Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Cleber Luis Alves Costa Júnior

RAÍZES DE NÚMEROS COMPLEXOS:

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Feira de Santana - Bahia

2019, V-1

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Cleber Luis Alves Costa Júnior

RAÍZES DE NÚMEROS COMPLEXOS:

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática PROFMAT-UEFS do Instituto de Matematica e Sociedade Brasileira de Matematica como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida

Feira de Santana - Bahia

2019, V-1

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

C871r Costa Júnior, Cleber Luis Alves
Raízes de números complexos: uma sequência didática / Cleber Luis Alves Costa Júnior. - 2019.
84 f.: il.

Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2019.

1. Números complexos. 2. Matemática - Estudo e ensino. I. Almeida, Kisnney Emiliano de, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 512.9

Clemilda Santana dos Reis de Jesus – Bibliotecária CRB5/1641

Agradecimentos

A realização deste trabalho jamais seria possível sem o consentimento de um ser superior, obrigado Deus por tudo.

Aos meus amores:

Deli e Kleber, pais, parceiros em todas as minhas angústias e sucessos;

William, filho amado, razão pela qual busquei melhorias, principalmente nos estudos; "Está na hora! Hora de buscar o seu espaço no ciclo da vida";

Cláudia e Enzo, irmã e sobrinho, juntos para sempre;

Luciana, companheira, por estar ao meu lado, acreditar e realizar projetos que se tornaram nossos.

Aos meus avós, tios, primos e amigos, por todas as contribuições.

Aos amigos-irmãos, Adalberto Santos e Marcos Figueredo, pela paciência, disponibilidade e colaboração na construção desse trabalho.

Ao meu orientador, Professor Dr. Kisnney Emiliano de Almeida, por todo esforço dispensado aos nossos encontros e direcionamento para a realização desse trabalho.

Ao corpo docente do PROFMAT - UEFS.

Aos colegas-amigos-irmãos da turma do PROFMAT 2017, por todos o momentos que estivemos juntos e, certamente, estaremos.

Finalmente, aos meus alunos atuais, aos que passaram e aos que virão.

Infinitamente grato a cada um.

Diante de toda e qualquer dificuldade, Deus sempre mostrará o caminho para a solução, basta ter olhos para ver e ouvidos para ouvir.

Resumo

Este trabalho tem como propósito apresentar uma sequência didática com uma abordagem de investigação matemática onde o professor terá diversas atividades propostas em um nível gradativo de aprofundamento para mostrar a relação geométrica entre as raízes enésimas de um número complexo e os vértices de um polígono regular. Buscando tornar essa investigação mais palatável à compreensão dos estudantes, foi desenvolvida uma programação no software MATLAB, onde os estudantes manipularão o aplicativo para o cálculo das raízes e visualização da figura gerada de forma dinâmica e eficiente.

Palavras-chave: Números Complexos. Ensino de Matemática. Sequência Didática.

Abstract

This dissertation aims to present a didactic sequence with a mathematical research approach, where the teacher will have several activities at a gradual level of deepening to show a geometric relationship between the nth roots of a complex number and the vertices of a regular polygon. In order to make this investigation more palatable for students' comprehension, a programming has been developed in the MATLAB software, where students manipulate or use the application to calculate the roots and responses of the dynamically and efficiently generated picture.

Keywords: Complex Numbers. Mathematics Teaching. Following teaching.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação de um ponto no plano complexo (Argand-Gauss) 18
Figura 2 – Representação do módulo do complexo 18
Figura 3 – Produto $z_1.z_2$ 22
Figura 4 – Raízes enésimas de um número complexo 26
Figura 5 – Interpretação geométrica das raízes quadradas de $z = 5i$ 37
Figura 6 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 5i$ 39
Figura 7 – Interpretação geométrica das raízes quadradas de $z = 5$ 41
Figura 8 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 5$ 43
Figura 9 – Interpretação geométrica das raízes quadradas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 44
Figura 10 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 46
Figura 11 – Rotação A A' 46
Figura 12 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 5i$ 49
Figura 13 – Interpretação geométrica das raízes quintas de $z = 5i$ 51
Figura 14 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 5$ 54
Figura 15 – Interpretação geométrica das raízes quintas de $z = 5$ 56
Figura 16 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 58
Figura 17 – Interpretação geométrica das raízes quintas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 60
Figura 18 – Script projetado em execução 1 61
Figura 19 – Script projetado em execução 2 62
Figura 20 – Script projetado em execução 3 62
Figura 21 – Script projetado em execução 4 63
Figura 22 – Script projetado - raízes quadradas de $z = 5i$ 63
Figura 23 – Script projetado - raízes cúbicas de $z = 5i$ 64
Figura 24 – Script projetado - raízes quartas de $z = 5i$ 64

Figura 25 – Script projetado - raízes quintas de $z = 5i$ 65
Figura 26 – Script projetado - raízes quadradas de $z = 5$ 66
Figura 27 – Script projetado - raízes cúbicas de $z = 5$ 66
Figura 28 – Script projetado - raízes quartas de $z = 5$ 67
Figura 29 – Script projetado - raízes quintas de $z = 5$ 67
Figura 30 – Script projetado - raízes quadradas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 68
Figura 31 – Script projetado - raízes cúbicas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 68
Figura 32 – Script projetado - raízes quartas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 69
Figura 33 – Script projetado - raízes quintas de $z = 1 + \sqrt{3}i$ 69
Figura 34 – Script projetado - 15 raízes de $z = 5i$ 70
Figura 35 – Script projetado - 18 raízes de $z = 5i$ 70
Figura 36 – Script projetado - 20 raízes de $z = 5i$ 71
Figura 37 – Script projetado - 50 raízes de $z = 5i$ 71
Figura 38 – Script projetado - raízes quartas de $z = 81$ 74
Figura 39 – Script projetado - raízes sextas de $z = 2i$ 76

Sumário

1 INTRODUÇÃO **12**

1.1 Motivação **13**

1.2 Objetivos **13**

1.2.1 Geral 13

1.2.2 Específicos 13

1.3 Materiais e Métodos **14**

2 NÚMEROS COMPLEXOS **15**

2.1 A Representação Algébrica dos Números Complexos **15**

2.2 A Representação Geométrica dos Números Complexos **17**

2.3 Módulo de um Número Complexo **18**

2.4 Argumento de um Número Complexo **19**

2.5 Conjugado de um Número Complexo **19**

2.6 Potências de i **19**

2.7 Representação Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos **20**

2.7.1 As Coordenadas Polares no Plano 20

2.8 Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica **21**

2.8.1 Multiplicação de Números Complexos 21

2.8.1.1 Interpretação Geométrica da Multiplicação de dois Números Complexos 21

2.8.2 Divisão de Números Complexos 22

2.8.3 Potenciação de Números Complexos 23

2.8.4 Radiciação de Números Complexos 23
2.8.4.1 Raízes da Unidade 27

3 REFERENCIAL TEÓRICO 28
3.1 Sequência Didática 28
3.2 Investigação Matemática 29

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA 31
4.1 A Proposta da Sequência Didática 31
4.2 As Etapas da Sequência Didática 32
4.2.1 1ª ETAPA 32
4.2.1.1 Exemplo 1 33
4.2.1.2 Exemplo 2 33
4.2.1.3 Exemplo 3 34
4.2.2 2ª ETAPA 35
4.2.2.1 Exemplo 1 36
4.2.2.2 Exemplo 2 39
4.2.2.3 Exemplo 3 42
4.2.3 3ª ETAPA 47
4.2.3.1 Exemplo 1 48
4.2.3.2 Exemplo 2 51
4.2.3.3 Exemplo 3 56
4.2.4 4ª ETAPA 60
4.2.4.1 Exemplo 1 61
4.2.4.2 Exemplo 2 65
4.2.4.3 Exemplo 3 65
4.2.5 5ª ETAPA 67
4.2.5.1 Exemplo de uma situação que poderá ocorrer: 69

4.2.6 6ª ETAPA 72
4.2.6.1 Exemplo 1 72
4.2.6.2 Exemplo 2 75

5 CONCLUSÃO 78

REFERÊNCIAS 79

ANEXOS 80

1 Introdução

Os Números Complexos representam um grande avanço na ciência e tecnologia. Eles circulam em torno do número i que é chamado de unidade imaginária e tem por propriedade básica $i^2 = -1$. Por si só, esta unidade já configura um novo universo ao estudante, diferente de tudo o que se apresentou até então em sua trajetória escolar. Desse modo, estudar caminhos e abordagens que construam de forma gradual a aprendizagem deste novo paradigma é um dos desafios que se impõem ao professor.

Frequentemente abordados nos anos finais do ensino médio, quando o estudante já deve ter clareza dos números reais e suas operações, bem como da representação geométrica no plano cartesiano, têm diversas aplicações na eletrônica, estudo de calor, transmissão de dados, entre outras.

Dentre as diversas abordagens que se tem para esse conjunto, pode-se destacar o aspecto geométrico associado à radiciação dos números complexos. Este trabalho destina-se a apresentar uma proposta de ensino através de uma sequência didática com uma abordagem de investigação matemática sobre a relação geométrica das raízes enésimas de números complexos e os vértices de polígonos regulares, onde os estudantes terão como meta desenvolver exercícios, numa ordem pré determinada, com o propósito de, em cada etapa do processo, evoluir com as observações dos resultados. As primeiras etapas serão feitas pelos estudantes de forma tradicional, ou seja, utilizarão para a resolução o processo manual supondo os conhecimentos prévios adquiridos. Já nas últimas etapas, deverão realizar os cálculos das primeiras etapas, porém, desta vez, usando uma programação do software MATLAB, desenvolvida para a observação da relação acima citada com praticidade, dinamismo e, principalmente, visualização dos polígonos, tornando possível o aumento considerável no número de raízes a ser calculada e representada geometricamente, o que feito manualmente pelo estudante seria um processo muito complicado.

1.1 Motivação

Durante o ensino médio, os estudos de Números Complexos se limitam, na maioria das vezes, ao cálculo das operações fundamentais, da potenciação e radiciação, do valor do módulo, do valor do argumento, transformação da forma algébrica para trigonométrica e vice-versa, mostrando geometricamente apenas a localização do número no plano de Argand/Gauss, dando pouca ênfase à interpretação geométrica desses números. A grande motivação desse trabalho é mostrar ao estudante, dentre as várias outras abordagens que poderiam ser feitas, que as raízes enésimas de números complexos, a partir da raiz cúbica, formam os vértices de um polígono regular. Mas, tanto os cálculos para determinar as raízes, quanto a representação dessas no plano, requerem tempo e habilidade. Em decorrência desse fato, percebeu-se a necessidade de motivar essa aprendizagem de uma forma mais dinâmica e menos trabalhosa. Para isso foi desenvolvida uma programação no software MATLAB, onde o cálculo das raízes e a sua representação geométrica são feitas de forma muito simples e eficaz.

1.2 Objetivos

Os objetivos desse trabalho são:

1.2.1 Geral

Desenvolver uma proposta didática para uso em sala de aula sobre a relação entre as raízes de um número complexo e os vértices de um polígono regular com a utilização do software MATLAB.

1.2.2 Específicos

1) Apresentar o plano complexo e suas características;

2) Apresentar um modelo computacional que represente geometricamente as raízes complexas;

3) Estudar a interpretação geométrica da operação de radiciação de números complexos;

4) Construir a sequência didática unindo o software e o contexto matemático.

1.3 Materiais e Métodos

No desenvolvimento desse trabalho, fez-se necessário o uso do software MATLAB com a finalidade de proporcionar aos estudantes uma investigação matemática dinâmica da relação geométrica das raízes de números complexos e os vértices de polígonos regulares.

O MATLAB é um software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. O MATLAB integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente fácil de usar onde problemas e soluções são expressos somente como eles são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

2 Números Complexos

Este capítulo versará sobre os números complexos, mostrando a forma desses números, abordando conceitos, propriedades e transformações, com base, principalmente, nas obras de (HEFEZ; VILLELA, 2012), (NETO, 2012), (IEZZI et al., 2004), (CARMO et al., 1992), (LIMA et al., 2006) que serão essenciais para a compreensão de como as raízes enésimas (maiores que 2) dos números complexos se relacionam, geometricamente, com os vértices de um polígono regular.

2.1 A Representação Algébrica dos Números Complexos

Número complexo é todo número da forma $z = a + bi$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária.

O conjunto dos números complexos é indicado por $\mathbb{C}$, ou seja, $\mathbb{C} = \{a+bi, \text{com } a, b \in \mathbb{R}\}$ que é dita forma algébrica do complexo. Nesta representação, a é chamado de **parte real** de z e b é chamado de **parte imaginária** de z, e são representados, respectivamente, por $Re(z)$ e $Im(z)$.

Um número da forma $z = a$, ou seja $z = (a, 0) = a + 0i$ é chamado de **real puro**.

Um número da forma $z = bi$, ou seja $z = (0, b) = 0 + bi$ é chamado de **imaginário puro**.

Escrevendo um número complexo da forma $a + 0i$, com a real, ou simplesmente a, vê-se que o ***corpo***[1] dos números reais $\mathbb{R}$ se realiza como subconjunto de $\mathbb{C}$ e que as operações em $\mathbb{C}$, quando restritas a esse conjunto, apenas reproduzem a adição e multiplicação em $\mathbb{R}$. Assim, tem-se que:

[1] Um conjunto K com as operações de adição e multiplicação tais que estas operações possuem as propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro, distributividade da multiplicação em relação à adição , elemento simétrico e todo elemento não nulo de K possui inverso é chamado de corpo.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad i^2 = -1\}, \quad \text{onde } i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$$

As operações de adição, subtração e multiplicação de números complexos se dão de forma intuitiva, usando os conhecimentos prévios das operações em $\mathbb{R}$.

Considere os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.

1) $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

2) $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

3) $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Os números complexos $0 = 0 + 0i$ e $1 = 1 + 0i$, chamados de zero e um, respectivamente, destacam-se, pois têm as seguintes propriedades:

$$z \cdot 0 = 0 \quad \text{e} \quad z \cdot 1 = z, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

Para todo número complexo $z = a + bi$, existe $z' \in \mathbb{C}$, tal que $z + z' = 0$, ou seja:

$$z' = (-a) + (-b)i = -a - bi$$

chamado de *simétrico* de z.

Para quaisquer z, z' e $z'' \in \mathbb{C}$, tem-se as propriedades:

Comutativa: $z + z' = z' + z, \quad z \cdot z' = z' \cdot z,$

Associativa: $z + (z' + z'') = (z + z') + z'', \quad z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$

Distributividade da multiplicação em relação à adição: $z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z''$

Existe um inverso multiplicativo do número complexo não nulo z, denotado por z^{-1} ou por $\frac{1}{z}$ é dado por:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \qquad (2.1)$$

Assim, conclui-se que $\mathbb{C}$ é um ***corpo*** que contém o corpo dos números reais $\mathbb{R}$.

A partir da existência do elemento inverso, define-se a divisão entre números complexos.

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, com $z_2 \neq 0$, é o mesmo que $z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ que é dado por:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = (a + bi)\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}i\right) \qquad (2.2)$$

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}i$$

2.2 A Representação Geométrica dos Números Complexos

O número complexo $z = a + bi$ é formado por par ordenado de números reais (a, b). Assim sendo, existe representação de z no plano por um ponto $P(a, b)$. Esse ponto $P(a, b)$ pode ser associado a um único número complexo $z = a + bi$, onde o ponto P é dito imagem de z e o plano de representação desses números complexos é dito **plano complexo** ou **plano de Argand-Gauss**. Neste plano o eixo horizontal é chamado de **eixo real** (Re) e o eixo vertical é o **eixo imaginário** (Im). O ângulo formado pelo eixo real e o módulo do número complexo é chamado de **argumento** do número complexo, não nulo, medido no sentido anti-horário.

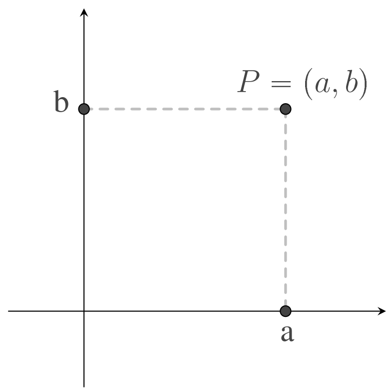


Figura 1 – Representação de um ponto no plano complexo (Argand-Gauss)

Proprio Autor

2.3 Módulo de um Número Complexo

O módulo de um número complexo z, denotado por $|z|$ é a distância da origem do plano Argand-Gauss à imagem desse número $z = (a, b)$

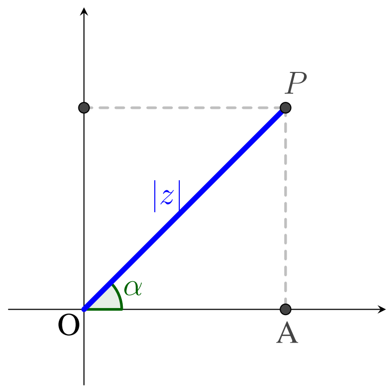


Figura 2 – Representação do módulo do complexo

Proprio Autor

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AOP, tem-se:

$$z^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

2.4 Argumento de um Número Complexo

Dado um número complexo $z = a + bi$, não nulo, é denominado argumento deste número o ângulo α tal que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\mid z \mid} \quad e \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\mid z \mid}$$

Observe que fixado o número complexo $z \neq 0$, ficam fixados também $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$. Porém o ângulo α pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Desse modo, o número complexo $z \neq 0$ tem argumento:

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

em que θ_0 é dito argumento principal de z, sendo $\cos\theta_0 = \dfrac{a}{\mid z \mid}$, $\operatorname{sen}\theta_0 = \dfrac{b}{\mid z \mid}$ e $0 \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi$.

2.5 Conjugado de um Número Complexo

O conjugado de um número complexo é dado conservando-se a parte real e invertendo-se o sinal da parte imaginária. Dado o número complexo $z = a + bi$ o conjugado é denotado por $\bar{z} = a - bi$.

2.6 Potências de i

A unidade imaginária do número complexo é o que o caracteriza e, é indicada por i. Por construção sabe-se que $i^2 = -1$.

Desenvolvendo-se as potências de expoentes naturais de i, tem-se que os resultados das potência i^n se repetem de 4 em 4, assim $n = 4q + r$ ou seja, $i^n = i^{4q+r} = i^r$. De fato,

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

Conclui-se que:

$$
\begin{aligned}
i^{4n} &= 1 \\
i^{4n+1} &= i \\
i^{4n+2} &= -1 \\
i^{4n+3} &= -i
\end{aligned}
$$

Assim, $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.7 Representação Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos

2.7.1 As Coordenadas Polares no Plano

Com base nas informações da figura 2, por definição:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|} \quad \text{com} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi \tag{2.3}$$

Dessas igualdades, obtém-se:

$$a = \mid z \mid \cos\alpha \quad \text{e} \quad b = \mid z \mid \operatorname{sen}\alpha$$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, ocorre:

$$z = a + bi = \mid z \mid \cos(\alpha) + \mid z \mid i \operatorname{sen}(\alpha) = \mid z \mid (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

ou seja,

$$z = \mid z \mid (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

esta última é **dita forma polar ou trigonométrica** do número complexo.

2.8 Operações com Números Complexos na Forma Trigonométrica

Nesta seção serão apresentadas as operações de multiplicação, divisão, potenciação com expoentes inteiros e radiciação dos números complexos na forma trigonométrica ou polar.

2.8.1 Multiplicação de Números Complexos

Dados os números complexos $z_1 = \mid z_1 \mid (\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1)$ e $z_2 = \mid z_2 \mid (\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$, o produto z_1z_2 é dado por:

$$z_1z_2 = \mid z_1 \mid\mid z_2 \mid (\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$$

$$z_1z_2 = \mid z_1 \mid\mid z_2 \mid [(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2) + i(\text{sen}\,\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2)]$$

Portanto,

$$z_1z_2 = \mid z_1 \mid\mid z_2 \mid [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\,\text{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)] \tag{2.4}$$

Conclui-se que o produto de dois números complexos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores.

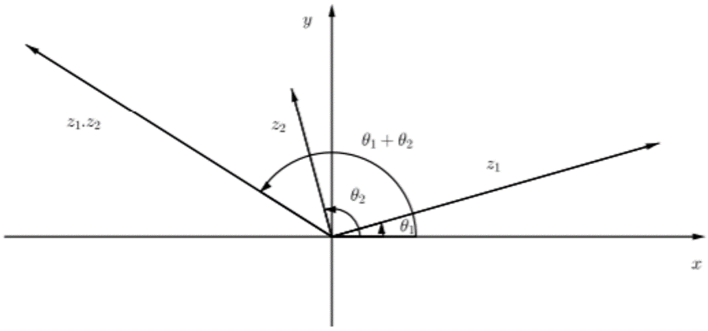
O produto de números complexos pode ser generalizado para n números complexos $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n$ por:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = \mid z_1 \mid \cdot \mid z_2 \mid \cdots \mid z_n \mid [\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) + i\,\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)]$$

2.8.1.1 Interpretação Geométrica da Multiplicação de dois Números Complexos

Da igualdade 2.4, tem-se:

Figura 3 – Produto $z_1.z_2$



Proprio Autor

Ilustrando que o produto de dois números complexos quaisquer tem módulo $|z_1 z_2|$ e argumento $\theta_1 + \theta_2$.

2.8.2 Divisão de Números Complexos

A partir do que foi visto na multiplicação de números complexos, conclui-se que a divisão é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)}{|z_2|(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos(-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(-\theta_2)) \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2))
\end{aligned}$$

Conclui-se que o quociente entre dois números complexos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao quociente dos módulos e o argumento é igual à diferença dos argumentos z_1 e z_2.

2.8.3 Potenciação de Números Complexos

A potenciação de números complexos, na forma trigonométrica é um caso particular do produto de n números complexos, onde $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n$.

Como o produto de n números complexos é dado por

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = |z_1| \cdot |z_1| \cdots |z_n| \left[\cos\left(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n\right) + i \operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n\right)\right] \tag{2.5}$$

sendo $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$, tem-se:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{\text{n fatores}}$$

Logo, conforme 2.5

$$z^n = \mid z \mid^n \left[\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)\right]$$

Essa última é conhecida como a **primeira fórmula de De Moivre** ou **primeira lei de De Moivre**. É uma homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre (1667 - 1754).

2.8.4 Radiciação de Números Complexos

Dado um número complexo $z = \mid z \mid (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ e um número natural $n \geqslant 2$, diz-se que $w \in C$ é uma raiz enésima de z se $w^n = z$.

Assim, se $z = 0$, existe uma única solução para a equação $w^n = z$, que é $w = 0$. Logo, o número zero possui uma única raiz enésima que é o próprio zero. Considere, então, $z \neq 0$, ou seja, $w \neq 0$ é um número complexo não nulo.

Calcular a raiz enésima de um número complexo na forma trigonométrica é o mesmo que determinar o número complexo w, de modo que $w^n = \mid z \mid (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$.

Escrevendo $w = \mid w \mid (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, tem-se:

$$w^n = z$$

$$[| w | (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = | z | (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

Da potenciação (1ª fórmula De Moivre), tem-se:

$$| w |^n [(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] = | z | (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

Números complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes. Logo, na igualdade acima pode-se escrever:

$$| w |^n = | z | \quad \Rightarrow \quad | w | = \sqrt[n]{| z |}$$

$$\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad n\theta = \alpha + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Conclui-se que:

$$w = \sqrt[n]{| z |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

em que $\sqrt[n]{| z |} \in \mathbb{R}_+$ e $k \in \mathbb{Z}$

Esta igualdade é conhecida como a **segunda fórmula de De Moivre** ou **segunda lei de De Moivre**.

Pode-se determinar os valores de k para os quais resultam valores de w compreendidos entre 0 e 2π:

$$
\begin{aligned}
k = 0 \quad &\Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha}{n} \\
k = 1 \quad &\Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \\
k = 2 \quad &\Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot 2 \\
&\vdots \\
k = n - 1 \quad &\Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)
\end{aligned}
$$

De fato,

Seja $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, logo,

$$0 \leqslant k \leqslant n - 1$$

$$-\frac{\alpha}{2\pi} \leqslant k < n - \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$-\alpha \leqslant 2k\pi < 2n\pi - \alpha$$

$$0 \leqslant \alpha + 2k\pi < 2n\pi$$

$$0 \leqslant \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} < 2\pi$$

Os n valores de θ não são congruentes por estarem todos no intervalo $[0, 2\pi[$, pois $n \geqslant 2$. Portanto, dão origem a n valores distintos para θ.

Considerando agora o valor de θ obtido para $k = n$:

$$k = n \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}.n = \frac{\alpha}{n} + 2\pi = \frac{\alpha}{n}$$

Este valor de θ é dispensável por ser congruente ao valor obtido com $k = 0$.

De modo geral, dado qualquer $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant n$ pelo algoritmo da divisão de Euclides, existem q e r tais que:

$$k = nq + r, \quad \text{com } q, r \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 0 \leqslant r < n$$

Daí, tem-se

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2(nq+r)\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{2r\pi}{n} + 2q\pi$$

ou seja, o valor de θ correspondente a k é o mesmo valor de θ correspondente a r. Portanto, se w for raiz enésima de z, existem n valores para w, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

A conclusão é que todo número complexo z não nulo admite n raízes enésimas distintas, sendo que todas têm o mesmo módulo $\left(\sqrt[n]{\mid z \mid}\right)$, isto é, são representadas por n pontos sobre uma circunferência, e os argumentos principais de w estão igualmente espaçados ao longo dessa circunferência, formando uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\dfrac{\alpha}{n}$ e razão $\dfrac{2\pi}{n}$.

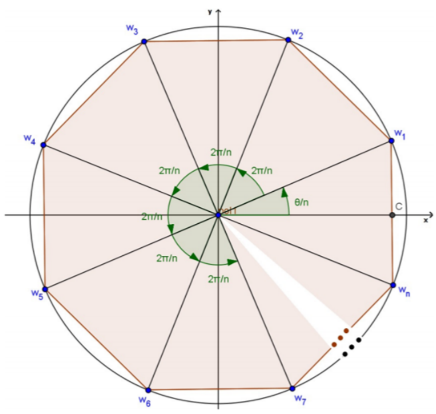
Sendo assim, geometricamente, os afixos das n raízes enésimas de z dividem a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r = \sqrt[n]{\mid z \mid}$ em n partes congruentes, isto é:

se $n = 2$, tem-se dois pontos diametralmente opostos;

se $n \geqslant 3$, tem-se os vértices de um polígono regular inscrito na circunferência citada.

Fato que se observa na figura. 4

Figura 4 – Raízes enésimas de um número complexo



Proprio Autor

2.8.4.1 Raízes da Unidade

As raízes complexas enésimas de 1 são chamadas de raízes enésimas da unidade. O que é equivalente a $z^n = 1$.

Desse modo, é possível afirmar que:

A única raiz 1-ésima da unidade é 1.

Quando $n \geqslant 2$, tem-se que:

$$\theta = arg(1) = 0 \quad \text{e} \quad \theta_k = \frac{2k\pi}{n}$$

e as raízes complexas enésimas da unidades são os pontos

$$z^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{e} \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$$

que dividem a circunferência em n partes iguais, sendo $z_0 = 1$. Portanto, as raízes enésimas da unidades são os vértices de um polígono regular de n lados inscritos na circunferência de centro na origem e raio 1 em $\mathbb{C}$, tendo como um dos vértices no ponto 1.

Denotando $\xi = z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, tem-se que

$$z^k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \xi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1.$$

Portanto, as raízes complexas da unidade, denotadas por $U_n(\mathbb{C})$, são obtidas como potências de ξ,

$$U_n(\mathbb{C}) = \{1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^{n-1}\}, \quad \text{com } \xi^n = 1$$

3 Referencial Teórico

3.1 Sequência Didática

Uma sequência didática é o resultado de métodos e técnicas de ensino elaboradas e planejadas para o desenvolvimento de conteúdos de forma mais abrangente possível, seguindo atividades encadeadas e dispostas de acordo com os objetivos que o professor deseja alcançar e as necessidades dos estudantes, permitindo que o professor-mediador realize atividades de ensino e avaliação, de forma sistemática às atividades elaboradas e desenvolvidas, mudando ou propondo mudanças com o objetivo de potencializar a aprendizagem durante todo o processo a partir das necessidades emergentes. O desenvolvimento da sequência didática depende dos resultados obtidos em cada etapa do processo, contudo a organização das atividades potencializadoras, dentro de um período pré estabelecido, deve ter como objetivo principal o de proporcionar aos estudantes um ambiente de aprendizagem processual favorável. Utilizando-se de uma proposta de sequência didática, tem-se como objetivo identificar uma maneira de ampliar, gradativamente, o conhecimento do conteúdo relativo à reflexão e mediação, na expectativa de desenvolver o conhecimento compartilhado, de forma coletiva e colaborativa. Quanto ao conhecimento pedagógico do conteúdo, (SHULMAN, 1986) diz: "está ligado às problematizações, interpretações e transformações dos professores em realizar analogias, representações, exemplificações e explicações para tornar o conteúdo mais compreensível aos alunos".

As atividades são variadas em suas estratégias, como: leituras, aula dialogada, simulações computacionais, experimentos, entre outras. Segundo (ZABALA, 2015), sequências didáticas são: "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". (NEMIROVSKY, 2002) sobre sequência didática diz: "é o trabalho em sala de aula organizado por conjunto de situações didáticas estruturadas e vinculadas entre si por sua coerência interna e sentido próprio, realizada em momentos sucessivos".

Assim, pensou-se numa sequência didática para abordar o tema desse trabalho com uma perspectiva de investigação matemática.

3.2 Investigação Matemática

A investigação matemática no ambiente da resolução de problemas ocorre quando são propostas situações problemas, de cunho puramente matemático, o que não significa que precisam ser de alta complexidade, mas que gere para os estudantes possibilidade de vários caminhos e que proporcionem diversas respostas, todas com coerências matemáticas, dentro do contexto escolhido pelos mesmos. Na investigação matemática, o estudante não sabe, necessariamente, onde quer chegar, ela enfatiza o caminho pelo qual se quer percorrer, criando no estudante a responsabilidade de descobrir e justificar suas descobertas, sendo assim os estudantes não mais ficam numa posição de escuta e de meros receptores de informação, mas sim, constroem seus conhecimentos através da investigação, o que abrange muito mais do que descobrir coisas, isto é, faz com que os estudantes saibam lidar com suas dúvidas e incertezas, seus erros e acertos, preconizando o protagonismo dos mesmos. Para (MARTINS et al., 2017), "na investigação matemática, o aluno é chamado a agir como um matemático, não apenas porque é solicitado a propor questões, mas, principalmente, porque formula conjecturas a respeito do que está investigando". Por outro lado, o professor deixa de ser o detentor do saber e transmissor de conteúdos e conceitos, sem relevância no contexto e realidade dos alunos, e passa a ser um mediador do desenvolvimento dos processos de pesquisa, para que a turma possa trabalhar com as indagações dos problema proposto, postura esta vivenciada nas diversas perspectivas metodológicas, que engloba o ambiente de aprendizagem baseado em Resolução de Problemas. Ou seja, o professor não mais será o protagonista do processo de ensino e aprendizagem, mas sim, a figura que vai "garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente", segundo (PONTE et al., 2003).

Com as informações acima citadas sobre investigação matemática, dentro de uma sequência didática, será apresentada no capítulo seguinte uma sequência didática aos estudantes, com o propósito de favorecer a compreensão do tema proposto nesse trabalho.

4 Sequência Didática

Neste capítulo será apresentada uma sequência didática com o propósito de ajudar a compreensão do estudante sobre como se relacionam, geometricamente, as raízes enésimas de um número complexo e os vértices de um polígono regular, usando exemplos em diferentes níveis, numa abordagem crescente de aprofundamento.

4.1 A Proposta da Sequência Didática

Pretende-se através desta sequência didática propor atividades ordenadas de maneira a aprofundar os estudos sobre a relação geométrica entre as raízes enésimas de números complexos e os vértices de um polígono regular. Serão propostos aos estudantes, inicialmente, o cálculo das raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas de três números complexos, o primeiro um número complexo imaginário puro, o segundo, real puro e o terceiro, com $a, b \neq 0$, sendo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ e suas representações no plano Argand/Gauss, usando o método convencional que é a aplicação da segunda fórmula de De Moivre. A expectativa de aprendizagem, nesse momento, é que os estudantes ratifiquem que as raízes quadradas representam pontos diametralmente opostos no plano, as raízes cúbicas representam os vértices de um triângulo equilátero, as raízes quartas representam os vértices de um quadrado e as raízes quintas representam os vértices de um pentágono regular, observando a regularidade existente. Em seguida, será apresentada aos estudantes uma programação específica no software MATLAB, a qual tem como finalidade mostrar graficamente os pontos correspondentes às raízes de um número complexo, propondo aos estudantes uma ferramenta para tornar os resultados mais acessíveis, proporcionando dinamismo e interesse na busca da ampliação do conhecimento relacionados ao tema. Para tal, o estudante terá que digitar no ambiente citado, o valor correspondente à parte real, à parte imaginária e o número de raízes a ser calculada. A partir desse momento, os estudantes farão os mesmos exemplos do procedimento anterior, comparando os resultados obtidos e observando a praticidade proporcionada pelo programa. Assim, como etapa final, propõe-se aos estudantes o processo inverso, ou seja, conhecendo-se o polígono e uma das raízes, determinar as demais raízes e o número complexo correspondente. Espera-se que os mesmos sintam-se instigados a investigar a representação gráfica de outros polígonos gerados por novos valores raízes de números complexos, contribuindo, assim, para uma aprendizagem significativa. Sendo esta sequência didática baseada numa investigação matemática, espera-se também que os estudantes deem dinamismo e movimento em cada uma das etapas com possíveis indagações sobre o conteúdo proposto. Alguns possíveis questionamentos dos estudantes serão tratados dentro das etapas.

4.2 As Etapas da Sequência Didática

4.2.1 1ª ETAPA

Essa etapa se propõe a realizar um levantamento de conhecimentos prévios dos estudantes, sobre o objeto de conhecimento proposto. Sendo assim, será proposto para os estudantes a identificação dos coeficientes real e imaginário, os cálculos do módulo de um número complexo e do seu argumento, a transformação de um número complexo da forma algébrica para a forma trigonométrica ou polar, a aplicação da segunda fórmula de Moivre e a representação das raízes no plano de Argand/Gauss de três números complexos, listados nos exemplos seguintes. Com isso, será verificada as necessidades dos estudantes para seguirem nas demais etapas. Espera-se que ao final dessa etapa os estudantes tenham capacidade de usar corretamente a segunda fórmula de De Moivre.

Exemplo 1: Dado o número complexo $z = 5i$, determine seu módulo, seu argumento, sua forma trigonométrica e suas n raízes.

Exemplo 2: Dado o número complexo $z = 5$, determine seu módulo, seu argumento, sua forma trigonométrica e suas n raízes.

Exemplo 3: Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine seu módulo, seu argumento, sua forma trigonométrica e suas n raízes.

Para a orientação didática do professor, segue o passo a passo das resoluções dos exemplos:

4.2.1.1 Exemplo 1

Dado o número complexo $z = 5i$, determine seu módulo, seu argumento, sua forma trigonométrica e suas n raízes.

$$\text{Como } a = 0, b = 5, \mid z \mid = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{25} = 5,$$

colocando-se o número complexo $z = 5i$ na forma trigonométrica,

$$z = \mid z \mid (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\mid z \mid} = \frac{0}{\mid 5 \mid} = 0\ ,\ \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{5}{\mid 5 \mid} = 1, \text{ logo } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ tem-se:}$$

$$z = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicar a 2ª fórmula de Moivre em que n representa o número de raízes a ser calculada.

$$z = \sqrt[n]{\mid z \mid}\left[\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[n]{5}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{n}\right)\right]$$

4.2.1.2 Exemplo 2

Dado o número complexo $z = 5$, determine seu módulo, seu argumento, sua forma trigonométrica e suas n raízes.

Como $a = 5$, $b = 0$, $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$,

Colocando o número complexo $z = 5$ na forma trigonométrica,

$$z = \mid z \mid (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\mid z \mid} = \frac{5}{\mid 5 \mid} = 1 \text{ , } \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{0}{\mid 5 \mid} = 0\text{, logo } \alpha = 0 \text{ tem-se:}$$

$$z = 5(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

Aplicando a 2ª fórmula de De Moivre:

$$z = \sqrt[n]{\mid z \mid}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[n]{5}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[n]{5}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

4.2.1.3 Exemplo 3

Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine seu módulo, seu argumento, sua forma trigonométrica e suas n raízes.

Como $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, $\mid z \mid = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$,

Colocando o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica,

$$z = \mid z \mid (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{|\ z\ |} = \frac{1}{|\ 2\ |} = \frac{1}{2}\ , \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{|\ 2\ |} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ logo } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ tem-se:}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Aplicando a 2ª fórmula de De Moivre:

$$z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[n]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

4.2.2 2ª ETAPA

Serão apresentados para os estudantes os mesmos três números complexos na forma algébrica, listados na etapa 1, solicitando que os eles determinem as raízes quadradas e cúbicas de cada número e marcando-as, individualmente, no plano Argand/Gauss. Para tal, se faz necessária a transformação destes números complexos da forma algébrica para a forma trigonométrica ou forma polar, determinando os valores do módulo e do argumento. Aplicando a segunda fórmula de Moivre, determinarão as raízes correspondentes. Esses valores (pontos) devem ser marcados no plano a fim de ligá-los por segmentos de retas. Os estudantes deverão observar quais figuras foram geradas a partir do procedimento realizado. Espera-se que os estudantes verifiquem que foram gerados, no caso das raízes quadradas, um segmento de reta e, para as raízes cúbicas, um triângulo equilátero.

Exemplo 1: Dado o número complexo $z = 5i$, determine as suas raízes quadradas e cúbicas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Exemplo 2: Dado o número complexo $z = 5$, determine as suas raízes quadradas e cúbicas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Exemplo 3: Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine as suas raízes quadradas e cúbicas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Para a orientação didática do professor, segue o passo a passo das resoluções dos exemplos:

4.2.2.1 Exemplo 1

Dado o número complexo $z = 5i$, determine as suas raízes quadradas e cúbicas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

A partir da segunda fórmula de De Moivre,

$$z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Substituindo-se os valores determinados no exemplo 1, da etapa 1 e n por 2, tem-se:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)\right] \\ &= \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 4k\pi}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

Para determinar as raízes quadradas de z, deve-se calcular para $k = 0$ e $k = 1$:

Para $k = 0$, tem-se:

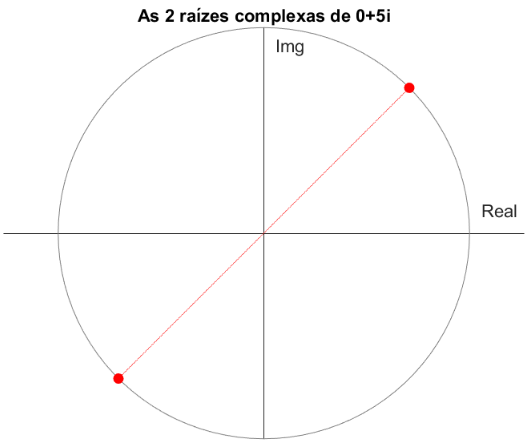
$$\begin{aligned} z &= \sqrt{5}\left[\cos(\frac{\pi + 4.0\pi}{4}) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 4.0\pi}{4}\right)\right] \\ &= \sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{5}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi + 4.1\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4.1\pi}{4}\right)\\
&= \left[\sqrt{5}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]\\
&= \sqrt{5}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\\
&= \frac{-\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}
\end{aligned}
$$

A representação geométrica das raízes quadrada do número complexo $z = 5i$ são apresentadas na figura 5.

Figura 5 – Interpretação geométrica das raízes quadradas de $z = 5i$



Fonte: Proprio Autor

Para determinar as raízes cúbicas de z, deve-se usar os mesmos passos das raízes quadradas, porém o valor de n é 3 e calcular para $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$:

A partir da segunda fórmula de Moivre,

$$
z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]
$$

Fazendo as substituições,

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right)\right]$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.0\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4.0\pi}{6}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$$

$$z = \frac{\sqrt[6]{675}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.1\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4.1\pi}{6}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right]$$

$$z = -\frac{\sqrt[6]{675}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.2\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4.2\pi}{6}\right)\right]$$

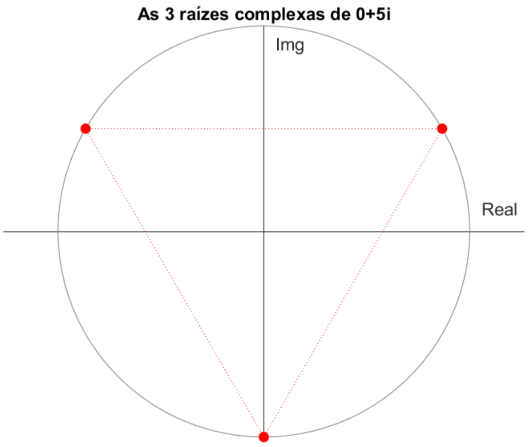
$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\,[0 + i.(-1)]$$

$$z = -\sqrt[3]{5}i$$

A representação geométrica das raízes cúbicas do número complexo $z = 5i$ são apresentadas na figura 6.

Figura 6 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 5i$



Proprio Autor

4.2.2.2 Exemplo 2

Dado o número complexo $z = 5$, determine as suas raízes quadradas e cúbicas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

A resolução será idêntica ao exemplo 1, porém utilizando-se as informações do exemplo 2 da etapa 1

$$z = \sqrt[n]{|\,z\,|}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{5}\,[\cos k\pi + i \operatorname{sen} k\pi]$$

Para determinar as raízes quadradas de z, deve-se calcular para $k = 0$ e $k = 1$:

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt{5}\,[\cos 0.\pi + i \operatorname{sen} 0.\pi]$$

$$z = \sqrt{5}\,[1 + i.0]$$

$$z = \sqrt{5}$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt{5}\,[\cos 1.\pi + i \operatorname{sen} 1.\pi]$$

$$z = \sqrt{5}\,[-1 + i.0]$$

$$z = -\sqrt{5}$$

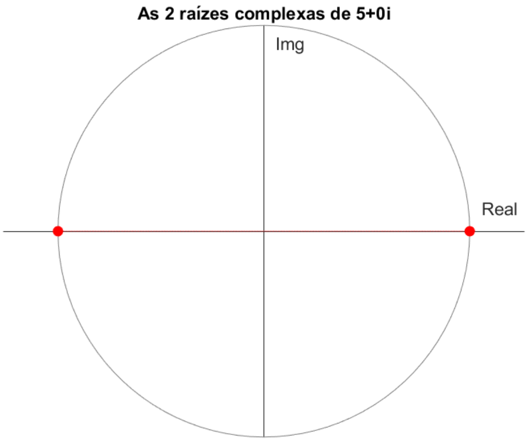
A representação geométrica das raízes quadrada do número complexo $z = 5$ são apresentadas na figura 7.

Para determinar as raízes cúbicas de z, deve-se calcular para $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$

Ocorre o mesmo processo citado anteriormente

$$z = \sqrt[n]{|\, z \,|}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Figura 7 – Interpretação geométrica das raízes quadradas de $z = 5$



Fonte: Proprio Autor

$$z = \sqrt[3]{\mid 5 \mid}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right]$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{0+2.0.\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0+2.0.\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos 0.\pi + i\,\text{sen}\,0.\pi\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[1 + i.0\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{0+2.1.\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0+2.1.\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$z = -\frac{\sqrt[3]{5}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{675}}{2}$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{0 + 2.2.\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0 + 2.2.\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{5}\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$z = \frac{\sqrt[3]{5}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{675}}{2}$$

A representação geométrica das raízes cúbicas do número complexo $z = 5$ são apresentadas na figura 8.

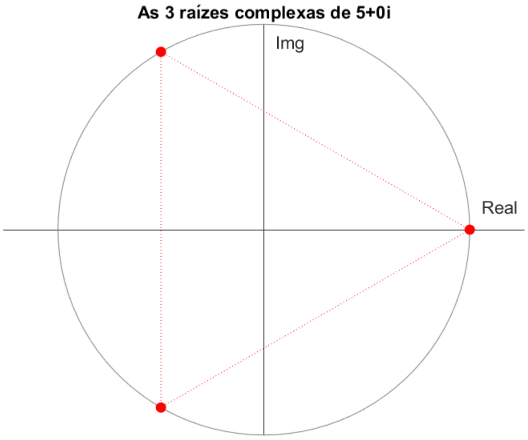
4.2.2.3 Exemplo 3

Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine as suas raízes quadradas e cúbicas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Seguindo os passos dos exemplos anteriores,

$$z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Figura 8 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 5$



Proprio Autor

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6k\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6k\pi}{6}\right)\right]$$

Para determinar as raízes quadradas de z, deve-se calcular para $k = 0$ e $k = 1$:

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{6}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i.\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{6}\right)\right]$$

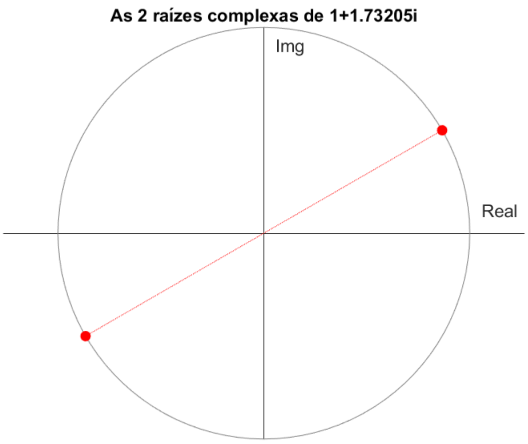
$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

$$z = \sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right]$$

$$z = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

A representação geométrica das raízes quadradas do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ são apresentadas na figura 9.

Figura 9 – Interpretação geométrica das raízes quadradas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Proprio Autor

Para determinar as raízes cúbicas de z, deve-se calcular para $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$.

$$z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{|\ 2\ |}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6k\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6k\pi}{9}\right)\right]$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{9}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)\right]$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{9}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right]$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.2.\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6.2.\pi}{9}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right]$$

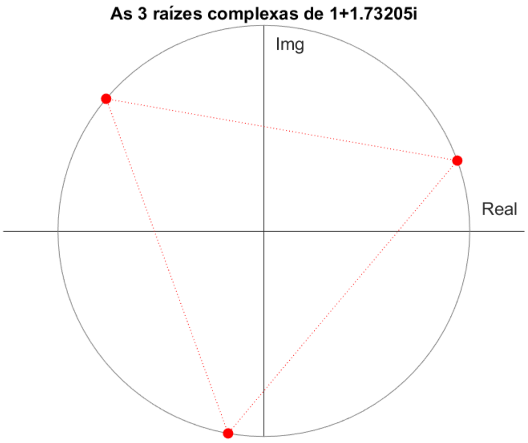
A representação geométrica das raízes cúbicas do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ são apresentadas na figura 10.

Nesta etapa, onde de fato se dá o início da investigação, podem surgir alguns questionamentos dos estudantes:

1) Como calcular as raízes de números reais?

2) Como calcular as raízes de números imaginários puros?

Figura 10 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Proprio Autor

3) Por que não forma polígono no cálculo das raízes quadradas?

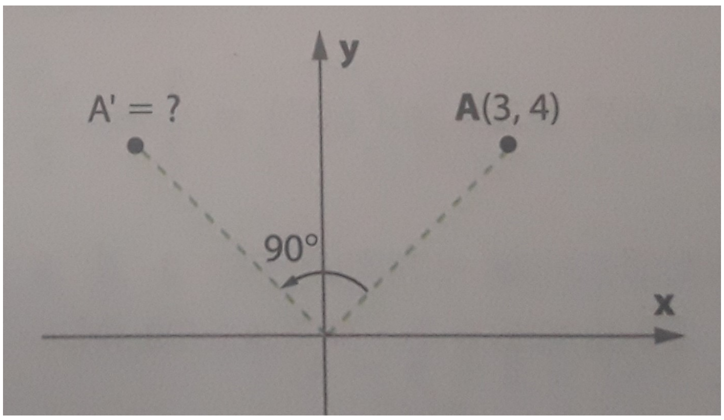
4) Por que forma um triângulo equilátero?

5) Como se dá a interpretação geométrica do produto?

Para este último item, segue sugestão com um exemplo auxiliar.

(DANTE,) Encontre as novas coordenadas do ponto $A(3,4)$ após uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário em relação à origem.

Figura 11 – Rotação A A'



Fonte: (DANTE,)

Do subitem $2.8.1.1$, sabe-se que o produto entre dois números complexos gera uma rotação de coordenadas no plano. Assim, para rotacionar um ponto (a, b), em relação à origem, basta multiplicar o número complexo $z = a + bi$ pelo complexo $1(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ que do subitem $2.8.4.1$ é a raiz enésima da unidade.

O ponto $(3, 4)$ representa geometricamente o complexo $z = 3 + 4i$, para haver uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$, basta multiplicar por $1(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$, mas $1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right) = i$. Logo, tem-se que $(3 + 4i).i = -4 + 3i$. Conclui-se que as novas coordenadas do ponto A são -4 e 3, ou seja, $A'(-4, 3)$.

4.2.3 3ª ETAPA

Serão apresentados, aos estudantes, os mesmos 3 números complexos da etapa 1, porém eles determinarão as raízes quartas e quintas de cada número, seguindo o mesmo procedimento da etapa anterior, dando continuidade à investigação matemática. Espera-se que os estudantes, ao final da etapa 2, compreendam que os pontos marcados para as raízes quadradas são pontos diametralmente opostos e que os pontos marcados para as raízes cúbicas, quartas e quintas são os vértices de um polígono regular.

Exemplo 1: Dado o número complexo $z = 5i$, determine as suas raízes quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Exemplo 2: Dado o número complexo $z = 5$, determine as suas raízes quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Exemplo 3: Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine as suas raízes quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Para a orientação didática do professor, segue o passo a passo das resoluções dos exemplos:

4.2.3.1 Exemplo 1

Dado o número complexo $z = 5i$, determine as suas raízes quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Da etapa 1, sabe-se que para determinar as raízes quartas de z, basta substituir o valor de n por 4

Desse modo, como $z = \sqrt[n]{\mid z \mid}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 4k\pi}{8}\right)\right]$$

Para determinar as raízes quartas de z, deve-se calcular para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$:

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.0.\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 4.0.\pi}{8}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.1.\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 4.1.\pi}{8}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right]$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.2.\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 4.2.\pi}{8}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]$$

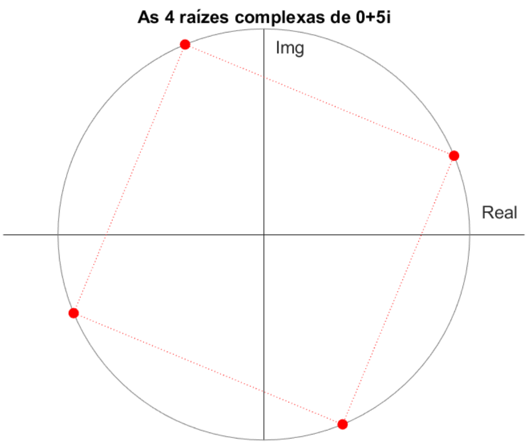
Para $k = 3$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.3.\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 4.3.\pi}{8}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right]$$

A representação geométrica das raízes quartas do número complexo $z = 5i$ são apresentadas na figura 12.

Figura 12 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 5i$



Fonte: Proprio Autor

Usando os passos anteriores, sabe-se que para determinar as raízes quintas de z, basta substituir o valor de n por 5

Desse modo, como $z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4k\pi}{10}\right)\right]$$

Para determinar as raízes quintas de z, deve-se calcular para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$:

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.0.\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4.0.\pi}{10}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right)\right]$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.1.\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4.1.\pi}{10}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{10}\right)\right]$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.2.\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 4.2.\pi}{10}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{9\pi}{10}\right)\right]$$

Para $k = 3$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.3.\pi}{10}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 4.3.\pi}{10}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{10}\right)\right]$$

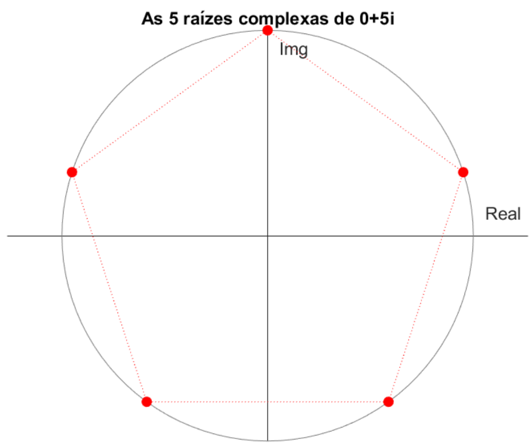
Para $k = 4$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi + 4.4.\pi}{10}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 4.4.\pi}{10}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{17\pi}{10}\right)\right]$$

A representação geométrica das raízes quintas do número complexo $z = 5i$ são apresentadas na figura 13.

Figura 13 – Interpretação geométrica das raízes quintas de $z = 5i$



Proprio Autor

4.2.3.2 Exemplo 2

Dado o número complexo $z = 5$, determine as suas raízes quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Da etapa 1, sabe-se que para determinar as raízes quartas de z, basta substituir o valor de n por 4 e calcular para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$:

Desse modo, como $z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{0.\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{0.\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos 0 + i\,\text{sen}\, 0\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[1 + i.0\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{1.\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1.\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[0 + i.1\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}i$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{2.\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2.\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[-1 + i.0\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[-1 + i.0\right]$$

$$z = -\sqrt[4]{5}$$

Para $k = 3$, tem-se:

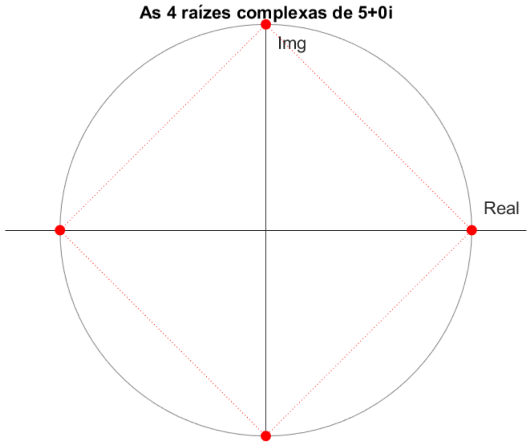
$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{3.\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3.\pi}{2}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[0 + i.(-1)\right]$$

$$z = -\sqrt[4]{5}i$$

A representação geométrica das raízes quartas do número complexo $z = 5$ são apresentadas na figura 14.

Figura 14 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 5$



Fonte: Proprio Autor

Para determinar as raízes quintas de z, basta substituir o valor de n por 5 e calcular para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$:

Desse modo, como $z = \sqrt[n]{\mid z \mid}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{5}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right]$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{2.0.\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2.0.\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\,[\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\,[1 + i.0]$$

$$z = \sqrt[5]{5}$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{2.1.\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2.1.\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{2.2.\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2.2.\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$$

Para $k = 3$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{2.3.\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2.3.\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right]$$

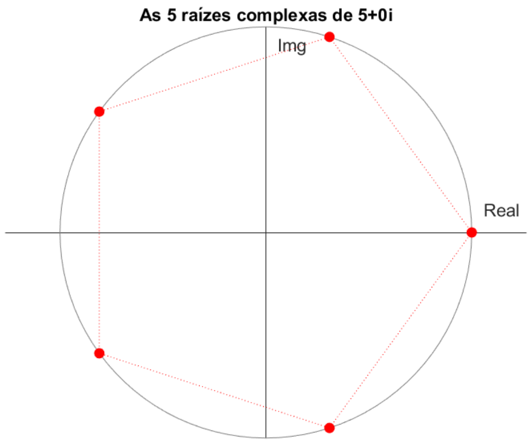
Para $k = 4$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{2.4.\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2.4.\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{5}\left[\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right)\right]$$

A representação geométrica das raízes quintas do número complexo $z = 5$ são apresentadas na figura 15.

Figura 15 – Interpretação geométrica das raízes quintas de $z = 5$



Proprio Autor

4.2.3.3 Exemplo 3

Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine as suas raízes quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Para determinar as raízes quartas de z, deve-se calcular para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$:

$$z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6k\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6k\pi}{12}\right)\right]$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{12}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{12}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.2.\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6.2.\pi}{12}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right]$$

Para $k = 3$, tem-se:

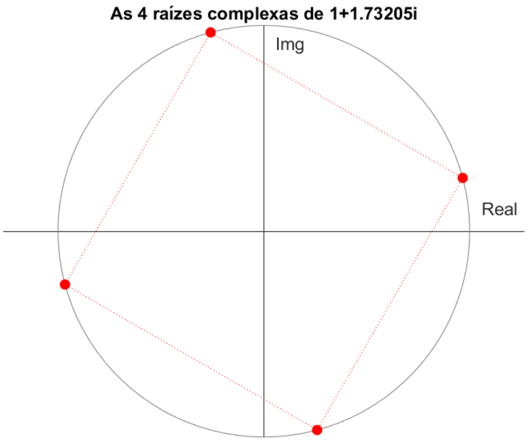
$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.3.\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6.3.\pi}{12}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right]$$

A representação geométrica das raízes quartas do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ são apresentadas na figura 16.

Para determinar as raízes quintas de z, deve-se calcular para $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ e $k = 4$:

Figura 16 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Proprio Autor

$$z = \sqrt[n]{|\, z \,|}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6k\pi}{15}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6k\pi}{15}\right)\right]$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{15}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6.0.\pi}{15}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{15}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)\right]$$

Para $k = 1$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{15}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 6.1.\pi}{15}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{15}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{15}\right)\right]$$

Para $k = 2$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.2.\pi}{15}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6.2.\pi}{15}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{13\pi}{15}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{13\pi}{15}\right)\right]$$

Para $k = 3$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.3.\pi}{15}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6.3.\pi}{15}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{15}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{19\pi}{15}\right)\right]$$

Para $k = 4$, tem-se:

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6.4.\pi}{15}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi + 6.4.\pi}{15}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[5]{2}\left[\cos\left(\frac{25\pi}{15}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{25\pi}{15}\right)\right]$$

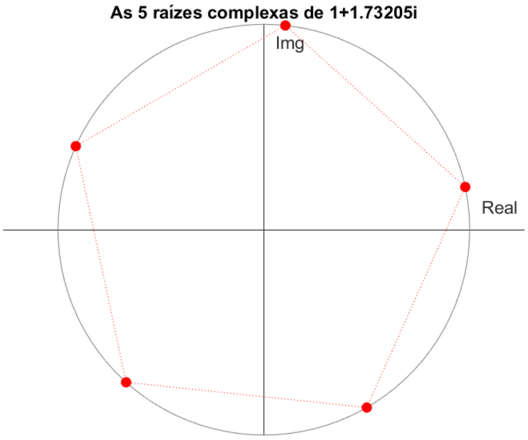
A representação geométrica das raízes quintas do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$ são apresentadas na figura 17.

Nesta etapa, podem surgir os questionamentos dos estudantes:

1) Por que forma um quadrado?

2) Por que forma um pentágono regular?

Figura 17 – Interpretação geométrica das raízes quintas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Proprio Autor

4.2.4 4ª ETAPA

Neste momento os estudantes utilizarão uma aplicação do software MATLAB que foi desenvolvida para determinar a figura, a partir do número de raízes a serem determinadas. Esta aplicação do software tem como finalidade tornar mais simples a busca das raízes de um número complexo e sua representação no plano que pode ser uma reta ou polígono regular, pois o estudante não terá que fazer os cálculos realizados nas etapas 1, 2 e 3. O estudante apenas deverá identificar os valores de a e b do complexo $z = a + bi$ e digitar no espaço correto da janela do programa e, também, indicar o número de raízes a serem calculadas. Sendo assim, nesta etapa, os estudantes farão novamente o que foi proposto nas etapas 2 e 3. Espera-se que os estudantes, ao final da etapa 4, compare as figuras encontradas com as que foram feitas, manualmente, nas etapas 2 e 3, cumprindo uma das finalidades dessa sequência didática.

Exemplo 1: Dado o número complexo $z = 5i$, determine as suas raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Exemplo 2: Dado o número complexo $z = 5$, determine as suas raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Exemplo 3: Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine as suas raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Para a orientação didática do professor, segue o passo a passo com as imagens do programa em cada momento.

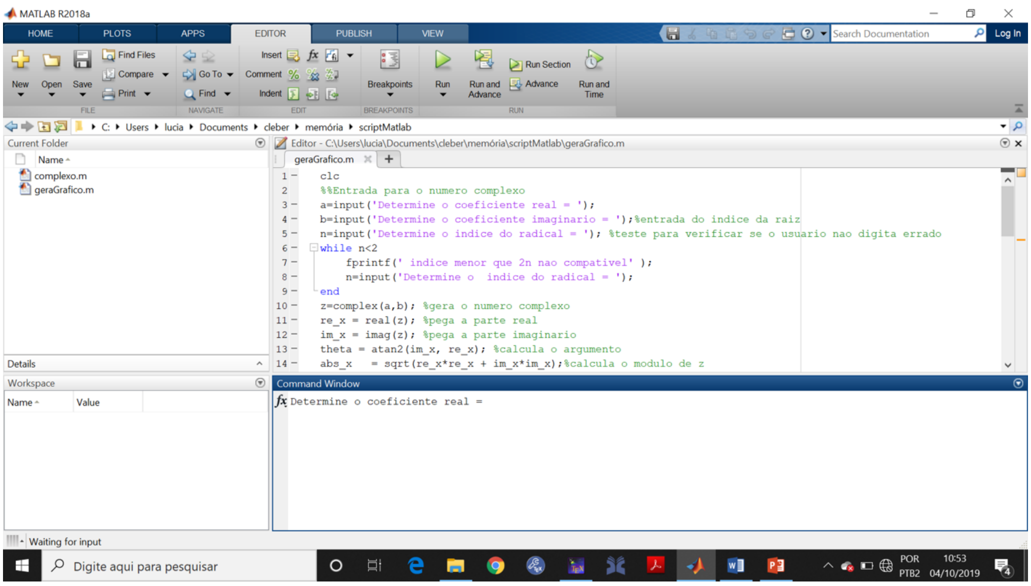
4.2.4.1 Exemplo 1

Dado o número complexo $z = 5i$, determine as suas raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Resolução para as raízes quadradas:

1. Com o programa aberto, para dar início aos comandos o aluno deve clicar no botão RUN, figura 18.

Figura 18 – Script projetado em execução 1

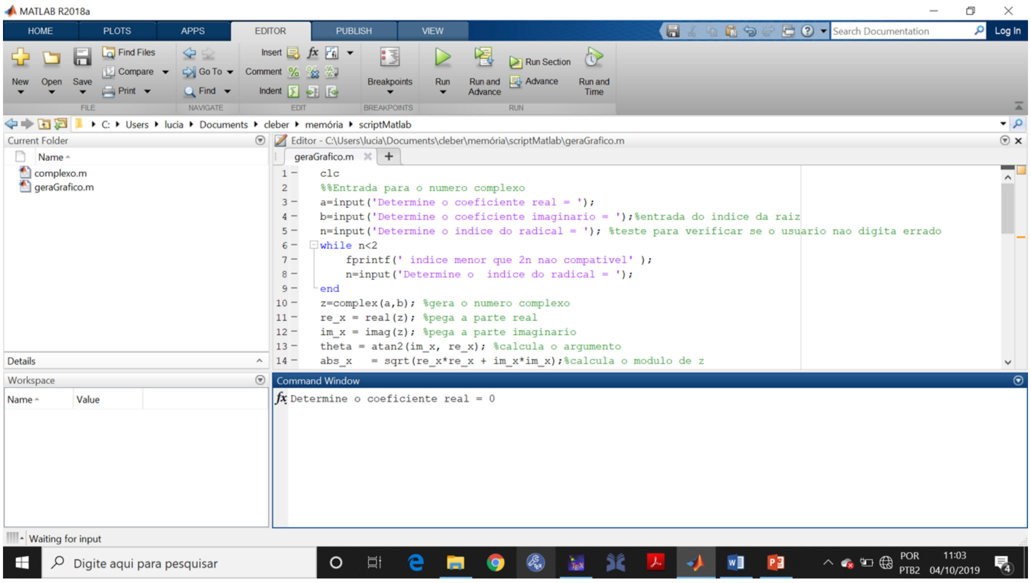


Fonte: Proprio Autor

2. Na janela inferior o programa exibirá o espaço para digitar a parte real do número complexo. Após digitar 0, clica a tecla *enter*, figura 19.

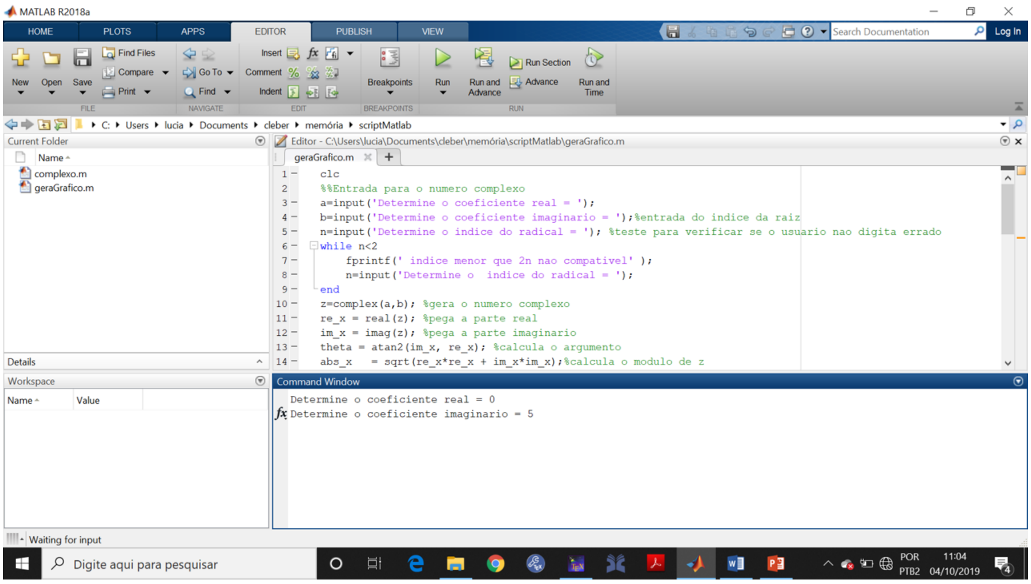
3. Na linha imediatamente inferior, o programa exibirá o espaço para digitar a parte imaginária do número complexo. Após digitar 5, clica a tecla *enter*, figura 20.

Figura 19 – Script projetado em execução 2



Proprio Autor

Figura 20 – Script projetado em execução 3

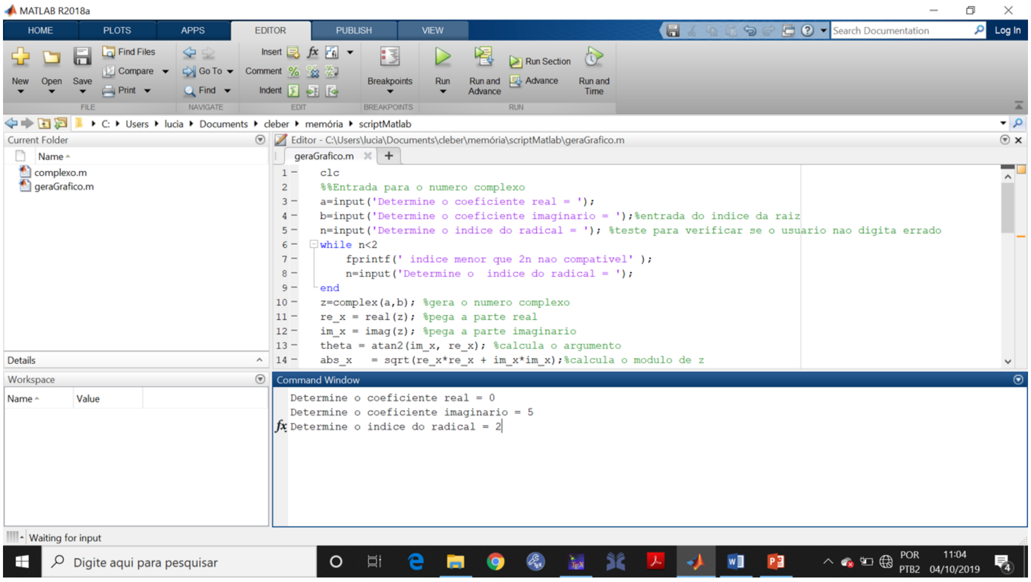


Fonte: Proprio Autor

4. Agora o programa exibirá o espaço para digitar o número de raízes a ser calculada. Após digitar 2 e clicar a tecla *enter* o programa exibirá as raízes do número complexo informado, bem como a representação do lugar geométrico, figura 21.

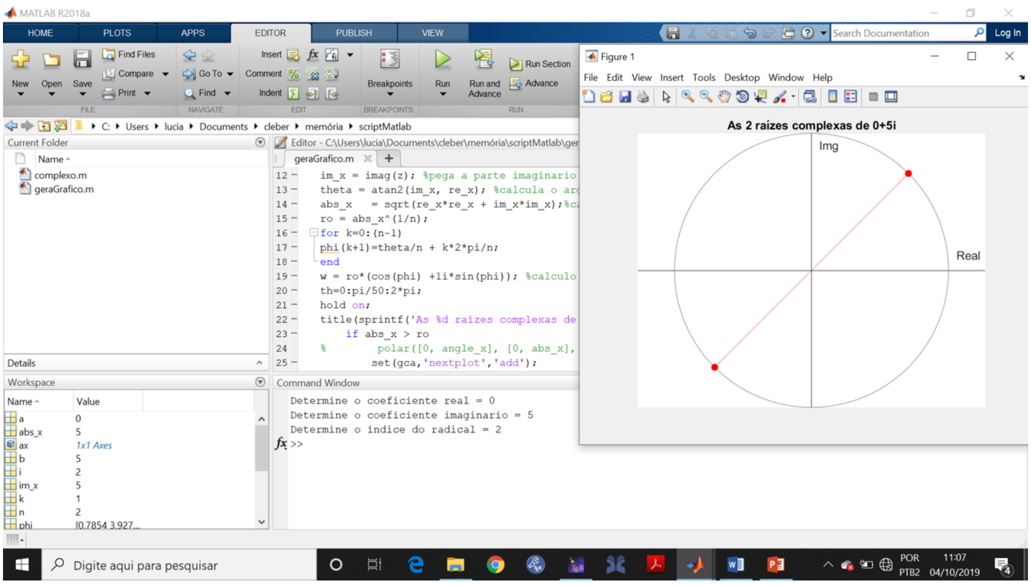
Neste momento, o programa gerou um gráfico com dois pontos diametralmente opostos, figura 22.

Figura 21 – Script projetado em execução 4



Proprio Autor

Figura 22 – Script projetado - raízes quadradas de $z = 5i$



Fonte: Proprio Autor

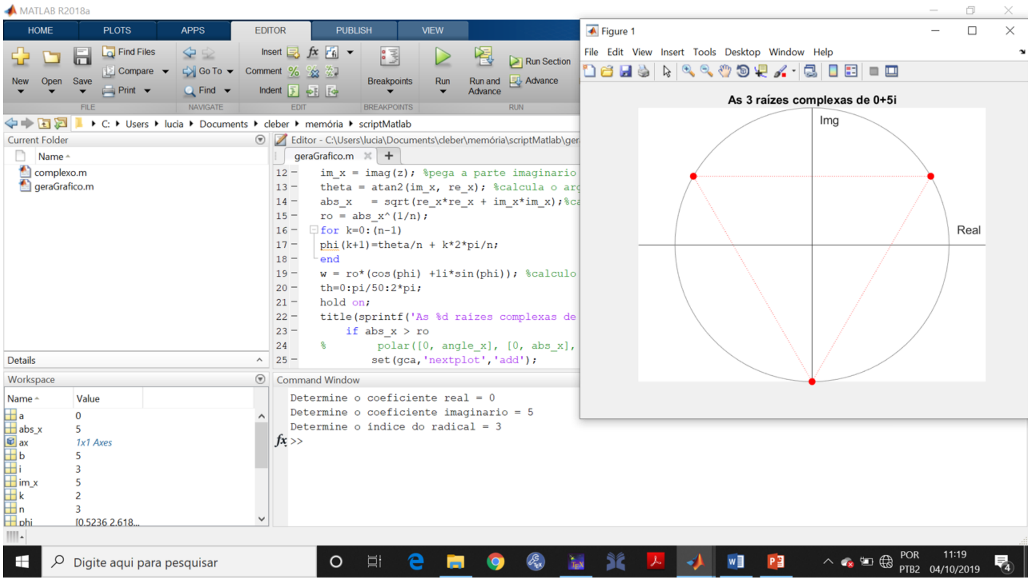
Resolução para as raízes cúbicas:

Os passos realizados aqui serão os mesmos anteriores.

Neste momento, o programa vai gerar um triângulo equilátero, figura 23.

Resolução para as raízes quartas:

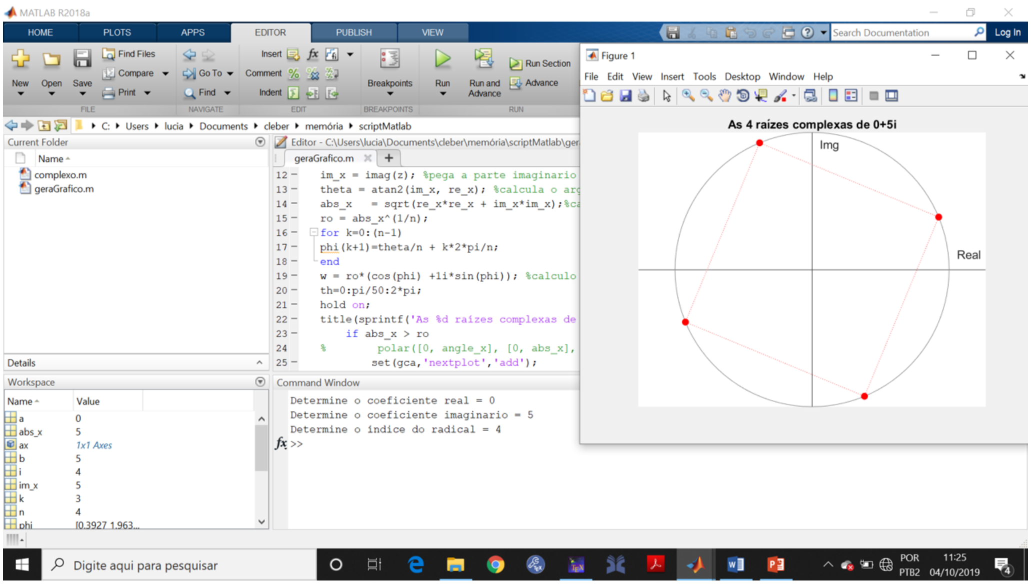
Figura 23 – Script projetado - raízes cúbicas de $z = 5i$



Proprio Autor

Os passos realizados aqui serão os mesmo anteriores.

Figura 24 – Script projetado - raízes quartas de $z = 5i$



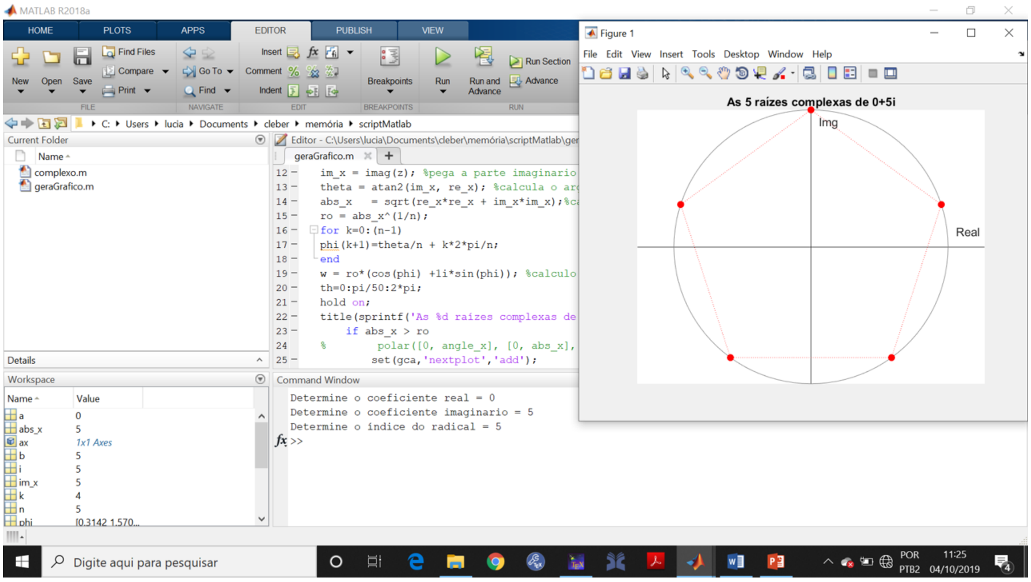
Fonte: Proprio Autor

Neste momento, o programa vai gerar um quadrado, figura 24.

Resolução para as raízes quintas:

Os passos realizados aqui serão os mesmos anteriores.

Figura 25 – Script projetado - raízes quintas de $z = 5i$



Proprio Autor

Neste momento, o programa vai gerar um pentágono regular, figura 25.

4.2.4.2 Exemplo 2

Exemplo 2: Dado o número complexo $z = 5$, determine as suas raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

Os passos são os mesmo do exemplo 1. Porém deve-se estar atento aos valores de a e b do número complexo.

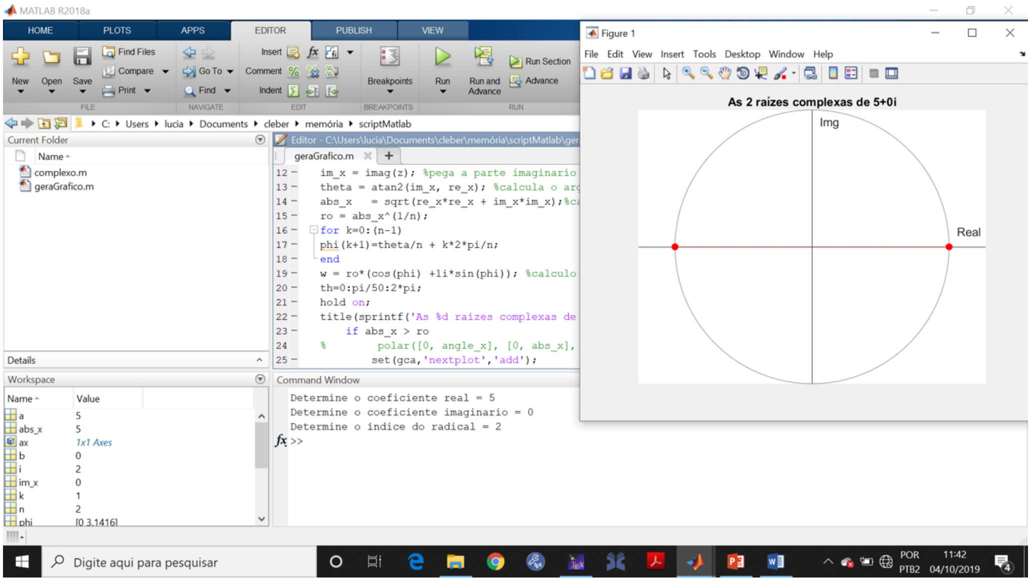
As visualizações dos estudantes das raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas estão, respectivamente, nas figuras 26, 27, 28 e 29

4.2.4.3 Exemplo 3

Exemplo 3: Dado o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, determine as suas raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas, bem como as suas representações geométricas em planos distintos.

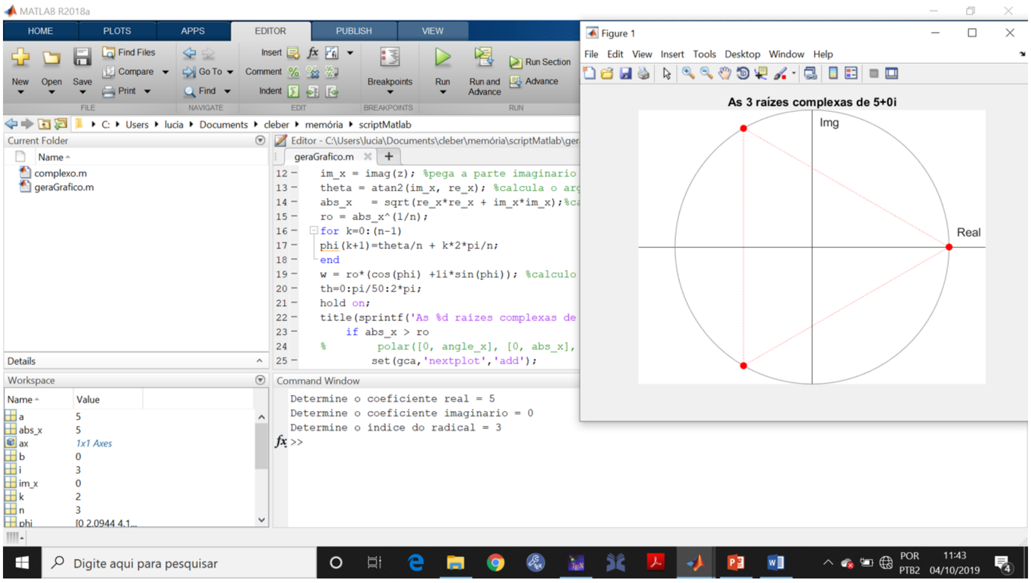
Os passos são os mesmos do exemplo 1. Porém, deve-se estar atento aos valores de a e b do número complexo.

Figura 26 – Script projetado - raízes quadradas de $z = 5$



Fonte: Proprio Autor

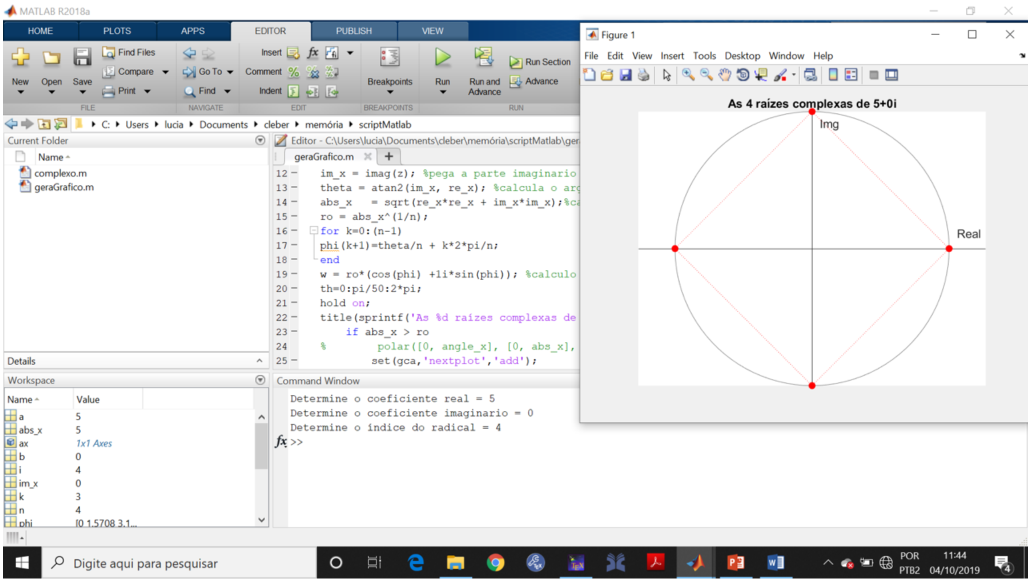
Figura 27 – Script projetado - raízes cúbicas de $z = 5$



Proprio Autor

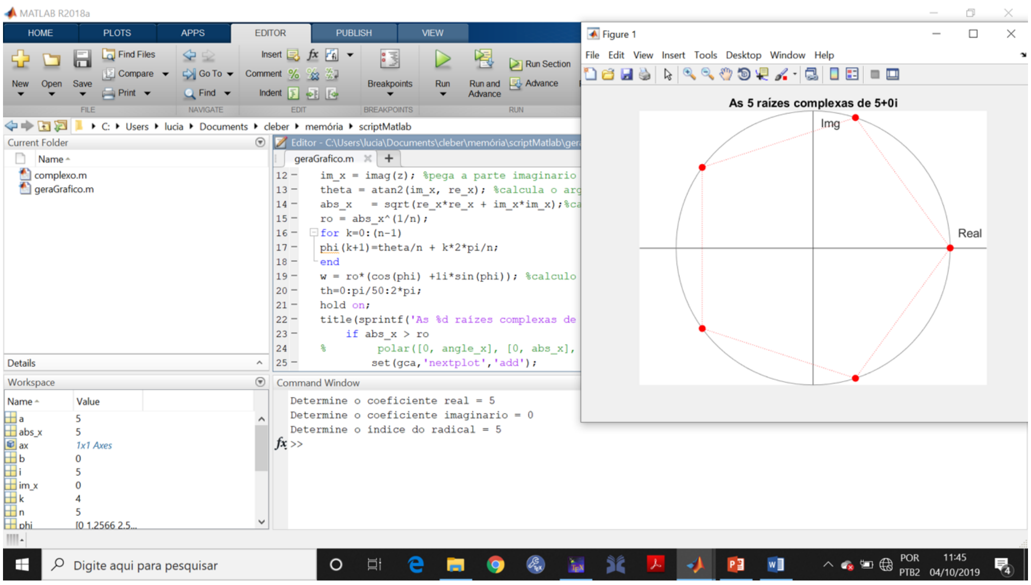
As visualizações dos estudantes das raízes quadradas, cúbicas, quartas e quintas estão, respectivamente, nas figuras 30, 31, 32 e 33

Figura 28 – Script projetado - raízes quartas de $z = 5$



Fonte: Proprio Autor

Figura 29 – Script projetado - raízes quintas de $z = 5$

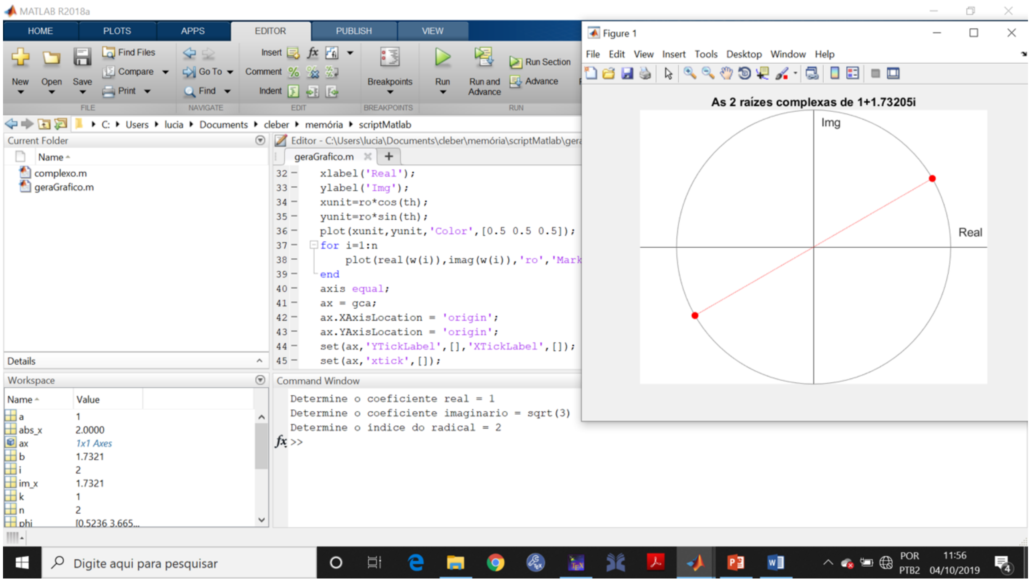


Proprio Autor

4.2.5 5ª ETAPA

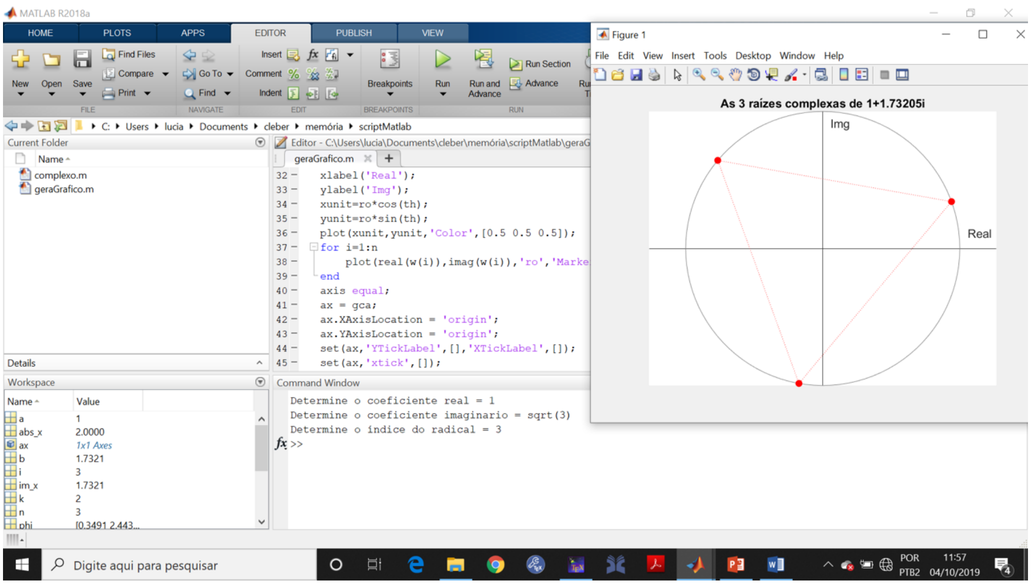
Nesse momento de ampliação do conhecimento, o professor proporá aos estudantes, com o uso do programa, determinar os polígonos de 15, 18, 20 e 50 lados. Cada estudante escolherá um determinado número complexo. Desta forma, serão gerados polígonos de mesmas quantidades de lados, porém com vértices distintos. Espera-se que o estudante, ao final desta

Figura 30 – Script projetado - raízes quadradas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Proprio Autor

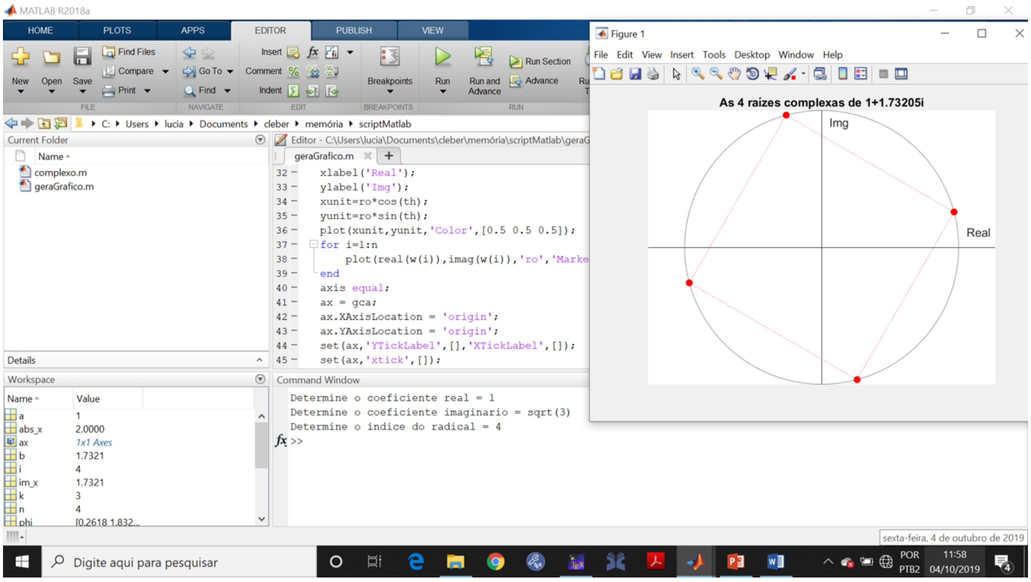
Figura 31 – Script projetado - raízes cúbicas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Proprio Autor

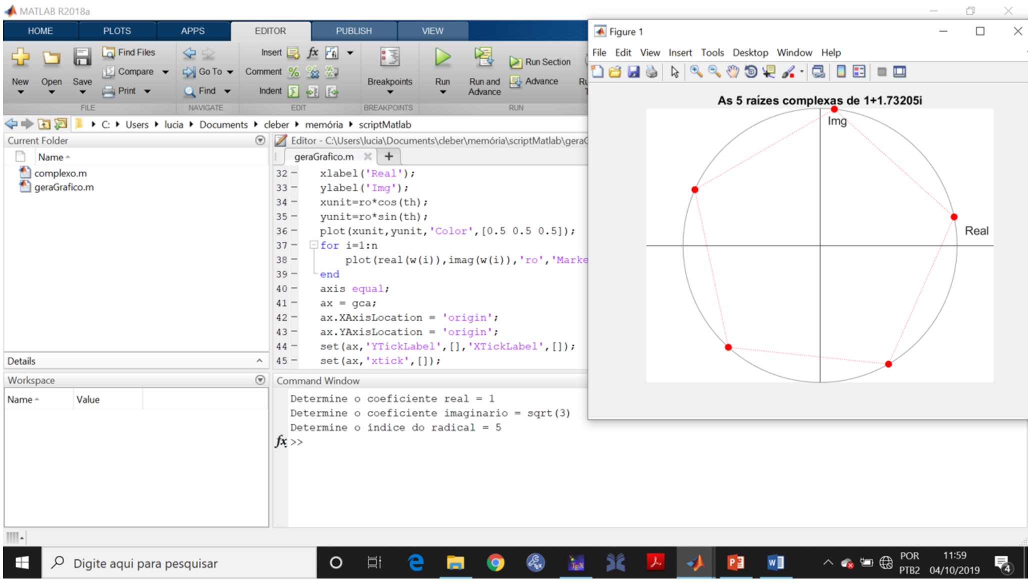
etapa, perceba que a medida que for aumentando o número de raízes, aumentará também a quantidade de pontos plotados no plano Argand/Gauss (vértices) e consequentemente o número de lados dos polígonos e ainda, no caso de o número de raízes tender ao infinito, o polígono gerado tenderá à uma circunferência.

Figura 32 – Script projetado - raízes quartas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Fonte: Proprio Autor

Figura 33 – Script projetado - raízes quintas de $z = 1 + \sqrt{3}i$



Proprio Autor

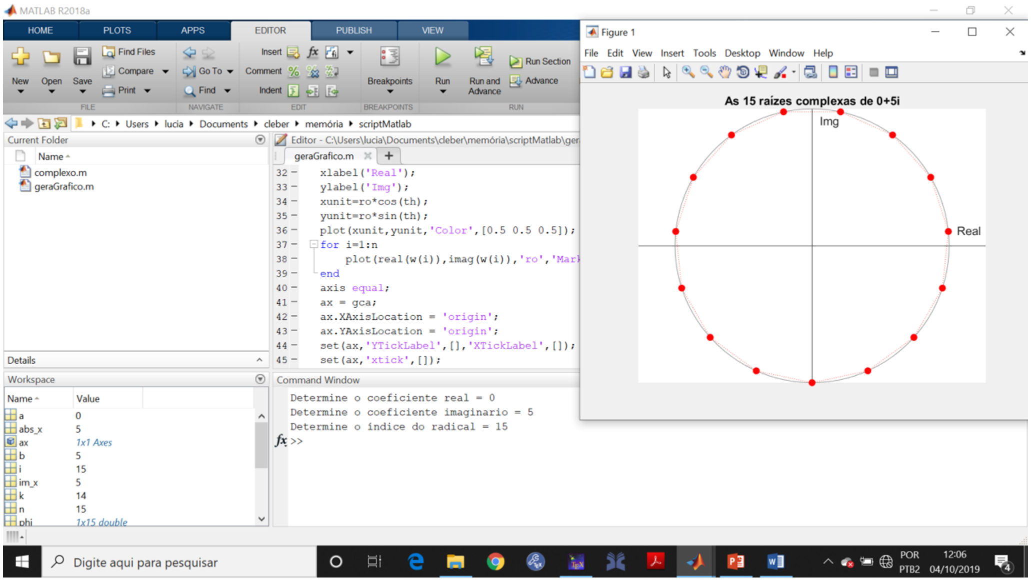
4.2.5.1 Exemplo de uma situação que poderá ocorrer:

um estudante escolheu o número complexo do exemplo 1, ou seja $z = 5i$.

As 15 raízes: (figura 34)

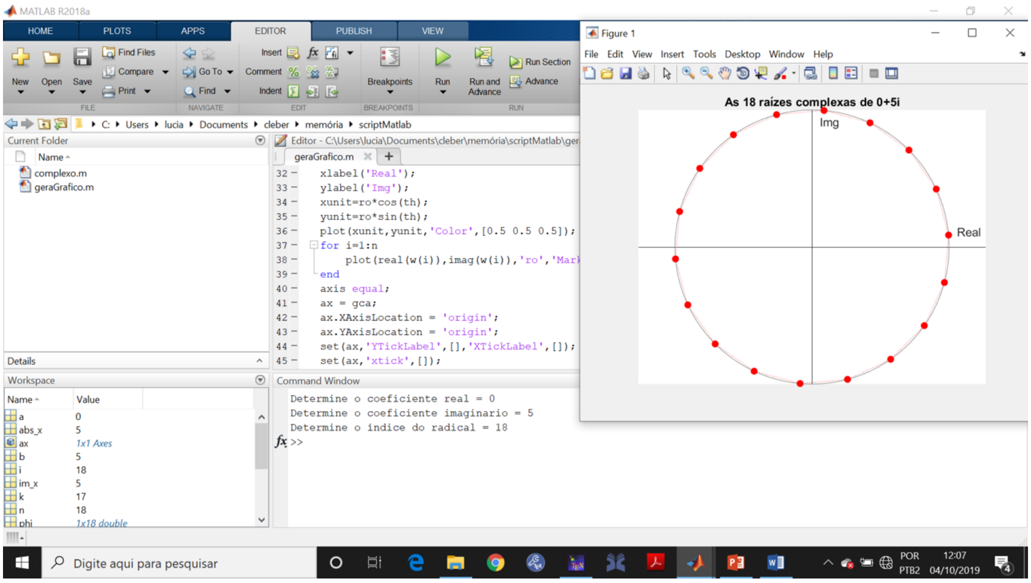
As 18 raízes: (figura 35)

Figura 34 – Script projetado - 15 raízes de $z = 5i$



Fonte: Proprio Autor

Figura 35 – Script projetado - 18 raízes de $z = 5i$



Proprio Autor

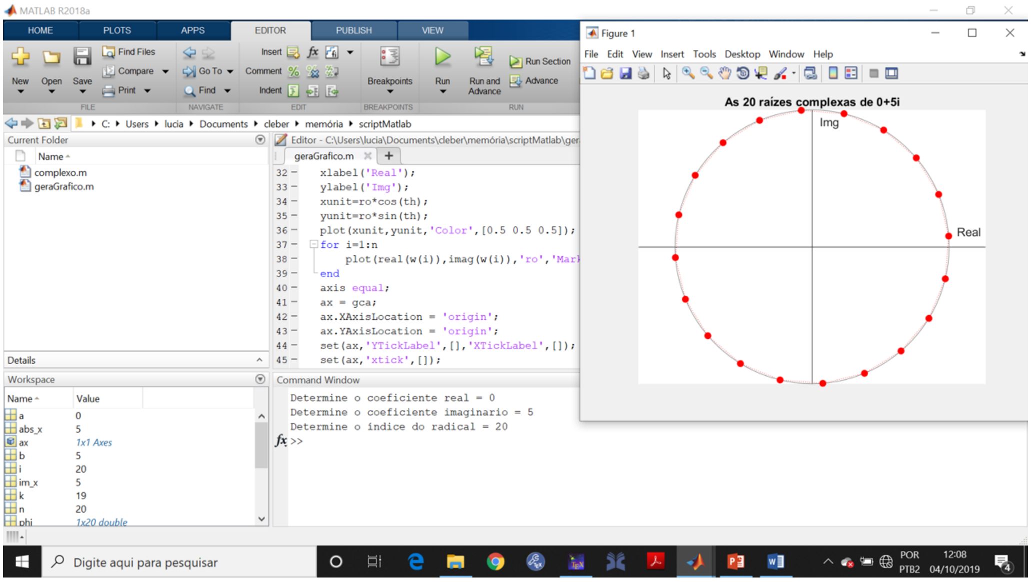
As 20 raízes: (figura 36)

As 50 raízes: (figura 37)

Nesta etapa, podem surgir os questionamentos dos estudantes:

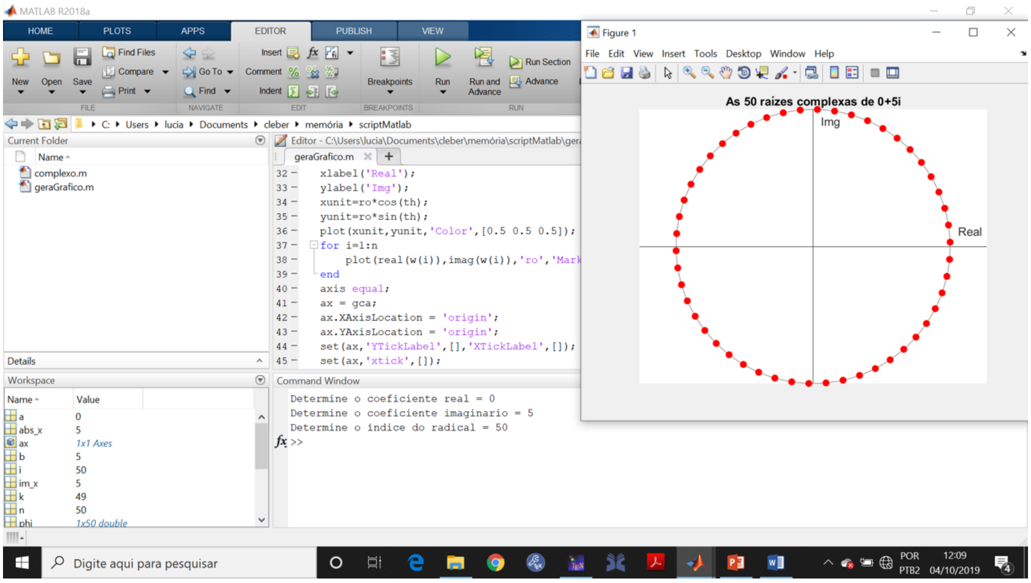
1) Por que uma circunferência?

Figura 36 – Script projetado - 20 raízes de $z = 5i$



Fonte: Proprio Autor

Figura 37 – Script projetado - 50 raízes de $z = 5i$



Proprio Autor

2) Limitações do software (vizualização comprometida a partir de certa quantidade de raízes, índices naturais)

4.2.6 6ª ETAPA

Nesta etapa será proposto aos estudantes duas situações com a relação contrária, ou seja, os exemplos fornecerão os polígonos e uma das raízes e eles determinarão as demais. Esse processo deverá ser feito manualmente ou usando o programa do software MATLAB. Poderá também ser feito manualmente e testado no programa.

Nesta etapa, podem surgir os questionamentos dos estudantes:

1) Como identificar a localização (quadrante/eixo) da raiz?

2) Qual a melhor forma para determinar as demais raízes?

Exemplo 1: (IEZZI et al., 2004) Um quadrado, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértice o afixo de $z_1 = 3i$. Quais números complexos são representados pelos outros três vértices?

Exemplo 2:(IEZZI et al., 2004) Um hexágono, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértice o afixo de $z = 2i$. Quais números complexos são representados pelos outros cinco vértices?

Para a orientação didática do professor, segue o passo a passo das resoluções dos exemplos:

4.2.6.1 Exemplo 1

Um quadrado, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértice o afixo de $z_1 = 3i$. Quais números complexos são representados pelos outros três vértices?

Pelas realizações das etapas anteriores, espera-se que os estudantes com leitura e interpretação do enunciado que os vértices de um quadrado representam as raízes quartas de um certo $z \in \mathbb{C}$. Sabendo-se que uma das raízes é $3i$, tem-se:

$$\sqrt[4]{z} = 3i \quad \Rightarrow \quad z = (3i)^4 = 81$$

Assim,

$$z = 81 = 81(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

Aplicando a 2ª fórmula de De Moivre:

$$z = \sqrt[n]{|\ z\ |}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z = \sqrt[4]{81}\left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right)\right]$$

$$z = 3\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right], \text{com} \quad k \in 0, 1, 2, 3$$

Para $k = 0$,

$$z_0 = 3\left[\cos\left(\frac{0}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0}{2}\right)\right] = 3$$

Para $k = 1$,

$$z_1 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3i$$

Para $k = 2$,

$$z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right] = -3$$

Para $k = 3$,

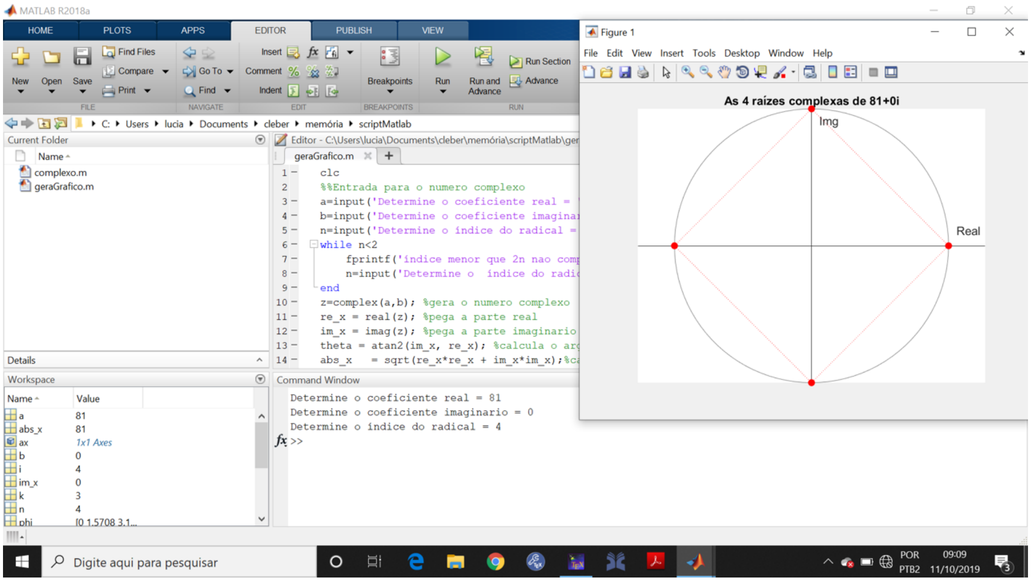
$$z_3 = 3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -3i$$

Portanto, os números procurados são $-3, 3$ e $3i$.

Após a realização dos cálculos, os estudantes deverão usar o programa do MATLAB para validação e visualização do referido polígono, figura 38

Outra forma de resolução:

Figura 38 – Script projetado - raízes quartas de $z = 81$



Proprio Autor

O estudante poderá usar os conhecimentos das seção 2.8.1 e da subseção 2.8.4.1 e proceder da seguinte forma:

Ao multiplicar a raiz dada $3i$ por $1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$ que é uma *raiz primitiva da unidade* (raiz que determina todas as outras, a partir dela) determinará outra raiz. Esse processo deve ser feito 3 vezes por se tratar das raízes quartas, ou seja:

Considerando $w_1 = 3i$,

$$w_{k+1} = w_1 \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^k, \quad \text{com } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Assim tem-se:

Para $k = 1$,

$$w_{1+1} = 3i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right]^1$$

$$w_2 = 3i[0 + i] = -3$$

Para $k = 2$,

$$w_{2+1} = 3i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$w_3 = 3i[0 + i]^2 = 3i$$

Para $k = 3$,

$$w_{3+1} = 3i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right]^3$$

$$w_4 = 3i[0 + i]^3 = 3$$

Observa-se que as raízes estão sendo determinadas com a potências de i, desse modo, afirma-se que i é uma *raiz primitiva da unidade*.

4.2.6.2 Exemplo 2

Um hexágono, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértice o afixo de $z = 2i$. Que números complexos são representados pelos outros cinco vértices?

A resolução deve seguir os passos do exemplo 1, deve-se estar atento ao número de raízes.

Assim,

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right], \text{com} \quad k \in 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Portanto, os números procurados são $\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$ e $-2i$.

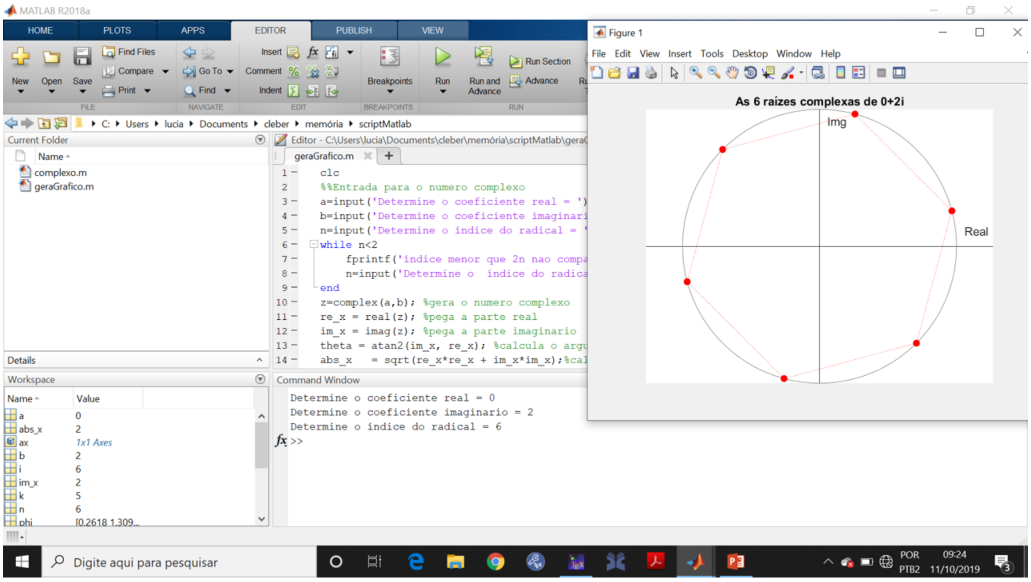
Após a realização dos cálculos os estudantes deverão usar o aplicativo do MATLAB para validação e visualização do referido polígono, figura 39.

Outra forma de resolução:

Idem exemplo 1.

Considerando $w_1 = 2i$,

Figura 39 – Script projetado - raízes sextas de $z = 2i$



Proprio Autor

$$w_{k+1} = w_1 \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^k, \quad \text{com } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Assim tem-se:

Para $k = 1$,

$$w_{1+1} = 2i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right]^1$$

$$w_2 = 2i\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = i - \sqrt{3}$$

Para $k = 2$,

$$w_{2+1} = 2i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right]^2$$

$$w_3 = 2i\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = -\sqrt{3} - i$$

Para $k = 3$,

$$w_{3+1} = 2i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right]^3$$

$$w_4 = 2i \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right]^3 = -2i$$

Para $k = 4$,

$$w_{4+1} = 2i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right]^4$$

$$w_5 = 2i \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right]^4 = \sqrt{3} - i$$

Para $k = 5$,

$$w_{5+1} = 2i \cdot 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) \right]^5$$

$$w_6 = 2i \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right]^6 = \sqrt{3} + i$$

Observa-se que as raízes estão sendo determinadas com a potências de $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, logo esta é uma *raiz primitiva da unidade*.

Nesta etapa, podem surgir os questionamentos dos estudantes:

1) Como identificar a localização (quadrante/eixo) da raiz?

2) Qual a melhor forma para determinar as demais raízes?

Concluída todas as etapas dessa sequência didática, espera-se que os estudantes tenham clareza sobre a relação geométrica existente entre a quantidade de raízes, maior que 2, de um número complexo, e que esta corresponde ao número de vértices de um polígono regular inscrito numa circunferência de raio $\mid z \mid$. Espera-se, também, que os estudantes percebam que quando o número de raízes tende ao infinito, o número de lados do polígono tenda à circunferência. A verificação das ocorrências serão a partir das respostas dadas durante cada etapa.

5 Conclusão

Mesmo diante de todo os entraves existentes no ensino dos números complexos e a pouca ênfase dada pelo professores do ensino médio e/ou pelo currículo que deixa esse conteúdo à parte, faz-se necessário o estudo de números complexos, não apenas para a compreensão do cálculo de raízes de índice pares e radicandos negativos ou aplicabilidade dos algoritmos operatórios, mas para justificar determinados eventos em áreas como a Engenharia, por exemplo.

Espera-se que o desenvolvimento desse trabalho contribua, de forma significativa, na práxis do professor de Matemática que se propõe a ensinar números complexos e, principalmente, que a forma que a sequência didática, numa perspectiva de investigação matemática, apresentou-se seja, de maneira concreta uma facilitadora da aprendizagem do estudante na construção do entendimento da relação geométrica que existe entre as raízes do número complexo e os vértices de um polígono regular e que o programa gerado no software no MATLAB ofereça praticidade e eficiência nessa construção, minimizando todo o processo manual longo e cansativo às partes envolvidas no processo.

Referências

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria numeros complexos**. [S.l.]: Instituto de Matemaica Pura e Aplicada, 1992. Citado na página 15.

DANTE, L. R. Matemática: contexto e aplicações: Ensino médio são paulo: Ática, 2005. **Volume único**. Citado na página 46.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e equações algébricas**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado na página 15.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**. [S.l.]: São Paulo: Atual Editora, 2004. v. 6. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 72.

LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio, vol. 2. **Coleçao do Professor de Matemática, SBM**, 2006. Citado na página 15.

MARTINS, D. C.; PEREIRA, R. d. S. G.; PALHARINI, B. N. A investigação matemática como estratégia de ensino e aprendizagem: Uma pesquisa em um curso técnico. **Revista Ciências & Ideias ISSN: 2176-1477**, v. 8, n. 1, p. 86–102, 2017. Citado na página 29.

NEMIROVSKY, M. **O ensino da linguagem escrita**. [S.l.]: Artmed, 2002. Citado na página 28.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios**. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 6. Citado na página 15.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. [S.l.]: Autêntica Editora, 2003. v. 7. Citado na página 30.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher**, Sage Publications Sage CA: Thousand Oaks, CA, v. 15, n. 2, p. 4–14, 1986. Citado na página 28.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. [S.l.]: Penso Editora, 2015. Citado na página 28.

Anexos

MATLAB (R), acronismo de MATrix LABoratory, é um sistema interativo e linguagem de programação para computação numérica e visualização para as áreas científicas e técnicas. Seu elemento básico de dados é uma matriz. O MATLAB permite a solução de muitos problemas numéricos em uma fração do tempo que seria necessário para escrever um programa em uma linguagem como java, C ou Pascal. Além do mais, em MATLAB as soluções dos problemas são expressas de um modo bem próximo do que elas são escritas matematicamente.

O MATLAB é um sistema interativo cujo elemento básico de informação é uma matriz que não requer dimensionamento. Esse sistema permite a resolução de muitos problemas numéricos em apenas uma fração do tempo que se gastaria para escrever um programa semelhante.

O sotfware MATLAB não é gratuito, é preciso adquirir uma licença de uso dentre várias opções e diferentes valores, como por exemplo, para estudantes ou empresas, adquiridos através site https://www.mathworks.com ou com a OPENCADD que é a representante do MATLAB no Brasil no site https://www.opencadd.com.br.

Abaixo está o script com os algoritmos da programação realizada na proposta desse trabalho. Este script tem a coautoria do amigo Prof. Dr. Marcos Batista Figueredo.

```
clc
clear all
clear figure
%%Entrada para o numero complexo
a=input('Determine o coeficiente real = ');
b=input('Determine o coeficiente imaginario = ');%entrada do indice da raiz
n=input('Determine o indice do radical = '); %teste para verificar se o usuario nao digita errado
while n<2
    fprintf('indice menor que 2n nao compativel' );
```

```
    n=input('Determine o  indice do radical = ');
end
z=complex(a,b); %gera o numero complexo
re_x = real(z); %pega a parte real
im_x = imag(z); %pega a parte imaginario
theta = atan2(im_x, re_x); %calcula o argumento
abs_x   = sqrt(re_x*re_x + im_x*im_x);%calcula o modulo de z
ro = abs_x^(1/n);
for k=0:(n-1)
phi(k+1)=theta/n + k*2*pi/n;
end
w = ro*(cos(phi) +1i*sin(phi)); %calculo das raizes
th=0:pi/50:2*pi;
hold on;
title(sprintf('As %d raizes complexas de %g+%gi', n, real(z), imag(z)));
    if abs_x > ro
%           polar([0, angle_x], [0, abs_x], '-b.');
        set(gca,'nextplot','add');
        polar(angle(w([1:end,1])), abs(w([1:end,1])), ':r');
    else
 %          polar(angle(w([1:end,1])), abs(w([1:end,1])), ':m.');
        set(gca,'nextplot','add');
        polar([0, theta], [0, abs_x], '-b.');
    end
xlabel('Real');
ylabel('Img');
```

```
xunit=ro*cos(th);
yunit=ro*sin(th);
plot(xunit,yunit,'Color',[0.5 0.5 0.5]);
for i=1:n
    plot(real(w(i)),imag(w(i)),'ro','MarkerFaceColor','red')
end
axis equal;
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
set(ax,'YTickLabel',[],'XTickLabel',[]);
set(ax,'xtick',[]);
set(ax,'ytick',[]);
box off;
hold off;
```