apoio de materiais manipuláveis.* XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

[13] SOUZA, Aguinaldo Robinson de, PAULOVICH, Leonardo, NASCIMENTO, Mauri Cunha do. *Vértices de famílias deParábolas.* Revista do Professor de Matemática, Nº 41, p. 7-11, 3º quadrimestre de 1999.Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/41/2.htm. Acesso em 20 de maio de 2019.

[14] SOUZA, Aguinaldo Robinson de. SILVA, Gilmara Aparecida da.*Desenvolvimento e análise de uma metodologia para o enino da função quadrática utilizando os softwares "parábola"e "oficina de funções".* Revista Zetetike,vol. 14. Nº 25, p. 1-26, jan-jun.

[15] WINTERLE, Paulo. *Vetores e Geometria Analítica.* São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.