UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

# ESTUDANDO AS EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL: UM CAMINHO PELA HISTÓRIA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PATRICIA COSTA CARDOSO

Feira de Santana

Agosto de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

# ESTUDANDO AS EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL: UM CAMINHO PELA HISTÓRIA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida.**

Feira de Santana
Agosto de 2024

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Cardoso, Patricia Costa
C266e Estudando as equações no ensino fundamental: um caminho pela história e resolução de problemas / Patricia Costa Cardoso. – 2024.
95 f.: il.

Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2024.

1. Equações. 2. História da matemática. 3. Resolução de problemas. 4. Sequência didática. I. Almeida, Kisnney Emiliano de, orient. II. Título. III. Universidade Estadual de Feira de Santana.

CDU 517.9:371.3

Renata Aline Souza Silva - Bibliotecária - CRB-5/1702

**Universidade Estadual de Feira de Santana**
**Departamento de Ciencias Exatas**
**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Patrícia Costa Cardoso do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana**

Aos oito dias do mês de agosto de dois mil e vinte quatro, às 16 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: https://meet.google.com/kmv-sagh-xer, da dissertação apresentada sob o título **"ESTUDANDO AS EQUAÇÕES NO ENSINO FUNDAMENTAL: UM CAMINHO PELA HISTÓRIA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS",** da discente **Patrícia Costa Cardoso,** do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS), Francismar Ferreira Lima (UTFPR) e Jany Santos Souza Goulart (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores. Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito APROVADO. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 08 de agosto de 2024.

Kisnney E. de Almeida

Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida (Orientador, UEFS)

Francismar Ferreira Lima

Prof. Dr. Francismar Ferreira Lima (UTFPR)

Prof.ª Dra. Jany Santos Souza Goulart (UEFS)

Visto do Coordenador:

# Estudando as equações no ensino fundamental: um caminho pela história e resolução de problemas.

PATRICIA COSTA CARDOSO
ORIENTADOR: Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida

20 de agosto de 2024

**Agradecimentos**

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me capacitar cada vez mais, todos os dias, para os desafios enfrentados nessa caminhada.

Agradeço a meu amado esposo por todo apoio, incentivo e por acreditar no meu potencial. Aos meus filhos por todo amor, carinho e compreensão. A minha mãe pela parceria e colaboração que sempre me dedicou.

Agradeço imensamente ao professor orientador, Prof. Dr. Kisnney Emiliano de Almeida pelas orientações, sugestões criativas, incentivo e disponibilidade para a construção desse trabalho.

Agradeço aos professores do Profmat - UEFS pelos ensinamentos compartilhados, pela compreensão e incentivo, em especial ao coordenador, professor Dr. Darlan Ferreira de Oliveira, pelo apoio, confiança e motivação durante toda trajetória do curso.

Aos meus colegas de curso, verdadeiros parceiros de todos os momentos, sou eternamente grata por todo estímulo, carinho, brincadeiras, almoços, lanches e confraternizações. Vocês colaboraram para que essa caminhada fosse menos árdua e mais prazerosa.

Por fim, agradeço as minhas amigas por toda colaboração, suporte e orações ao longo do percurso, aos colegas e a gestão escolar pela parceria e compreensão, e aos meus alunos que me fazem superar obstáculos todos os dias.

*Se as coisas são inatingíveis... ora!*
*Não é motivo para não querê-las...*
*Que tristes os caminhos, se não fora*
*A presença distante das estrelas!*
*(Mário Quintana )*

**Resumo**

O conhecimento matemático é de fundamental importância no mundo contemporâneo devido à sua aplicabilidade e à sua colaboração na formação de cidadãos críticos e atuantes perante às questões sociais. Diante das inquietações e indagações dos alunos sobre o uso, a compreensão e a aplicação da matemática no cotidiano, faz-se necessária a busca por soluções para os desafios de uma educação integral, nas quais competências e habilidades sejam desenvolvidas visando garantir as aprendizagens essenciais da educação básica a que todos os estudantes têm direito. Este trabalho tem como objetivo orientar a prática pedagógica para o ensino de equações em turmas do nono ano do Ensino Fundamental, percorrendo o caminho histórico e utilizando também a resolução de problemas como propostas metodológicas para o estudo das equações do 1º e 2º graus, além de sugerir uma abordagem para introdução ao ensino das equações diofantinas lineares de forma prática com situações problemas no contexto da vida real. Foram elaboradas três sequencias didáticas contemplando a história da matemática e a resolução de problemas fazendo uso de metodologias ativas e de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, como propostas para implementação dessas práticas pedagógicas na busca por uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

**Palavras-chaves**: Equações, História da matemática, Resolução de problemas, Sequência didática.

## Abstract

Mathematical knowledge is of fundamental importance in the contemporary world due to its applicability and its collaboration in the formation of critical and active citizens in the face of social issues. Faced with students' concerns and questions about the use, understanding and application of mathematics in everyday life, it is necessary to seek solutions to the challenges of a comprehensive education, in which skills and abilities are developed in order to guarantee the essential learning of basic education to which all students are entitled. The aim of this work is to guide pedagogical practice in the teaching of equations in classes in the ninth year of elementary school, covering the historical path and also using problem solving as methodological proposals for the study of 1st and 2nd degree equations, as well as suggesting an approach for introducing the teaching of linear Diophantine equations in a practical way with real-life problem situations. Three didactic sequences were developed, covering the history of mathematics and problem solving, using active methodologies and Digital Information and Communication Technologies, as proposals for implementing these pedagogical practices in the search for more meaningful and contextualized learning.



**Keywords:** Equations, History of Mathematics, Problem solving, Didactic sequence.

# Sumário

# Introdução

A matemática se desenvolveu ao longo da história da humanidade em diferentes períodos e culturas, motivada pelas necessidades diárias e pela curiosidade em entender o mundo à sua volta. Antigos textos matemáticos que se tem conhecimento como o Papiro de Moscou (Egito, 1850 a.C.) e o famoso Papiro de Ahmes ou Rhind (Egito, 1650 a.C.), contêm problemas de aritmética, geometria e álgebra, muitos deles relacionados a problemas do cotidiano, que fundamentaram alguns conteúdos que são abordados hoje na educação básica.

A matemática desempenha um papel muito importante nos dias atuais, estando presente em diversas atividades humanas desde as mais simples até as mais complexas. Em uma sociedade onde os avanços científicos e tecnológicos possibilitam maior rapidez na comunicação e facilitam o acesso às informações, esse componente curricular contribui com a construção e aquisição de conhecimentos que permitem ao aluno desenvolver o poder de argumentações, os raciocínios lógico e crítico para compreender e atuar no mundo.

Esse conhecimento trouxe inúmeras contribuições para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, de acordo com Skovsmose:

> [...] é impossível imaginar o desenvolvimento de uma sociedade do tipo que conhecemos sem que a tecnologia tenha um papel destacado, e com a matemática tendo um papel dominante na sua formação. Dessa forma, a matemática tem implicações importantes para o desenvolvimento e organização da sociedade - embora essas implicações sejam difíceis de identificar (SKOVSMOSE, 2001, p. 40).

Diversas áreas do conhecimento - ciências naturais, engenharia, informática, economia, entre outras - se desenvolveram e avançaram devido ao uso da linguagem simbólica da matemática - as equações - que colaboraram com sistematizações e generalizações de estudos e com a construção de teorias que permitiram entender fenômenos, explicar acontecimentos do cotidiano, produzir objetos e oferecer serviços para uso da sociedade. Sendo assim, as equações desempenharam uma função fundamental na construção do conhecimento e atualmente são indispensáveis para o progresso das ciências e da tecnologia.

Diante das mudanças ocorridas no mundo, a educação também precisou mudar e se atualizar. A educação básica foi reformulada e, nos últimos anos, novos documentos foram elaborados orientando e definindo as diretrizes curriculares para uma educação de qualidade para todos, buscando garantir um conjunto de aprendizagens essenciais ao desenvolvimento integral dos estudantes por meio de competências e habilidades que promovam o ensino de acordo com as necessidades e interesses dos alunos, e com os desafios da sociedade contemporânea Brasil (2017).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) indica que:

> [...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho)[...] referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais (BRASIL, 2017, p. 13)

Diante dessas demandas, o sistema de ensino tão habituado a uma educação baseada na transmissão de informação precisou repensar a sua prática pedagógica, mobilizado pelos baixos índices apontados pelas avaliações nacionais e internacionais - 50% dos estudantes não têm o nível básico em leitura e 73% em matemática (PISA[1] 2022) - pelos índices elevados de abandono escolar (5,4% taxa de 2023 - Pnad [2]), pelo desinteresse dos alunos e pelo avanço tecnológico.

Perante essa realidade educacional, a escola precisou repensar seu papel, pois não é mais o único lugar onde se aprende, visto que o conhecimento está por toda parte com a expansão do uso dos aparelhos digitais e da internet, mas ainda é um espaço onde o conhecimento é construído. Buscando acompanhar a evolução do mundo moderno, porém nem sempre com a mesma rapidez e dinamismo, a escola tem implementado diferentes metodologias e recursos educacionais para uma educação eficiente e de qualidade. O professor também tem adotado uma nova postura: seu papel atualmente é de mediador, aquele que orienta e acompanha o estudante no seu processo de aprendizagem.

Nessa perspectiva, a matemática, tão presente em diversas áreas da atividade humana, precisa adequar o trabalho escolar à essa nova realidade. Observamos que ainda é muito presente na sala de aula o desinteresse e desmotivação dos alunos em relação à aprendizagem dessa disciplina, em decorrência de fatores como: dificuldades em aprender os conteúdos devido, em sua maioria, aos métodos tradicionais de ensino; deficiência na aprendizagem de conteúdos que são pré-requisitos para um novo aprendizado; dificuldade

[1] Programme for International Student Assessment, avaliação realizada a cada três anos, com estudantes aos 15 anos

[2] Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios. ⟨https://www.cartacapital.com.br/educacao/abandono-escolar-atinge-recorde-historico-entre-criancas-e-adolescentes-do-ensino-fundamental-mostra-ibge/⟩

em relacionar os conteúdos com situações práticas da vida real e culto ao mito de que essa é uma ciência pronta e acabada, na qual se aprende fórmulas e algoritmos para aplicá-los como o professor ensinou.

Portanto, essa pesquisa justifica-se pela necessidade de propor um ensino de equações no Ensino Fundamental que desperte o interesse do aluno, colocando-o como protagonista do seu aprendizado; favoreça a aprendizagem significativa e contextualizada através da história da matemática, oportunizando a pesquisa e investigação; desenvolva a habilidade de resolver problemas e relacioná-los com situações da vida real, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, permitindo assim, atuar e intervir nos problemas do cotidiano e sociais; e que auxilie nas respostas às indagações e inquietações sobre o saber e o fazer matemático.

A partir desse recorte introdutório, emergiu a questão que norteou a elaboração das sequências didáticas configuradas como o cerne deste trabalho: *Como despertar nos estudantes o interesse pelo estudo das equações por meio de sequências didáticas assistidas por elementos da história da matemática e da resolução de problemas?*

Nosso objeto de estudo são as equações e o objetivo geral é discutir o estudo das equações dos 1º e 2º graus e das equações diofantinas lineares no nono ano do Ensino Fundamental com o auxílio da história da matemática e da resolução de problemas. Além disso, os objetivos específicos são: apresentar argumentos que justifiquem o uso da história da matemática e da resolução de problemas no estudo das equações; desenvolver sequências didáticas para uma aprendizagem contextualizada e significativa das equações; descrever sequências didáticas para introdução ao estudo das equações diofantinas lineares no Ensino Fundamental.

Este trabalho está estruturado em dois capítulos: no primeiro capítulo discutimos sobre o ensino da matemática, destacando a sua importância na formação dos educandos, as mudanças ocorridas ao longo dos anos e o currículo escolar, embasados nos documentos: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Ainda nesse capítulo discutimos sobre os desafios do ensino e aprendizagem desse componente curricular, o papel da Educação Matemática na busca por melhorias no enfrentamento desses desafios, a postura do professor como mediador, e o uso da história da matemática e resolução de problemas como propostas metodológicas para o ensino das equações, ressaltando a sua importância e a função do pensamento algébrico no desenvolvimento das habilidades intelectuais.

O segundo capítulo apresenta as sequências didáticas para o ensino das equações de forma atrativa e contextualizada, favorecendo o protagonismo estudantil. Iniciamos com um breve relato sobre as equações demonstrando como a história pode trazer elementos tão interessantes e enriquecedores para a aprendizagem. Descrevemos três sequências didáticas que abordam os seguintes conteúdos: Equações Polinomiais do 1º grau, Equações Polinomiais do 2º grau e Equações Diofantinas Lineares, acompanhadas das suas respectivas atividades e orientações para as aplicações. Cada sequência apresenta os objetivos, conteúdos trabalhados, habilidades da BNCC, materiais necessários e detalhamento das aulas com indicações para avaliação do aprendizado. Elaboramos uma diversidade de atividades pautadas na história da matemática e da resolução de problemas incluindo metodologias ativas como Gamificação e Rotação por Estações, além de jogos, atividades de pesquisa e investigação e o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação.

Por fim, tecemos as considerações finais retomando os objetivos da pesquisa e discorrendo sobre suas contribuições para o ensino das equações no Ensino Fundamental.

# Capítulo 1

# O ensino da matemática

O ensino da matemática ao longo dos anos tem sido bastante discutido e passou por algumas mudanças com o surgimento da Educação Matemática, a inserção de novas metodologias de ensino e a elaboração das diretrizes pedagógicas. No entanto, ainda encontramos bastante arraigado nas aulas o modelo tradicional de ensino, no qual o aluno é um ator passivo, apenas um receptor das informações transmitidas pelo professor, de forma expositiva (FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005; FIORENTINI; LORENZATO, 2010).

Para muitos professores e alunos, a matemática é vista como um corpo de conhecimento pronto e acabado, onde se entendem que seus conteúdos são demasiadamente abstratos aos quais apenas mentes privilegiadas podem ter acesso (UNESCO, 2016; CARVALHO, 2014). D'Ambrosio enfatiza, "Uma consequência disso é uma educação de reprodução, formando indivíduos subordinados, passivos e acríticos" (D'AMBROSIO, U, 2012, p. 44). Além disso, vários professores acreditam que a aprendizagem ocorre quanto maior for o número de exercícios resolvidos, e os alunos, por sua vez, passam a acreditar que o estudo se resume a aprender fórmulas e algoritmos, e aplicá-los de acordo como foi ensinado pelo professor, sem perceber qualquer relação entre os problemas resolvidos e situações práticas da vida real (D'AMBROSIO, B, 1989; D'AMBROSIO, U, 2012; DUARTE; CALEJON, 2014).

De forma geral, vivenciamos um descontentamento com o ensino da matemática em todos os níveis de escolaridade, no qual sua função no currículo escolar, seu verdadeiro significado, a formação dos professores e as metodologias de ensino passam a ser questionadas, pesquisadas e discutidas de forma mais consciente e contextualizada diante de resultados nada satisfatórios apontados na prática pedagógica e evidenciados pelos índices das avaliações nacionais e internacionais (MACHADO et al., 2008; UNESCO, 2016).

A matemática está presente no nosso dia a dia como uma aliada do desenvolvimento da sociedade e dos avanços tecnológicos, presente desde as ações mais simples até as mais complexas, responsável pelo desempenho do papel do aluno como cidadão que é capaz de se relacionar com o mundo ao seu redor, fazer interações e modificações em seu ambiente, intervindo de forma consciente e crítica. A Base Nacional Comum Curricular

(BNCC) destaca:

> O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2017, p. 265).

Ao refletir sobre o ensino desse componente curricular, o professor deve considerar as principais características, métodos, ramificações e aplicações dessa ciência. É importante conhecer também a história de vida dos alunos e seus conhecimentos prévios sobre os assuntos, além de ter bem definidas as suas concepções sobre a matemática, uma vez que a escolha das suas práticas em sala de aula, a definição dos objetivos e conteúdos e as formas de avaliação estão diretamente relacionadas a essas concepções (BRASIL, 1998).

O professor que pretende desempenhar a função de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno precisa ter uma formação sólida desse saber e a idealização de que se trata de uma ciência dinâmica, viva e aberta a novos conhecimentos.

Além disso, o professor precisa transformar o saber matemático (científico) em um saber escolar, passível de ser ensinado e aprendido pelo aluno (transposição didática [1]). Essa transformação do conhecimento passa por mudanças de natureza epistemológica, mais essencialmente por mudanças de ordem social e cultural, que sejam contextualizadas em novas situações, proporcionando uma abordagem mais coerente à prática educativa e diminuindo a distância entre o que o aluno aprende e sua aplicação no cotidiano (o saber e o fazer matemático).

> A matemática é uma das mais importantes "ferramentas" para a humanidade e, sem ela, o homem jamais seria capaz de sair das cavernas para, tempos depois, inventar o computador e viajar pelos espaços siderais. Portanto, ensinar matemática, é ensinar a viver, é capacitar o aluno a perceber o seu próprio corpo no espaço físico, estabelecendo relações de semelhanças e diferenças e deslocando-se com segurança em diferentes direções (SELBACH, 2010, p. 39).

Podemos dizer que o ensino de matemática pertinente e de qualidade permite desenvolver o senso crítico e a criatividade, culminando na formação de sujeitos atuantes na sociedade. Esse deve colaborar para a resolução de problemas enfrentados no cotidiano, trazendo significado real para tal conhecimento, propiciando ao aluno o entendimento de que essa é uma ferramenta fundamental de modelagem para compreender e agir no mundo.

[1] Teoria da Transposição Didática, Chevallard, 1991. p.39

## 1.1 Os desafios do ensino e aprendizagem matemática

A evolução tecnológica, científica e econômica provocou mudanças sociais que colocaram a humanidade diante de vários desafios. Nesse contexto, a educação se vê diante de novas formas de transmissão da informação e de assimilação do conhecimento que ocorrem rapidamente e com mais intensidade. Sendo assim, práticas pedagógicas inovadoras e ativas são discutidas e implantadas para favorecer o protagonismo estudantil no processo de construção do seu conhecimento, tendo como foco o desenvolvimento integral (cognitivo e emocional), no qual o professor assume o papel de orientador e mediador, obtendo assim um ensino transformador, estimulante e de qualidade, que atende às demandas do mundo atual(DUARTE; CALEJON, 2014; MORAN et al., 2015; BRASIL, 2017).

No que se refere ao ensino e aprendizagem da matemática, os desafios são ainda maiores, uma vez que as competências e habilidades pertinentes à educação básica não são contempladas ao final do processo: conforme apontam as avaliações nacionais e internacionais, há um baixo rendimento do conhecimento matemático dos estudantes. Além disso, a matemática é considerada por muitos como uma disciplina difícil, abstrata, sem conexão com a vida prática e que não é acessível a todos. Portanto, " Essas muitas incompreensões afetam o ensino e constituem obstáculos a uma educação matemática de qualidade para todos" (UNESCO, 2016, p. 10).

Buscando enfrentar esses desafios é interessante salientar que as expectativas relacionadas ao letramento matemático foram modificadas pelos efeitos das mudanças sociais contemporâneas, citadas anteriormente. Nesse sentido, a BNCC define:

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (BRASIL, 2017, p. 266).

É importante ressaltar que o letramento matemático deve oportunizar aos alunos o contato progressivo com o complexo mundo digital, para que eles possam agir e atuar nesse cenário de avanços tecnológicos; também evidenciamos que o ensino dessa disciplina não é o único a contribuir com esse letramento, outras áreas do conhecimento podem interagir nesse processo apresentando variadas formas de ensino e permitindo um aprendizado multidisciplinar, suscitando a criatividade e os raciocínios lógico e crítico .

Na busca por soluções e alternativas que auxiliem na obtenção de resultados positivos no ensino e aprendizagem dessa ciência surge a Educação Matemática.

Para Carvalho (1994), "A Educação Matemática é uma atividade essencialmente pluri e interdisciplinar. Constitui um grande arco, onde há lugar para pesquisas e trabalhos dos mais diferentes tipos".

De acordo com Flemming, Luz e Mello (2005):

> Podemos dizer que a educação matemática é uma área de estudos e pesquisas que possui sólidas bases na Educação e na Matemática, mas que também está contextualizada em ambientes interdisciplinares. Por este motivo, caracteriza-se como um campo de pesquisa amplo, que busca a melhoria do processo ensino-aprendizagem de Matemática (FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005, p. 13).

A Educação Matemática tem realizado pesquisas e debates que buscam discutir os problemas enfrentados no ensino dessa disciplina e as metas para uma educação básica de qualidade para todos, que vão além do letramento matemático. Nesse contexto, surgem novas tendências nessa área que apresentam diferentes abordagens aplicadas ao processo de ensino aprendizagem (BICUDO; PAULO, 2011).

Identificar as diferentes tendências pedagógicas para o ensino da matemática não é uma tarefa fácil. Ao considerar os aspectos que caracterizam uma tendência, não basta considerar os diferentes modos de ensinar, pois para cada percepção de ensino há também diversas concepções de aprendizagem e de conhecimento matemático. Para Fiorentini (1995):

> O modo de ensinar sofre influência também dos valores e das finalidades que o professor atribui ao ensino da matemática, da forma como concebe a relação professor-aluno e, além disso, da visão que tem de mundo, de sociedade e de homem (FIORENTINI, 1995, p. 4).

Por isso, se um professor entende a matemática como uma ciência pronta e acabada, ele terá uma prática pedagógica diferente de um que a compreende como uma ciência viva, dinâmica, que atende às necessidades da sociedade. Do mesmo modo, se o professor acredita que a aprendizagem acontece por meio da memorização de fórmulas e técnicas e pela repetição de exercícios, sua prática não será igual à de um professor que concebe a aprendizagem por meio da pesquisa e investigação que levam à reflexão e tomada de decisões diante da resolução de problemas, favorecendo a construção e aplicação dos conceitos matemáticos (FIORENTINI, 1995).

Refletindo sobre a necessidade de renovação no ensino da matemática, as propostas de abordagens pedagógicas que buscam modificar as concepções dos alunos e professores sobre a natureza desse componente curricular, o ato de fazer e como se aprende matemática nortearam a escolha das tendências em Educação Matemática apresentadas nesse trabalho. Foi feita a opção por propostas que levam em consideração o contexto social do aluno e suas individualidades, os seus conhecimentos prévios, o seu papel como protagonista ativo no processo de construção do conhecimento e a função do professor como mediador entre o saber matemático e o aluno.

> Estas propostas partem do princípio de que o aluno está constantemente interpretando seu mundo e suas experiências e essas interpretações ocorrem inclusive quando se trata de um fenômeno matemático. São as interpretações dos alunos que constituem o saber matemático "de fato"(D'AMBROSIO, B, 1989, p. 16).

Quando se discute sobre as abordagens de ensino, não se pode deixar de mencionar que no processo de ensino e aprendizagem o papel do professor e do aluno precisam estar bem definidos e, nessa perspectiva, delinear como o professor deve se preparar para conduzir esse ensino e como o aluno aplicará uma postura mais ativa na construção da sua aprendizagem também são desafios que precisam ser enfrentados.

No ensino da matemática, são constantes as indagações e inquietações dos alunos sobre a sua aplicabilidade, utilidade e compreensão na vida real. Muitos estudantes enfrentam dificuldades com o aprendizado dos conteúdos, outros não apreciam tanto a disciplina porque a acham difícil demais e a maioria não tem interesse em áreas de conhecimento nas quais essa ciência é essencial.

Para o professor, dentre as diversas demandas da sua prática, destacam-se: a responsabilidade em facilitar a compreensão e aplicação dos conceitos matemáticos relacionando-os com situações práticas e reais; promover um ambiente de aprendizagem prazeroso e colaborativo, com auxílio dos recursos digitais para tornar o ensino mais interativo e dinâmico; além da importância da formação inicial e continuada que precisa ser completa, ou seja, é preciso um conhecimento aprofundado da matemática, mas também conhecimentos pedagógicos, para uma prática que auxilie no entendimento e orientação às necessidades e expectativas dos estudantes diante do mundo moderno.

Como sinaliza Lima (2007):

> O bom professor de matemática é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. Não há fórmulas mágicas para ensinar matemática. A única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente (LIMA, 2007, p. 5).

Sendo assim, a relação professor-aluno no processo de ensinar e aprender matemática deve contemplar atitudes que minimizem a distância entre a teoria e a prática, entre o que se espera e o que realmente ocorre na sala de aula.

> No contexto atual é primordial uma reflexão sobre o desafio de melhoria da qualidade de ensino e, se faz necessário, uma quebra de paradigma no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Pensamos uma reformulação na formação do professor no intuito de desenvolver práticas transformadoras e totalmente correlacionadas com o mundo tecnológico (PONTES, 2019, p. 4).

Diante do exposto, fica claro que os desafios do ensino e aprendizagem da matemática são diversos: além dos que foram citados anteriormente, é importante destacar que a seleção dos conteúdos, a distribuição da carga horária, a estrutura escolar e a deficiência no desempenho das habilidades relacionadas aos objetos de conhecimento são problemas que também interferem na prática pedagógica. Todos esses desafios são potencializados pelas mudanças que ocorrem cotidianamente em uma sociedade cada vez mais digital, onde os números e as informações estão progressivamente mais presentes e se propagam rapidamente com os avanços tecnológicos.

## 1.2 Propostas metodológicas para o ensino da matemática

O ensino da matemática tem um papel fundamental na formação dos educandos. Por isso, as pesquisas e discussões referentes às propostas metodológicas e diretrizes pedagógicas visam orientar a prática escolar destacando os objetivos dessa área do conhecimento, entre eles: o estímulo à curiosidade, o interesse e a investigação, o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e ampliação da capacidade de resolução de problemas e de compreensão do mundo à sua volta, através da criatividade e de um olhar crítico sobre as questões sociais.

Em decorrência do avanço da tecnologia, novos recursos e ferramentas foram colocados à disposição do ensino e da aprendizagem, oportunizando que um número cada vez maior de estudantes possam desenvolver suas habilidades e competências em relação à matemática, mostrando-a como uma ciência viva, estimulante e em sintonia com o mundo contemporâneo.

Dentre as novas ferramentas que auxiliam o ensino e a aprendizagem destacamos as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), uma realidade presente nas atividades diárias dos alunos e professores, mas ainda utilizada de forma muito tímida na prática pedagógica da sala de aula. Como observou Valente (2018):

> As tentativas de uso das tecnologias digitais na educação podem ser caracterizadas como pontuais e, em muitas situações, como periféricas, uma vez que não proporcionaram inovações nas concepções educacionais e nas atividades pedagógicas. Elas não mudaram a maneira como o currículo é desenvolvido e nem alteraram os processos de ensino e de aprendizagem (VALENTE, 2018, p. 22-23).

No entanto, a nova concepção de formação para atender as demandas da humanidade em uma cultura digital[2] exige criatividade, imaginação, pensamento crítico, habilidade de se posicionar diante das situações e de agir na busca por soluções para os problemas. Dessa forma, as tecnologias digitais contribuem com práticas pedagógicas que envolvem e engajam os alunos, tornando-os protagonistas da sua aprendizagem através das metodologias ativas.

No âmbito das mudanças no cenário educacional, as metodologias ativas ganham o apoio das tecnologias digitais para a elaboração de aulas mais dinâmicas e significativas que proporcionem aos alunos experiências motivantes, envolventes e que despertem o interesse para a aprendizagem. Bacich e Moran (2017) afirma:

> Metodologias ativas englobam uma concepção do processo de ensino e aprendizagem que considera a participação efetiva dos alunos na construção da sua aprendizagem, valorizando as diferentes formas pelas quais eles podem ser envolvidos nesse processo para que aprendam melhor, em seu próprio ritmo, tempo e estilo (BACICH; MORAN, 2017, p. 23).

Conforme Pereira (2012):

> Por Metodologia Ativa entendemos todo o processo de organização da aprendizagem (estratégias didáticas) cuja centralidade do processo esteja, efetivamente, no estudante. Contrariando assim a exclusividade da ação intelectual do professor e a representação do livro didático como fontes exclusivas do saber na sala de aula (PEREIRA, 2012, p. 6).

Quando se discute sobre as metodologias de ensino e aprendizagem, os PCN (1998) sinalizam:

> Nesse aspecto, a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios (BRASIL, 1998, p. 27).

[2] Definida por Manuel Castells (2011) ⟨https://ibebrasil.org.br/areas-atuacao/cultura-digital-2/⟩

De acordo com Moran, aprendemos de várias formas, em diversos campos, através de situações concretas, mas também por ideias e teorias. De fato, toda aprendizagem é ativa quando se avança gradativamente de níveis de conhecimentos e competências nas diversas dimensões da vida (MORAN et al., 2015).

As metodologias ativas utilizadas na elaboração das sequências didáticas para o ensino das equações foram: a Rotação por estações e a Gamificação. A primeira traz um circuito de atividades planejadas para uma mesma aula, na qual cada estação tem uma atividade diferente que deve abordar o conteúdo ou parte dele com uso da tecnologia em, pelo menos, alguma das estações, como define Sassaki (2016) na revista Nova escola:

> A rotação por estações é um modelo de ensino híbrido bastante dinâmico, inspirado nos cantos diversificados da Educação Infantil. Ela consiste em preparar diferentes estações de aprendizagem, ao menos uma delas com algum recurso tecnológico. (SASSAKI, 2016, p.1)

A autoria do termo gamification é do desenvolvedor de jogos eletrônicos Nick Pelling, que em 2002 utilizou-o para referir-se ao conjunto de práticas que desenvolviam interfaces com base em princípios de jogabilidade. A gamificação na educação consiste em trazer alguns elementos e mecânicas dos jogos para as atividades pedagógicas, ou seja, a utilização dos recursos dos jogos fora do ambiente de um jogo. De acordo com Silva et al. (2014), temos:

> Gamificação tem como base a ação de se pensar como em um jogo, utilizando as sistemáticas e mecânicas do ato de jogar em um contexto fora de jogo. A gamificação abrange a utilização de mecanismos de jogos para a resolução de problemas e para a motivação e o engajamento de um determinado público (SILVA et al., 2014, p.15).

Nesse sentido, ao abordar as tendências em Educação Matemática são apresentadas propostas metodológicas que visam contribuir para a qualidade do ensino sob variadas formas de trabalho embasadas em diferentes teorias ou bases epistemológicas. Para Lopes e Borba (1994 apud FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005):

> [...] uma tendência é uma forma de trabalho que surgiu a partir da busca de soluções para os problemas da Educação Matemática. A partir do momento que é usada por muitos professores ou, mesmo que pouco utilizada, resulte em experiências bem sucedidas, estamos diante de uma verdadeira tendência (FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005, p. 15).

Neste trabalho, as metodologias de ensino utilizadas visam proporcionar um ensino mais dinâmico e interessante; é importante ressaltar que o professor pode fazer uso de mais de uma tendência da Educação Matemática, fazendo inclusive a interação entre elas em uma mesma atividade.

### 1.2.1 História da Matemática

Nos últimos anos, muitas pesquisas e discussões sobre o uso da história da matemática, como proposta metodológica, têm sido realizadas; diversos autores apresentam suas opiniões sobre as possibilidades que esse uso pode trazer ao processo de ensino e aprendizagem Mendes (2013), Miguel e Miorim (2019), Roque (2014), Chaquiam (2017).

Revelar a matemática como uma construção humana ao longo do desenvolvimento das civilizações, construída a partir das necessidades e preocupações diárias, compreendendo a origem das ideias que produziram todo conhecimento que hoje conhecemos através de teorias e conceitos formalizados, mas que demandou muitos esforços ocorridos em diferentes momentos, apresenta-se como um recurso atrativo que, aliado a outras metodologias, pode auxiliar na abordagem dos conteúdos em sala de aula, despertando o interesse do aluno e ajudando a responder alguns dos "porquês" matemáticos.

Analisando as justificativas para o uso da história da matemática, D'ambrosio, U. (1996) salienta:

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber (D'AMBROSIO, U., 1999, p. 97).

Fortalecendo as diversas percepções sobre como a história pode favorecer o ensino, destaca Roque (2014):

> A história da matemática ajudaria os estudantes a adquirirem um sentido de diversidade, sendo o reconhecimento de diferentes contextos e necessidades um importante componente na elaboração do corpo de conhecimentos que chamamos matemática. Neste último sentido, seria possível conceber uma educação matemática realmente histórica, sem simplificações (ROQUE, 2014, p. 169).

Considerando que a história da matemática pode contribuir com a prática educacional com enfoque motivador, curricular e também cultural[3], os PCN sinalizam:

[3]Fried classifica as iniciativas de uso da história para o ensino em três temas: motivacional, curricular e cultural ( apud ROQUE, 2014)

> [...]conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural (BRASIL, 1998, p. 42).

Colaborando ainda com as discussões sobre o potencial pedagógico dessa proposta metodológica na abordagem dos conteúdos, Chaquiam (2017), observa:

> [..] os estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática, emerge como uma possibilidade de buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada (CHAQUIAM, 2017, p. 14).

Nesse contexto, é possível destacar que a construção dos significados matemáticos produzidos durante muitos anos se apresenta como possibilidades didáticas que viabilizam a aprendizagem de conceitos, propriedades e teorias estimuladas pela pesquisa, estudo e investigação em sala de aula.

Além disso, a inserção da história da matemática como abordagem didática é discutida também pela sua importância na formação dos professores no ensino superior. Nesse sentido, Mendes e Chaquiam (2016) chamam atenção para a formação de um profissional mais comprometido com o trabalho educativo desenvolvido no contexto sociocultural no qual está inserido.

> [...]essa reorientação curricular deve sugerir a promoção de discussões sobre as possibilidades didáticas e conceituais da investigação histórica em sala de aula nessa formação de professores de matemática, tendo em vista suas implicações no desenvolvimento do processo educativo da Educação Básica, de modo a estimular nos professores em formação, o desenvolvimento de habilidades investigativas e reflexivas acerca do desenvolvimento conceitual da matemática sob uma perspectiva históricoepistemológica, a ser aprendida por eles e que serão ensinadas na Educação Básica (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 24)

No entanto, se faz necessário enfatizar que é preciso estar atento como a história deve ser trabalhada em sala de aula para que possa atingir os objetivos propostos no processo de ensino e aprendizagem na educação básica; nesse aspecto Mendes (2013), esclarece:

> Quando alguém se depara pela primeira vez com a expressão *o uso da história no ensino da matemática*, quase sempre se confunde por pensar que se trata apenas do uso de narrativas que se referem a datas, nomes, locais e feitos heroicos relacionados à Matemática e muitas vezes desvinculados dos conteúdos que os professores se propõem a ensinar a seus alunos (MENDES, 2013, p. 68).

A história da matemática como recurso didático no ensino pode colaborar para exploração e elaboração dos conceitos e ideias, favorecendo a ampliação e enriquecendo a aprendizagem por meio da pesquisa, investigação, problematização e contextualização inserida na prática educacional com o intuito de minimizar as dificuldades existentes.

Vale ressaltar que é preciso ter atenção para não fazer uso de pequenas histórias, isoladas, às vezes enganadoras, que são apresentadas nos livros didáticos mais como entretenimento, ou seja, histórias anedotárias (FREUDENTHAL, 1981 apud D'AMBROSIO, U., 2021). Com base no exposto por Freudthental, D'Ambrosio, U. (2021) reforça que há possibilidade de se trabalhar com uma história da matemática que seja atrativa e interessante, evitando distorções e atentando para a contextualização de uma matemática correta.

Nesse sentido, Chaquiam (2016) também se preocupa com a forma como a história da matemática será utilizada para evitar que seja constituída apenas de forma ilustrativa, presa a fatos isolados, nomes célebres, datas e fatos pitorescos.

Conhecer a história da matemática permite ao professor planejar situações didáticas que favoreçam a construção de uma história articulada com a evolução dos conteúdos matemáticos, possibilitando o seu entendimento, identificando mudanças através de comparações entre diferentes fases da humanidade e ajudando na explicação da importância desse componente curricular para a sociedade atual.

### 1.2.2 Resolução de Problemas

A resolução de problemas há algum tempo vem sendo discutida na Educação Matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004) como uma metodologia de ensino que permite a participação ativa do aluno, possibilitando a elaboração de perguntas, formulação de conjecturas e a comparação de resultados, colaborando com o desenvolvimento da habilidade de fazer generalizações. Dessa forma, o aprendizado dos conteúdos matemáticos acontece de forma mais interativa e significativa, uma vez que problemas contextualizados podem dar sentido ao que está sendo aprendido e exigem o pensamento produtivo do aluno, ao invés de apenas repetição de rotinas aprendidas.

De acordo com os PCN:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (SCHOENFELD, 1985 apud BRASIL, 1998, p. 40).

A resolução de problemas como metodologia de ensino propõe que o professor trabalhe com os alunos situações problemas que despertem a curiosidade e favoreçam a investigação e exploração dos conceitos matemáticos. O aluno deve ser levado a interpretar o enunciado do problema e desenvolver estratégias para resolvê-lo. Assim como na história da matemática, cuja construção foi motivada por vários tipos de problemas: de ordem prática, vinculados a outras ciências e inerentes à própria matemática, respondendo a perguntas de diferentes origens e contextos (BRASIL, 1998).

Não se pode deixar de caracterizar algumas situações que se entendem por problemas, para que, ao fazer uso da metodologia, os objetivos possam ser bem definidos e verdadeiramente atingidos.

Para Echerría e Pozo (1998) uma situação é concebida como um problema na medida que "não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma um processo de reflexão ou tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos."

De acordo com Van de Walle (2009) citado por Romanatto (2012), "problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta."

Ainda sobre a caracterização de um problema, os PCN destacam "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la (BRASIL, 1998)."

Nessa perspectiva, faz-se necessária uma breve discussão sobre a forma como os professores têm trabalhado a resolução de problemas na sua prática e como entendem o papel dessa metodologia de ensino. De acordo com os PCN, acorre em muitas situações dos problemas apresentados aos alunos não serem verdadeiros problemas por não conterem um desafio, nem o processo de verificação da solução e por permitirem apenas a aplicação de procedimentos adequados para dar a resposta correta. Além disso, em relação ao conhecimento disposto pelo aluno, o que é um problema para um pode não ser para outro (BRASIL, 1998).

O professor desempenha uma função muito importante ao aplicar a metodologia de resolução de problemas na sua prática pedagógica: ele é responsável pela escolha dos problemas a serem trabalhados, buscando selecionar conteúdos adequados que despertem o interesse e seja acessível ao nível de aprendizado do educando; deve orientar e acompanhar as discussões sobre as estratégias para as soluções, incentivar e valorizar a escolha por métodos diferentes de resolução e validar não apenas a resposta final, mas todo o processo desenvolvido.

Polya [4] foi um dos precursores no que diz respeito ao ensino com a resolução de problemas, discutindo a criatividade e a heurística dessa prática pedagógica. Ele destaca como o professor pode trabalhar com problemas em sala de aula visando desenvolver o pensamento matemático:

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (POLYA, 1995, p. v)

A resolução de problemas, de acordo com Polya, deve acontecer em quatro etapas fundamentais que são: a compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano e a validação da solução. Para o autor, essas fases de trabalho são interconectadas e cada uma tem sua importância; deixar de aplicar alguma delas pode trazer resultados insuficientes para a solução completa do problema.

Onuchic (1999) define que "problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver". Partindo dessa concepção, a resolução de problemas como metodologia de ensino deve despertar o interesse do aluno para solução de problemas que apresentem um desafio a ser resolvido, permitindo a investigação, o questionamento e a elaboração de novos conceitos que propiciem a construção do conhecimento através de novas ideias e experiências.

A resolução de problemas é uma habilidade que deve ser desenvolvida num contexto de diferentes áreas do conhecimento e nos variados níveis de ensino, pois, em uma sociedade em constante transformação faz-se necessário que o estudante seja capaz de aplicar essa habilidade para atuar diante dos diversos problemas sociais da atualidade.

[4] A tradução da sua obra para o português foi intitulada *A arte de resolver problemas*, 1986

## 1.3 Concepções sobre o ensino das equações no Ensino Fundamental

Durante muito tempo, utilizavam-se palavras e símbolos para representar o que hoje conhecemos como equação. Através da introdução das letras para representar valores desconhecidos, a resolução de problemas tornou-se mais fácil, a álgebra se desenvolveu e trouxe grande evolução para a matemática, sendo as equações hoje consideradas, o idioma da álgebra.

O ensino da álgebra na educação básica é orientado por diretrizes curriculares que destacam o papel fundamental desse campo do conhecimento para auxiliar o aluno na percepção das ideias de regularidades, generalizações de propriedades e construção de uma linguagem simbólica para representação de um problema, contribuindo com o desenvolvimento do pensamento algébrico. De acordo com a BNCC, a unidade temática Álgebra tem como finalidade desenvolver o pensamento algébrico:

> [...]pensamento algébrico - que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2017, p. 270).

No âmbito ainda dos documentos, os PCN apontam que "O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (BRASIL, 1998, p. 115). Complementam discorrendo sobre o pensamento algébrico "Existe um razoável consenso de que para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico o aluno deve estar necessariamente engajado em atividades que inter-relacionem as diferentes concepções da Álgebra" (BRASIL, 1998, p. 116).

Neste momento, entendemos que faz-se necessário distinguir álgebra e pensamento algébrico. De acordo com Squalli (2002, p. 277), a álgebra é como um "tipo de atividade matemática e o pensamento algébrico, um conjunto de habilidades intelectuais que intervêm nessas atividades"; para o autor, a álgebra e o pensamento algébrico são indissociáveis e complementares.

Para (LINS, 1992) citado por Nacarato e Custódio (2018, p. 16) "o pensamento algébrico é compreendido como um meio de produção de significados, e a álgebra, um conteúdo que faz sentido a partir desse pensamento. É possível produzir sentido para a álgebra de muitas maneiras diferentes, e o pensamento algébrico é uma delas".

Nessa perspectiva, as orientações da BNCC para o desenvolvimento do pensamento algébrico indicam que as ideias matemáticas essenciais devem enfatizar o uso de uma linguagem simbólica, o estabelecimento de generalizações, a observação de interdependência e equivalência de grandezas e a resolução de problemas através das equações e inequações.

As equações são importantes ferramentas para o desenvolvimento da humanidade, foram construídas, ao longo da história, por pessoas que buscaram compreender algo ou sentiram a necessidade de transformar uma coisa complicada em algo mais simples. Para se chegar as equações como às conhecemos hoje foi necessária uma longa jornada histórica e conceitual que contou com a colaboração de muitos cientistas em lugares e momentos distintos Crease (2011).

O estudo sobre as equações tem início no sétimo ano, com as equações do 1º grau; neste momento, os alunos começam a aprender a álgebra de forma sistematizada, com a introdução das letras representando os valores desconhecidos (incógnitas), dando início a um trabalho de generalização e abstração. Algumas dificuldades na compreensão dos significados e conceitos envolvidos começam a surgir, uma vez que os alunos estavam habituados com a aritmética, ou seja, com conteúdos que abordam as operações apenas com números.

As dificuldades apresentadas pelos estudantes na aprendizagem das equações estão associadas à forma como esse conteúdo é trabalhado na prática em sala de aula, pois é imprescindível que a abordagem seja significativa e contextualizada, explorando a passagem da linguagem usual para a linguagem simbólica, na qual as letras representam: valores desconhecidos (incógnitas) na resolução das equações e generalizações de padrões aritméticos.

Para um ensino de equações que privilegie a compreensão de conceitos e procedimentos algébricos, contribuindo com a habilidade de pensar de forma abstrata, é importante proporcionar experiências variadas nas quais os educandos possam investigar padrões, identificar e generalizar as propriedades das operações aritméticas, estabelecer fórmulas e modelar problemas que serão resolvidos por uma equação; assim, os alunos poderão adquirir conhecimentos que servirão de base para uma aprendizagem rica em significados.

As estratégias de ensino devem priorizar propostas que possibilitem o desenvolvimento do conhecimento atrelado à possibilidade de aplicá-los em situações distintas, evitando um aprendizado mecânico, aplicado de forma repetitiva e sem significado. Como destaca Crease (2011, p. 3): " as equações são muito mais que simples ferramentas. Como outras criações humanas, elas têm significado social e são dotadas de vigor cultural".

Devido à importância do ensino e aprendizagem das equações como uma linguagem indispensável à matemática e também à ciência, destacamos que o professor deve fazer uso de metodologias que favoreçam a prática pedagógica, introduzindo noções algébricas de maneira informal até que os conceitos das equações possam ser ampliados e consolidados, além de trabalhar com situações problemas contextualizados que envolvam temas cotidianos, mas que também mostrem a sua utilização em várias áreas do conhecimento, evitando a repetição de regras e técnicas de forma mecânica e sem sentido para o aluno.

# Capítulo 2

# Sequências Didáticas

Segundo Zabala (2015), sequência didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos".

Para elaborar uma sequência didática é necessário realizar um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos e a partir desse resultado elaborar atividades diversificadas que apresentem desafios em níveis diferentes de aprendizagem para que o conhecimento possa ser construído progressivamente. Zabala (2015) destaca que as atividades também precisam propor conteúdos significativos e práticos para os alunos; que sejam compatíveis com o nível dos estudantes; que provoquem um conflito cognitivo que desenvolva relações entre os conteúdos novos e os conhecimentos já adquiridos; que sejam motivadoras em relação à aprendizagem dos conteúdos novos; que estimulem o autoconceito e auto-estima, ou seja, que o aluno perceba que seu esforço valeu a pena e que permita ao aluno ser mais autônomo em suas aprendizagens.

Desta forma, ao realizar o planejamento de uma sequência didática para determinado conteúdo, o professor deve ter clareza das competências e habilidades que se pretende desenvolver para definir previamente os objetivos didáticos que vão atender às necessidades dos alunos e a partir dessas informações planejar as atividades que serão usadas para alcançar os resultados.

Na perspectiva de tornar a aprendizagem significativa[1] e exitosa, as sequências didáticas foram construídas tendo como um dos objetivos relacionar teoria e prática, como destaca D'ambrosio, U. (1996): "Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados". Colocar a teoria em prática proporciona a construção e aquisição do conhecimento através da relação dialética saber/fazer.

A sequência didática exige do professor uma sistematização e um planejamento, de acordo com as informações adquiridas através do diagnóstico realizado inicialmente, que conduzirão as ações para a aprendizagem dos estudantes, possibilitando um ambiente de interação aluno-professor e aluno-aluno, oportunizando ao aluno ser o protagonista da

[1]Teoria de Ausubel - Educational psychology: a cognitive view. 1968.

sua aprendizagem e construir saberes a partir de atividades diversificadas, desafiadoras e elaboradas em diferentes níveis de complexidade.

No cenário da sala de aula, onde o aluno é o protagonista na construção da sua aprendizagem, o professor tem o papel de mediador desse processo, propiciando condições para que o estudante desenvolva o pensamento crítico e os saberes, de modo a aplicá-los no seu cotidiano. Como facilitador, o professor oferece informações, materiais e instrumentos para que o aluno relacione os conteúdos matemáticos com situações do cotidiano e seja capaz de resolver problemas, buscar e selecionar informações e tomar decisões.

Com o objetivo de despertar nos alunos um maior interesse pela matemática, mostrando a sua importância na evolução das sociedades e na construção do mundo em que vivem e colaborando para uma aprendizagem significativa, as sequências didáticas apresentadas utilizam as metodologias de resolução de problemas e a história da matemática para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem.

## 2.1 Um breve relato histórico sobre as equações

Ao longo do desenvolvimento da história da matemática, observamos diferentes formas de conceber a noção de equação por diferentes povos, em diferentes épocas (RIBEIRO, 2009). Destaca-se que, por volta de 2000 a.C., os babilônios já resolviam equações quadráticas por métodos equivalentes aos de substituição e de completar quadrados e discutiam algumas equações cúbicas e biquadradas (EVES, 2004).

Os egípcios construíram uma das obras mais antigas da matemática, 1650 a.C., o Papiro de Ahmes ou Rhind, que contém oitenta problemas resolvidos, referindo-se, em sua maioria, a assuntos do dia a dia, como preço do pão, da cerveja, alimentação do gado. Muitos desses problemas seriam representados hoje por uma equação linear, no entanto, eles não usavam a álgebra, mas resolviam através da *Regra do Falso (ou Falsa Posição)* (GUELLI, 1995). Porém, Pitombeira e Roque (2012, p. 35) ressaltam que essa não era a única forma de resolução utilizada pelos egípcios para resolver os problemas "[...] pode dar a impressão de que ela era o método que os egípcios usavam sistematicamente para resolver problemas [...]. Isso não é verdade. Por vezes eles usavam a regra, por vezes utilizavam outros métodos."

Havia um certo simbolismo na álgebra egípcia, encontram-se no Papiro de Rhind símbolos para adição, subtração, igualdade e incógnitas Eves (2004). Nessa fase do passado, é possível perceber a tentativa de resolução de problemas específicos, em sua maior parte, não havia preocupação com soluções gerais e os métodos utilizados estavam relacionados à aritmética (RIBEIRO, 2009).

Os gregos antigos utilizavam a álgebra geométrica para resolução de equações lineares e quadráticas. As quantidades desconhecidas eram representadas por figuras geométricas. Utilizavam dois métodos principais para resolver certas equações simples, o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Atribui-se aos pitagóricos parte considerável dessa álgebra geométrica (EVES, 2004). Uma parte dessa álgebra foi estudada por Euclides em sua grande obra *Elementos*[2], nos livros II e V Guelli (1995). A matemática grega enfrentou um declínio no período chamado de "Idade da Prata", por volta de 250 a 350 d.C. No início desse período, surge o maior algebrista grego, Diofanto de Alexandria, que apresenta em sua obra uma ruptura abrupta da tradição clássica grega Boyer (1974), começando a surgir os primeiros símbolos matemáticos na forma de palavras abreviadas.

É importante mencionar que os gregos não se ocupavam da resolução de equações para problemas de ordem prática como os babilônios e egípcios; sua concepção de equação tinha um caráter geométrico, utilizando compasso e régua não graduada, como destaca Guelli (1995), "Euclides, e os antigos matemáticos gregos não faziam cálculos nem estabeleciam medidas. Preocupavam-se apenas com as relações que podiam obter geometricamente".

Discursando brevemente sobre as contribuições matemáticas dos hindus e árabes, destacamos Brahmagupta [3] (século VII) e Bhaskara (século XII) como os maiores algebristas hindus. Resolviam equações quadráticas completando quadrados e aceitavam números negativos e raízes irracionais, além de ter o conhecimento de que uma equação quadrática (com raízes reais) tem duas raízes. Provavelmente foram os primeiros a dar métodos gerais de soluções Baumgart (1992, p. 10). Segundo Eves (2004, p. 256), "Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de completamento de quadrados. Esse método é hoje muitas vezes conhecido como método hindu".

O mais importante matemático hindu do século XII foi Bhaskara. Nessa época e região, os problemas que eram resolvidos por equações eram enunciados apenas com palavras como um texto poético Pitombeira e Roque (2012, p. 153). Em sua obra *Lilavati* ele reuniu problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando suas novas observações. Tanto nessa obra como no *Vija-Ganita*, estão presentes numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, determinadas e indeterminadas Boyer (1974, p. 162).

Entre os séculos VIII e XII, os matemáticos da cidade de Bagdá tinham conhecimentos de obras gregas e orientais, no entanto, a partir do século IX essa cultura evoluiu para uma produção original que tinha como ponto forte a álgebra Pitombeira e Roque (2012). O matemático árabe mais ilustre desse século foi Mohammed ibn Musâ al-Khwarizmi, que escreveu duas importantes obras sobre aritmética e álgebra. O livro *"Sobre a arte hindu de calcular"* explicava de forma completa o sistema de numeração hindu, dando a falsa impressão de que sua origem é árabe. Sendo assim, do seu nome Al-khwarizmi originaram-se as palavras algarismo e algoritmo. Seu livro mais famoso foi *"Al-jabr wa'l muqabalah"*, que deu origem a palavra "álgebra", influenciando grande-

[2]Obra com 13 livros publicada em 300 a.C.

[3]Em 628 escreveu BrahmaJphuta-Jidd'bãnta ("o sistema de Brahma revisado"), um trabalho de astronomia em 21 capítulos, dos quais o 12º e o 18º se ocupam de matemática.(EVES, 2004)

mente a matemática europeia Boyer (1974, p. 167). No entanto, nesse livro Al-khwarizmi rejeitou a "erudição grega" e ignorou resultados já encontrados, escrevendo apenas um livro prático de resolução de equações Baumgart (1992, p. 11).

O termo *al-jabr* significa "restauração" e refere-se à transposição de termos para o outro lado da equação, o termo *muqabalah* significa "equilíbrio" e refere-se ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação Boyer (1974). A resolução das equações na obra é descrita por Pitombeira e Roque:

> Apesar de a linguagem utilizada por Al-Khwarizmi usar somente palavras, ele emprega um vocabulário padrão para os objetos que aparecem no problema. Ao estudar problemas que atualmente correspondem a equações do segundo grau, ele introduziu os termos necessários para o seu entendimento, principalmente os três modos sob os quais o número aparecia no cálculo da álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples(PITOMBEIRA; ROQUE, 2012, p. 156).

Os matemáticos indianos já utilizavam abreviações para representar as incógnitas. Em meados do século XVI, alguns matemáticos árabes que sucederam Al-Khwarizmi comumente usavam letras para designar incógnitas em equações de coeficientes numéricos e para as potências das incógnitas eram usadas palavras abreviadas ou simbolizadas. Desde os egípcios, já eram usados símbolos para adição e subtração; Diofanto (século IV) empregou símbolos para as operações mais gerais e para uma quantidade desconhecida; os matemáticos, especialmente italianos, dos séculos XV e XVI, introduziram um simbolismo para representar as incógnitas e operações enunciadas pelas regras algébricas dos árabes Pitombeira e Roque (2012, p. 176).

O passo decisivo para o desenvolvimento do simbolismo algébrico como conhecemos hoje foi dado pelo francês Fraçois Viète (1540-1603).

> [...]introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou número supostos conhecidos ou dados. Aqui encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre o importante conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida (BOYER, 1974, p. 223)

No entanto, vale ressaltar que a substituição das palavras pelos símbolos matemáticos foi gradativa, Viète ainda fazia uso das primeiras nas equações. Outros matemáticos da mesma época contribuíram com a álgebra deixando-a mais próxima da concepção atual, entre eles Robert Recorde (1510-1558) e Thomas Harriot (1560-1621). A passagem completa da álgebra simbólica foi feita por René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês que aperfeiçoou a álgebra de Viète, criando a notação que usamos hoje para os expoentes; usando o símbolo "·" para multiplicação; fazendo uso das primeiras letras do alfabeto para indicar os coeficientes e termo independente (se literal) e das últimas letras para representar as incógnitas Guelli (1995, p. 29-30).

Nesse breve relato histórico, destacamos as principais contribuições para o desenvolvimento das equações de um modo geral. Seguiremos destacando as equações diofantinas lineares, que historicamente tiveram um papel importante no desenvolvimento da matemática pelos povos egípcio, grego e hindu, como ressalta Eves (2004):

> Os hindus revelaram notável habilidade em análise indeterminada, sendo talvez os primeiros a descobrir métodos gerais neste ramo da matemática. Ao contrário de Diofanto, que procurava uma qualquer das soluções racionais de uma equação indeterminada, os hindus empenhavam-se em encontrar todas as soluções inteiras possíveis (EVES, 2004, p. 256)

Explorando a evolução das equações ao longo do tempo, um personagem já mencionado aparece no contexto das equações diofantinas: Diofanto de Alexandria, considerado o pai da álgebra. Embora ele não tenha sido o primeiro a trabalhar com esse tipo de equação, pode ter sido o primeiro a utilizar a notação algébrica e por isso teve seu nome atribuído às equações diofantinas como uma homenagem, menciona Eves (2004).

Não se sabe ao certo quando ele nasceu e nem sua nacionalidade; alguns historiadores, inclusive, salientam a forma como escrevia, pois era diferente dos padrões da matemática grega, que utilizava a geometria na resolução dos problemas, assemelhando-se mais à álgebra babilônica no que se refere à resolução de equações Rocque e Pitombeira (1991).

O que se encontra nas fontes históricas sobre a vida pessoal de Diofanto é um enigma gravado no seu túmulo que, segundo Guelli (1995), foi escrito por Hipatia[4], primeira matemática mulher da história:

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz, criança tardia; depois de chegar a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de consolar sua dor com a ciência dos números por quatro anos, ele terminou sua vida. (BOYER, 1974, p. 130)

A solução desse enigma pode ser encontrada pela equação:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x,$$

[4]Filha de Theon, matemático, filósofo e um dos últimos diretores do Museu de Alexandria, foi morta de forma violenta em 415.

onde x representa a idade de Diofanto. Resolvendo essa equação, a idade encontrada é 84 anos.

De fato, muitas foram as contribuições de Diofanto para o desenvolvimento da matemática, como destacam Zerhusen, Rakes e Meece (1999):

> Diofanto fez contribuições que repercutiram ao longo da história até os dias atuais. Alguns dos mais influentes de seu trabalho são sua teoria dos números, sua álgebra e seus métodos de resolução de problemas. Um dos principais fatores que ajudaram a preservar seus trabalhos por tanto tempo foi o trabalho de acompanhamento realizado por futuros matemáticos. Três grandes estudiosos que de alguma forma desenvolveram suas obras foram Vieté, Fermat e Poincaré (ZERHUSEN; RAKES; MEECE, 1999).

Diofanto escreveu três tratados: *Aritmética* , que era uma obra composta por treze livros, dos quais se preservaram apenas seis; *Números Poligonais*, do qual restaram apenas fragmentos; e *Porismas*, que foi completamente perdido. *Aritmética* é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que aponta Diofanto como um gênio nesse campo: nele são encontrados 130 problemas consideravelmente variados que remetem a equações do primeiro e do segundo graus; apenas uma equação cúbica bem particular é resolvida Eves (2004).

*Aritmética* é a primeira obra que trazia algum tipo de notação simbólica, apresentando-se desvinculada dos métodos geométricos tão utilizados na época, como pontua Boyer (1974).

> [...]O desenvolvimento da álgebra passou por três estágios: o primeiro, conhecido como retórico, onde tudo é completamente escrito em palavras; o segundo, chamado sincopado, são adotadas algumas abreviações; e um terceiro, intitulado simbólico ou final. Essa divisão é naturalmente uma simplificação excessiva, mas se aproxima do que realmente aconteceu. A Aritmética de Diofanto deve ser colocada na segunda fase (BOYER, 1974, p. 132).

Os estudiosos das obras de Diofanto inferiram que ele só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com apenas uma resposta do problema Eves (2004). Ainda assim, equações indeterminadas que eventualmente permitem infinitas soluções inteiras estão associadas ao nome de Diofanto. Porém, Milies e Coelho (1998) apontam que Fermat foi o primeiro a considerar as questões aritméticas estritamente no conjunto dos números inteiros.

Historicamente, foi o matemático hindu Brahmagupta (598-668 d.C.) quem primeiro deu uma solução geral da equação linear diofantina $ax + by = c$, onde $a, b$ e $c$ são inteiros, como sinaliza Boyer (1974):

> Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de $a$ e $b$ deve dividir $c$; e Brahmagupta sabia que se $a$ e $b$ são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por $x = p + mb$, $y = q - ma$, onde $m$ é um número inteiro arbitrário.[...] Brahmagupta merece muito louvor por ter dado todas as soluções inteiras da equação linear diofantina, enquanto que Diofanto de Alexandria tinha se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada (BOYER, 1974, p. 161).

Apesar disso, é inegável que a introdução do simbolismo algébrico na representação do valor calculado na resolução dos problemas, por Diofanto, trouxe grandes benefícios, contribuindo imensamente para o desenvolvimento da álgebra e da teoria dos números.

## 2.2 Sequências didáticas para o ensino de equações

As sequências didáticas estão organizadas em aulas com duração de 50 minutos distribuídas da seguinte forma: 5 aulas para Revisão de Equações Polinomiais do 1º grau e sua abordagem histórica, 10 aulas para Equações Polinomiais do 2º grau e sua abordagem histórica e 4 aulas para Equações Diofantinas Lineares, para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

As sequências didáticas apresentam a seguinte estrutura: tema, abjetivos, conteúdos a serem trabalhados, habilidades da BNCC, materiais necessários e detalhamento das aulas. No detalhamento das aulas temos: organização da turma, introdução, desenvolvimento, conclusão e avaliação. Em diversas aulas, a avaliação acontecerá através da participação do aluno destacando o enfoque qualitativo do processo de aprendizagem.

Destacamos que as sequências didáticas propostas para o estudo das equações podem ser utilizadas pelos professores, de forma integral ou parcial, e também podem ser adaptadas às necessidades e ao perfil da turma, além de permitir adequações a carga horária e a duração das atividades apresentadas.

### 2.2.1 Sequência 01: Equações Polinomiais do 1º grau

As equações do primeiro grau são abordadas a partir do sétimo ano, mas devido às dificuldades apresentadas pelos estudantes quando começam o processo de transição da aritmética para a álgebra, faz-se necessária uma revisão sobre as equações do primeiro grau antes da abordagem sobre as equações do segundo grau.

Sendo assim, a sequência didática elaborada tem como objetivo retomar esse conteúdo de forma a ampliar e consolidar os significados algébricos a partir do estudo da história da matemática e da resolução de problemas que estão relacionados a diversas situações e que consideram os conhecimentos prévios dos alunos.

**Tema da sequência didática:** Equações Polinomiais do 1º grau e sua abordagem histórica.

**Objetivos da sequência didática:**

- Revisar o conceito de igualdade, fundamental no estudo de equações do 1º grau.
- Descrever dada situação por meio de uma expressão algébrica ou uma equação de 1º grau.
- Conhecer equações a partir do estudo da sua história e resolver as equações determinadas pela situação problema.
- Discutir o surgimento das equações algébricas e a evolução do seu conceito com as aplicações atuais, relacionadas à equação do 1º grau.
- Ampliar e consolidar os significados da álgebra e, mais especificamente, das equações de 1º grau a partir dos diferentes usos em contextos sociais.
- Relacionar a realidade com os conceitos matemáticos.

**Conteúdos a serem trabalhados:**

- Estudo das equações do 1º grau a partir da sua história.
- Identificação e resolução das equações do 1º grau e situações problema.
- Transposição de situação problema da linguagem materna para a linguagem algébrica.
- Relação entre a realidade e os conceitos matemáticos.

**Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

**Materiais necessários:** lista de atividades, slides, vídeos, computador, notebook, celular e/ou tablet, aplicativos, sites, livro didático.

**Detalhamento das aulas:**

**1ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada em semicírculo.

**Introdução:** No início da aula, será apresentado o tema a ser trabalhado na sequência com auxílio de um vídeo curto (2 min) sobre a história das equações com objetivo de despertar o interesse dos alunos pelo tema.
⟨https://app.animaker.com/video/GAN4OQ9NTIQOM1H7⟩.

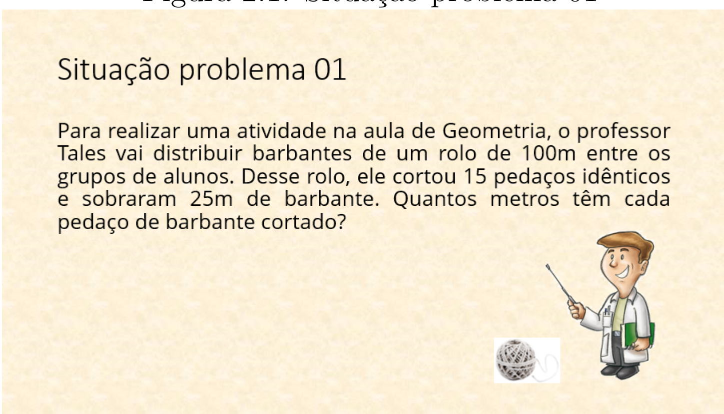
**Desenvolvimento:** Serão apresentadas, no quadro ou slides, três situações problemas com níveis de desenvolvimento fácil, médio e difícil para compreender quais as principais dúvidas dos estudantes sobre a resolução das equações do 1º grau e, a partir desse levantamento optar por uma atividade diagnóstica condizente com as necessidades da turma. O professor fará a mediação para que os estudantes discutam as formas de resolução desses problemas e possam chegar à solução. Após esse momento, os alunos realizarão uma atividade lúdica que será feita em dupla, no celular ou tablet, para identificar a correspondência entre equilíbrio e igualdade, através do site Racha Cuca – Balança lógica. Nesse jogo, eles deverão determinar, logicamente, a partir das posições das balanças, qual é o objeto com maior massa. Para acessar o jogo, o endereço do site é: ⟨https://rachacuca.com.br/jogos/balanca-logica/⟩

**Conclusão:** Haverá um momento de conversa sobre as estratégias e dificuldades apresentadas durante a realização do jogo - Balança lógica.

**Avaliação:** Serão observados a participação e interesse dos alunos durante a aula, e os resultados das situações problemas que foram resolvidas e do jogo aplicado.

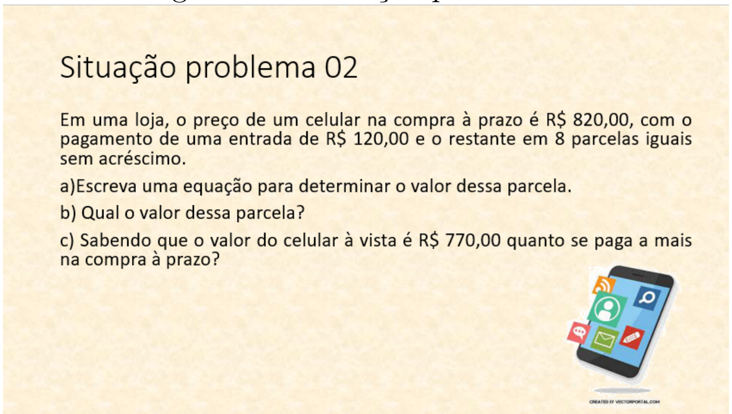
**Situações problemas**

Figura 2.1: Situação problema 01



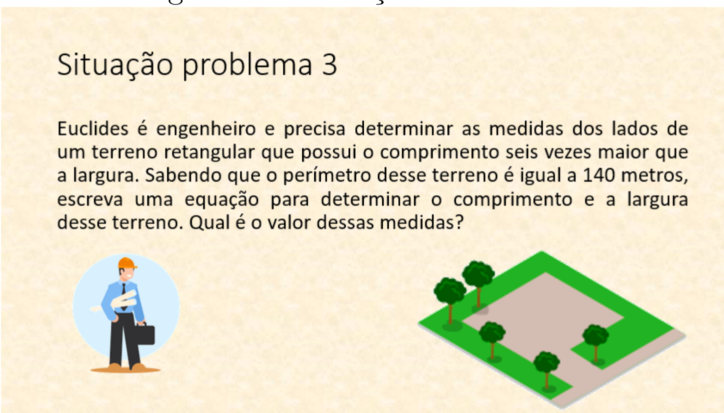

Fonte: Elaborada pela autora

Figura 2.2: Situação problema 02




Fonte: Elaborada pela autora

Figura 2.3: Situação Problema 03




Fonte: Elaborada pela autora

**2ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada em filas.

**Introdução:** Nessa aula, os alunos farão uma atividade diagnóstica para levantamento dos conhecimentos prévios e quais são as dúvidas apresentadas sobre o conteúdo.

**Desenvolvimento:** Cada aluno irá receber uma lista de atividades com 10 questões, que tem como objetivo diagnosticar quais conteúdos eles dominam e quais apresentam dúvidas ou dificuldades. Foram apresentadas três tipos de Atividades Diagnósticas para oferecer opções diferentes de análise de acordo com o perfil da turma e as necessidades dos alunos diante do conteúdo. O professor poderá fazer a escolha de uma das três opções de atividade diagnóstica para aplicar à turma.
A Atividade Diagnóstica - Tipo 01 traz exercícios para serem trabalhados com turmas que tenham desenvolvido as competências e habilidades para resolução de problemas com equações do 1º grau. A atividade inicia com um exemplo de uma situação do cotidiano dos alunos na primeira questão e um desafio matemático muito divulgado nas redes sociais. Ambos têm como objetivo verificar quais estratégias os alunos irão utilizar para

a resolução. As questões 3 e 4 trabalham a transposição da língua usual para uma expressão matemática. Na quinta questão apresentamos um exemplo com o uso de balança como foi trabalhado no jogo - Balança lógica. As questões 6 e 7 envolvem a construção e resolução da equação correspondente. Na questão 8 temos um problema de geometria, 9 e 10 trazem problemas envolvendo moeda (Reais).
A Atividade Diagnóstica - Tipo 02 traz questões para serem trabalhadas com turmas que apresentem mais dificuldades no desempenho das habilidades relacionadas ao conteúdo. Dessa forma, as questões de 1 a 6 apresentam os conceitos básicos das equações do 1º grau e sua resolução. As questões 7 a 10 trazem situações problemas simples.
A Atividade Diagnóstica - Tipo 03 apresenta questões com resoluções diretas das equações e com situações problemas, para turmas com bom desenvolvimento das habilidades referentes ao conteúdo.

**Conclusão:** Finalizaremos com a discussão sobre as dificuldades e dúvidas que surgiram durante a realização da atividade.

**Avaliação:** Serão observados a participação e desempenho dos estudantes na realização da lista de atividades.

| Colégio: | |
|---|---|
| Disciplina: | Série/Turma: |
| Professor(a): | Data: |
| Aluno(a): | |

Atividade Diagnóstica - Tipo 01

Equações do 1° grau

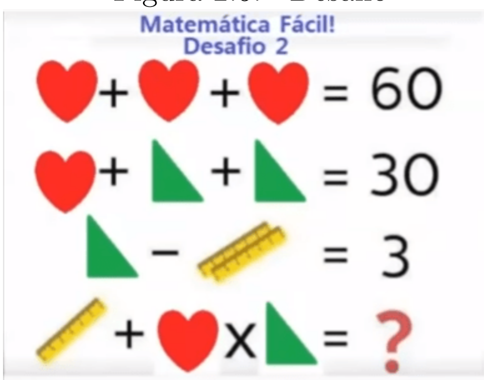
1. Gabriela foi ao supermercado e gastou R$ 30,00 comprando leite integral em caixas de 1 litro. Quantas caixas de leite Gabriela comprou, sendo que cada caixa estava custando R$ 5,00?

Figura 2.4: Caixa de leite


Disponível em: ⟨https://vectorportal.com/pt/vector/milk-cartons.ai/20595⟩

2. Resolva o desafio abaixo.

Figura 2.5: Desafio




Disponível em ⟨https://sme.goiania.go.gov.br/conexaoescola/ensino_fundamental/sistema-de-equacoes-o-desafio/⟩

3. GIOVANNI Jr; CASTRUCCI - Escreva a equação correspondente a cada sentença:

a) Ao triplo de um número t adicionamos 40 e obtemos 61.

b) Subtraindo 20 do dobro de um número y, obtemos 160.

c) A metade de um número x aumentada do próprio número x é igual a 96.

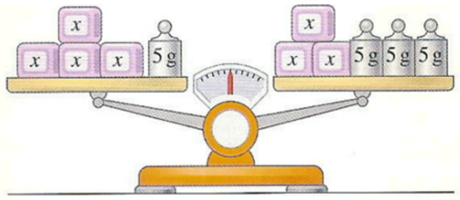
d) O quíntuplo de um número x é igual ao triplo do número x, aumentado de 62.

4. (Prova Brasil/Saeb) - Uma prefeitura aplicou 850 mil na construção de três creches e um parque infantil. O custo de cada creche foi de 250 mil. A equação que

podemos utilizar para calcular o custo do parque, em mil reais, é:
a) x + 850 = 250
b) x − 850 = 750
c) 850 = x + 250
d) 850 = x + 750

5. (Clube OBMEP adaptada) - João distribuiu várias caixas com massa x kg em uma balança de dois pratos, conforme mostra a figura abaixo.
Qual o valor, em gramas de x?

Figura 2.6: Balança




Disponível em: ⟨http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-pesando-caixas/⟩

6. O triplo de um número natural, adicionado 12 é igual a 57. Qual é esse número?

7. (Portal OBMEP) - Quando os gêmeos Anderson e Ricardo nasceram, Maitê tinha 7 anos. Qual a idade dos gêmeos, se hoje a soma das idades dos três irmãos é 34 anos?

8. GIOVANNI Jr; CASTRUCCI - Em um terreno retangular, o comprimento tem 10 metros a mais que a largura. Sabendo-se que o perímetro desse terreno é 80 metros, qual o comprimento e a largura desse terreno?

9. BIANCHINI - Em um estacionamento, cobram-se R$ 7,00 pela primeira hora e R$ 1,50 a cada hora excedente. Se um cliente pagou R$ 16,00, quanto tempo o carro dele permaneceu nesse estacionamento?

10. BIANCHINI - As reproduções das telas abaixo são assinadas por Elza Bernardes. Eu as comprei por R$ 1.320,00. Pela tela A, paguei o dobro do que paguei pela tela B, e pela tela C, paguei o triplo do que paguei pela B. Quanto paguei pela tela C?

Figura 2.7: Telas

| | |
|---|---|
| Colégio: | |
| Disciplina: | Série/Turma: |
| Professor(a): | Data: |
| Aluno(a): | |

Atividade Diagnóstica - Tipo 02

Equações do 1° grau

1. Identifique as equações do $1^{\underline{o}}$ grau abaixo:

a) $2x + 4 = 3$

b) $4x^2 + 3x - 1 = 0$

c) $x + 7 < 8$

d) $3x + 4 \neq x$

e) $x + 2x^2 > 3$

f) $3x - 5 > 2x + x^2$

g) $x + 9 = 3x$

h) $8 = 3x - 1$

i) $8 = 4y - 6$

j) $x - 7 = 0$

2. Observe a equação $3y - 5 = 3 + y$ e responda as questões:
a) Qual é o $1^{\underline{o}}$ membro?
b) Qual é o $2^{\underline{o}}$ membro?
c) Qual é a incógnita dessa equação?

3. BIANCHINI - Verifique se 2 é raiz das equações:
a) $x^2 = 4$
b) $-2x = 4$
c) $2^x = 4$
d) $x - 2 = 4$

4. BIANCHINI - Um número é somado a 10. Multiplica-se essa soma por 3, e o resultado é 72.
a) Qual das equações a seguir traduz o problema?

$$n + 10 \cdot 3 = 72 \quad \text{ou} \quad (n + 10) \cdot 3 = 72$$

b) Que número é esse?

5. Escreva a equação correspondente a cada sentença.
a) O triplo de um número adicionado 10 é igual a 1.
b) Um número aumentado de 18 é igual a 30.
c) Se subtrairmos um número de 80, obteremos 24.

6. Considerando como conjunto universo o conjunto dos números racionais, calcule o valor de x nas equações.
a) $3x - 8 = 7$
b) $x - 6 = 4$
c) $x - 4 = 3x + 8$
d) $2x + 8 = x$
e) $3 - x + 12 = 3x - 8 - 5x$

7. GIOVANNI Jr; CASTRUCCI - Daqui a 5 anos, Karina terá 37 anos. Usando a letra x, escreva uma equação que permita calcular a idade que Karina tem hoje.

8. SILVEIRA; MARQUES - Leia a tirinha e responda.
Quantos são os irmãos de Marcos?

Figura 2.8: Tirinha


9. SILVEIRA; MARQUES - Quais são os dois números pares consecutivos cuja soma é 138?

10. Um terreno retangular tem 80 m de perímetro. O comprimento é o triplo da largura.
a) Indicando a largura do terreno por x, determine a equação que determina seu comprimento.
b) Escreva a equação que determina o perímetro desse terreno.
c) Qual é a largura do terreno? E qual é o comprimento do terreno?

| Colégio: | |
|---|---|
| Disciplina: | Série/Turma: |
| Professor(a): | Data: |
| Aluno(a): | |

Atividade Diagnóstica - Tipo 03

Equações do 1° grau

1, SILVEIRA; MARQUES - Verifique se o 2 é raiz das seguintes equações:

a) $3x + 10 = 4x + 8$

b) $\frac{x}{2} + 5 = \frac{5x}{3} - 2$

c) $3x^x - 5 = 0$

d) $15\sqrt{x + 2} = 30$

2. Resolva as equações e obtenha a solução de cada uma, sabendo que o conjunto universo é o conjunto dos números racionais.

a) $3x - 9 = 6$

b) $x - 8 = 9$

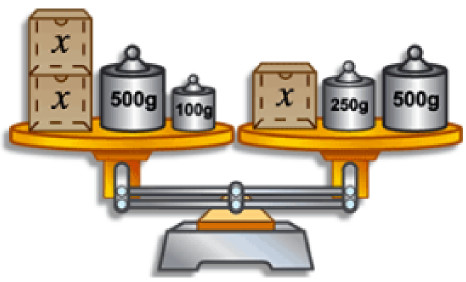
c) $3x + 4 = 16$

d) $x + 7 = 2 - 4x$

3. Qual o número inteiro que adicionado ao seu triplo é igual a 64?

4. A figura a seguir representa uma balança de dois pratos em equilíbrio. Sabendo que cada caixa tem a mesma massa x, calcule a massa de cada caixa.

Figura 2.9: Balança




⟨https://www.matematica.pt/images/faq/equacao.png⟩

5. Um terreno retangular tem 120 m de perímetro. O comprimento do terreno tem o triplo da medida de sua largura. Determine a área do terreno.

6. Lucas e Marcelo colheram, juntos, 63 maçãs. Lucas colheu $\frac{4}{5}$ da quantidade colhida por Marcelo. Quantas maçãs Lucas colheu?

7. SILVEIRA; MARQUES - Pensei em um número natural, multipliquei por 5, dividi por 4 e subtraí 8, obtendo 12. Em que número pensei?

8. GIOVANNI Jr; CASTRUCCI - Em uma turma de 30 alunos, 6 escrevem apenas com a mão esquerda (são canhotos) e 2 escrevem com as duas mãos (são ambidestros). Quantos alunos escrevem apenas com a mão direita (são destros)?

9. Observe o diálogo a seguir e determine a idade de Carol e do seu avô, Antônio.

Figura 2.10: Carol e seu avô


⟨https://l1nk.dev/JRBRY⟩

10. Mariana e Luiza subiram juntas em uma balança e apareceu no visor 80 kg. Mariana desceu da balança e Luiza verificou que ela tinha 8 kg a mais que Mariana. Quantos quilogramas tinha Luiza? E quantos quilogramas tinha Mariana?

**3ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será dividida em seis grupos.

**Introdução:** Os alunos realizarão uma pesquisa sobre a história das Equações.

**Desenvolvimento:** A turma será dividida em seis grupos que realizarão uma pesquisa com o uso de tablet, celular ou computador sobre a história das equações desde o seu surgimento, dividida da seguinte forma:
Grupo 01 - Egípcios
Grupo 02 - Babilônios
Grupo 03 - Gregos
Grupo 04 - Árabes
Grupo 05 - Contribuições dos franceses François Viète e René Descartes
Grupo 06 - Aplicações das equações em diversas áreas do desenvolvimento humano.

O objetivo é investigar o surgimento das equações e como eram resolvidas em cada civilização. Além disso, os alunos vão comparar os métodos de resolução antigos e atuais para compreender a importância das equações para o desenvolvimento da sociedade.

**Conclusão:** A pesquisa realizada será apresentada na aula seguinte, onde cada grupo irá escolher uma forma de apresentar. Seguem as opções para a escolha:

- História em quadrinhos - Sugestões de aplicativos: Pixton, Canva, Book Creator, StoryboardThat.
- Criação de um vídeo - Sugestões de aplicativos: Animaker, Canva, Capcut, Inshot.
- Apresentação em slides: Sugestões de aplicativos: Google Apresentações, PowerPoint, Canva, Prezi, Mentimeter, Slidesgo.
- Animação - Sugestões de aplicativos: Animaker, Canva, Capcut, Movavi.
- Linha do tempo - o grupo 06 vai construir uma linha do tempo destacando os documentos encontrados na história das equações e apresentando exemplos do cotidiano onde as equações estão presentes nos dias atuais.

**Avaliação:** Serão observados a participação e interesse dos alunos durante a aula, assim como a realização da pesquisa e das informações encontradas.

Roteiro da Pesquisa

**- Povos Egípcios**

1. Onde e quando se desenvolveu a cultura egípcia?
2. Como era o sistema de numeração egípcio?
3. Quais eram os papiros egípcios mais importantes que são considerados as obras matemáticas mais antigas?
4. O que continham nesses papiros? Onde se encontram hoje?
5. Sobre o que falavam os problemas contidos nesses papiros?
6. Apresente um problema contido no papiro de Ahmes ou Rhind que possa ser resolvido usando equação.
7. Como os egípcios não utilizavam as equações como usamos hoje, qual o método eles utilizavam para resolver os problemas apresentados no papiro Ahmes ou Rhind?

**- Povos Babilônios**

1. Onde e quando se desenvolveu a civilização babilônica?
2. Onde e como era feita a escrita dos babilônios?
3. Como era o sistema de numeração dos babilônios?
4. Quais tipos de problemas matemáticos eram resolvidos pelos babilônios?
5. Apresente um exemplo dos problemas contidos nos tabletes de argila que possa ser resolvido com uma equação.
6. Como os babilônios resolviam os problemas relacionados às equações?

**- Povos Gregos**

1. Onde e quando surgiu a civilização grega?
2. Como aconteceu a evolução do desenvolvimento da matemática na Grécia?
3. Na Grécia, desenvolveram-se vários sistemas de numeração, inclusive o alfabético, como era esse sistema de numeração?

4. Quais os principais matemáticos gregos que se destacaram contribuindo para o desenvolvimento da matemática?

5. Qual recurso era utilizado pelos gregos para resolução das equações?

6. Quais foram as principais contribuições de Diofanto na história da matemática?

**- Povos Árabes**

1. Como surgiu e onde vivia a civilização arábica?

2. Como se desenvolveu a matemática entre os árabes?

3. Como era o sistema de numeração decimal que usamos atualmente?

4. Qual o maior matemático árabe e quais suas contribuições para resolução das equações?

5. A palavra álgebra é de origem árabe, o que significa?

6. Por que os árabes tiveram um papel muito importante na história da matemática?

**- Contribuições dos franceses François Viète e René Descartes**

1. Quem foi François Viète?

2. Qual foi a principal contribuição de François Viète para o desenvolvimento da álgebra?

3. Como aconteceu o processo de transição das palavras para os símbolos propostos por Viète?

4. Quem foi René Descartes?

5. De que forma Descartes aperfeiçoou a álgebra de Viète?

**- Aplicações das equações em diversas áreas do desenvolvimento humano.**

1. Em quais áreas podemos destacar a aplicação das equações?

2. De que forma as equações são aplicadas nas áreas pesquisadas?

3. Como o uso das equações pode ajudar nas tarefas do cotidiano?

4. Quais as principais contribuições da matemática para a sociedade atual?

**4ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada com os mesmos grupos da aula anterior.

**Introdução:** Os alunos, em grupo, vão apresentar as informações pesquisadas sobre a história das equações de acordo com a forma escolhida para a apresentação.

**Desenvolvimento:** A turma será organizada com os mesmos grupos da aula anterior para que apresentem, utilizando os recursos que foram definidos anteriormente, a pesquisa sobre a história das equações .

**Conclusão:** Será realizada uma breve discussão sobre as apresentações.

**Avaliação:** A avaliação será processual durante a realização da atividade, considerando a participação, criatividade e interesse dos alunos.

**5ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada em filas.

**Introdução:** A aula será expositiva para revisão do conteúdo.

**Desenvolvimento:** Será realizada uma aula expositiva para revisar o conteúdo e solucionar as dúvidas apresentadas durante a realização da Atividade Diagnóstica, além da aplicação de situações problemas com equações do 1º grau.

**Conclusão:** Os estudantes vão responder uma atividade para que o professor possa avaliar os avanços na aprendizagem dos estudantes.

**Avaliação:** A participação e o desempenho na atividade serão considerados como instrumento avaliativo.

| Colégio: | |
|---|---|
| Disciplina: | Série/Turma: |
| Professor(a): | Data: |
| Aluno(a): | |

## Atividades

1. Letícia ganhou um cupom de desconto no valor de $R\$\ 40,00$ para utilizar em compras online. Ela baixou o app da loja e, pesquisando os preços dos celulares, notou que estavam em promoção, com 10% de desconto. Para obter o valor a ser pago, Letícia deve calcular o desconto e depois aplicar o cupom.
   a) Quantos reais Letícia irá pagar se escolher um celular que custa $R\$\ 1200,00$ sem os descontos?
   b) Escreva uma expressão algébrica que represente o valor que Letícia irá pagar pelo celular.

2. O carro de Victor percorre 8 km com 1 l de combustível e o carro de Laís percorre 10 km com 1 l. Eles fizeram uma viagem juntos, mas cada um no seu carro. Na saída, completaram o tanque dos carros que têm a mesma capacidade. Quando chegaram ao destino, completaram o tanque novamente e foi necessário 9 l a mais para o carro de Victor.
   a) Quantos litros de combustível cada um gastou?
   b) Quantos quilômetros eles percorreram na viagem?

3. Nayana está procurando um emprego cujo salário seja o suficiente para pagar suas despesas que são: $\frac{1}{4}$ com o aluguel, $\frac{1}{3}$ com alimentação e $\frac{1}{5}$ com transporte. Ela ainda deseja poupar $R\$\ 300,00$. Para atender às suas necessidades, Nayana precisa de um salário de no mínimo quantos reais?

4. Num certo time de futebol, João e Marcos são os jogadores que mais marcam gols pelo clube. João e Marcos possuem juntos 350 gols, mas Marcos fez 12 gols a mais que João.
   a) Escreva uma equação na incógnita x que permita calcular a quantidade de gols marcados por João nesse time.
   b) Quantos gols João marcou pelo time? E quantos gols Marcos marcou?

### 2.2.2 Sequência 02: Equações Polinomiais do $2^{\underline{o}}$ grau

O estudo sobre equações do segundo grau possui uma importância significativa para a resolução de problemas em diversas áreas, como física, engenharia, economia e ciências naturais, abordando problemas que envolvem lançamentos, otimização, crescimento e decrescimento, sequências, entre outros. Esse estudo é ampliado no nono ano do Ensino Fundamental, explorando os diferentes tipos de equações e os diversos métodos de resolução.

Buscando motivar o aluno a aprender de forma autônoma e participativa, desenvolvendo a capacidade de refletir, comparar, pensar criticamente e resolver problemas aplicáveis à realidade, além de torná-lo o centro da abordagem educacional sendo responsável direto pela construção do conhecimento, serão utilizadas as metodologias ativas de aprendizagem como recursos didáticos para o ensino das equações do segundo grau.

A resolução de problemas visa possibilitar ao estudante buscar diferentes caminhos para a solução, testar os resultados encontrados e comparar seus efeitos. A história da matemática também será utilizada para responder alguns "porquês" e esclarecer algumas ideias construídas pelos alunos, além de mostrar a importância desse conhecimento para a evolução tecnológica dos dias atuais e toda herança cultural das civilizações antigas. Ainda será utilizado um jogo que permitirá a aprendizagem de forma lúdica e estimulará a investigação e análise das estratégias para resolução das questões, respeitando as regras do jogo e favorecendo o trabalho coletivo. Outra metodologia que será usada é a rotação por estações de aprendizagem, que consiste na construção de um circuito dentro da sala de aula onde cada estação propõe uma atividade diferente sobre o tema, incluindo recursos digitais em que os alunos, em pequenos grupos, farão um rodízio pelas estações, sendo que cada estação é independente das outras.

**Tema da sequência didática:** Equações Polinomiais do $2^{\underline{o}}$ grau e sua abordagem histórica.

**Objetivos da sequência didática:**

- Identificar equações do $2^{\underline{o}}$ grau e seus coeficientes.
- Reconhecer equações do $2^{\underline{o}}$ grau a partir do estudo da sua história e resolver as equações determinadas por situações problemas.
- Resolver problemas que podem ser modelados por equações do $2^{\underline{o}}$ grau incompletas e completas.
- Explorar diferentes procedimentos para determinar as raízes de equações do $2^{\underline{o}}$ grau.
- Relacionar a realidade com os conceitos matemáticos.

**Conteúdos a serem trabalhados:**

- Estudo das equações do 2º grau a partir da sua história.
- Identificação e resolução das equações do 2º grau e situações problema.
- Transposição de situação problema da linguagem materna para a linguagem algébrica.

**Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

**Materiais necessários:** lista de atividades, slides, vídeos, computador, notebook, celular e/ou tablet, aplicativos, sites, livro didático.

**Detalhamento das aulas:**

**1ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada em semicírculo e em duplas.

**Introdução:** A aula será expositiva e discutida para apresentação do conteúdo.

**Desenvolvimento:** A aula terá início com a apresentação, no quadro ou em slides, de problemas matemáticos para que os alunos possam discutir estratégias e analisar qual a melhor solução. Inicialmente, os alunos tentarão responder individualmente; após 10 min, eles formarão duplas para que possam discutir as soluções encontradas e como cada um pensou suas soluções (5 min). Passado o tempo da discussão, haverá um debate coletivo para que as duplas compartilhem o que discutiram (10 min). Em seguida será apresentada a solução dos problemas através de uma equação usando os métodos de tentativa e da fatoração. E finalmente será feita a sistematização do conteúdo apresentando a equação do 2º grau, sua forma reduzida e suas raízes.

**Conclusão:** Por fim, faremos uma breve discussão sobre as dificuldades e dúvidas que surgiram durante a realização da atividade.

**Avaliação:** A participação e o desempenho na atividade serão considerados como instrumento avaliativo.

Atividade

A professora da turma do 9º Ano A, do Colégio Pitágoras pediu aos alunos que sentassem em duplas para resolver um desafio. Os alunos deveriam adivinhar o mês de aniversário do colega resolvendo uma charada matemática. Considere o diálogo entre Luísa e Guilherme:

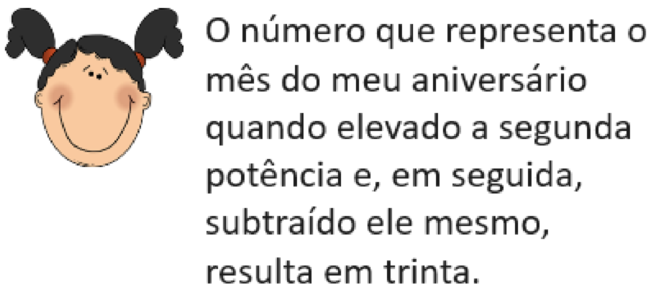



Figura 2.11: Luísa

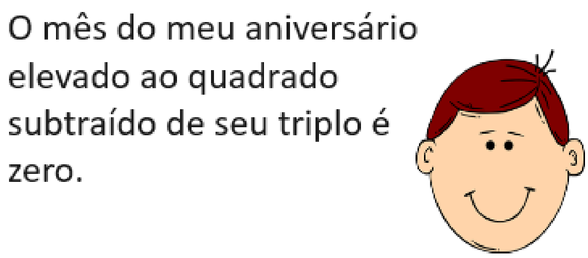



Figura 2.12: Guilherme

Qual será o mês de aniversário de Luísa e de Guilherme?

**2ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada em duplas.

**Introdução:** A aula será expositiva para apresentação do conteúdo.

**Desenvolvimento:** Nesta aula iremos retomar o conteúdo reapresentando a forma reduzida da equação do 2º grau e seus coeficientes, através de uma situação problema que relaciona a planta de um escritório ao cálculo de área de figuras retangulares usando expressões algébricas de grau dois. A situação problema será apresentada aos alunos, no quadro ou slide e, em duplas, irão discutir a solução (15 min). Após a discussão e a apresentação das duplas dos resultados encontrados, será apresentada a definição de equação do segundo grau, detalhando os seus elementos e respectivos coeficientes, identificando as equações completas e incompletas. Em seguida, serão resolvidos alguns exercícios.

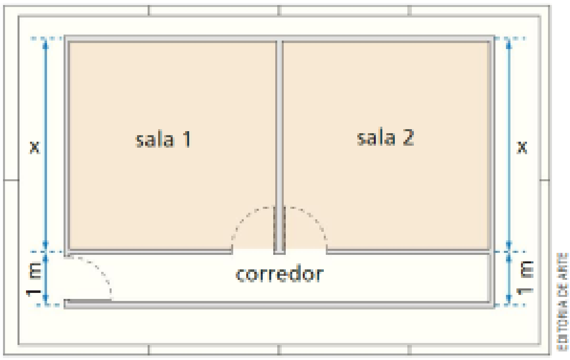
**Conclusão:** Os alunos irão resolver uma atividade do livro didático em casa para correção na próxima aula.

**Avaliação:** Participação e desempenho na resolução dos exercícios.

### Situação problema

Giovanni Jr e Castrucci (2018) - Observe a planta baixa parcial de um escritório:

Figura 2.13: Planta Baixa




As duas salas quadrangulares e o corredor retangular têm, juntos, 40 $m^2$ de área. Cada sala tem $x$ metros de lado e o corredor tem 1 metro de largura. Qual é a medida x do lado de cada sala quadrangular?

Analisando a figura e os dados do problema, podemos concluir que:

- a área de cada sala é $x^2$
- a área do corredor é dada por $1 \cdot 2x$ ou $2x$.
- a equação que representa o problema é: $2x^2 + 2x = 40$

Denomina-se **equação do 2º grau na incógnita** $x$ toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a, b$ e $c$ são números reais e $a \neq 0$.

Assim:

- $2x^2 + 2x - 40 = 0$ é uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau na incógnita $x$, em que $a = 2, b = 2$ e $c = -40$.

- $x^2 - 25 = 0$ é uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau na incógnita $x$, em que $a = 1, b = 0$ e $c = -25$.

- $6x^2 - 9x = 0$ é uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau na incógnita $x$, em que $a = 6, b = -9$ e $c = 0$.

A igualdade $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada de **forma reduzida** de uma equação do $2^{\underline{o}}$ grau, em que os números reais $a, b$ e $c$ são os **coeficientes** da equação e $x$ é a **incógnita**. Dessa forma, temos:

- $a$ é o coeficiente de $x^2$;
- $b$ é o coeficiente de $x$;
- $c$ é o coeficiente sem incógnita ou o **termo independente**.

**Equações completas e incompletas**

Por definição, devemos ter sempre $a \neq 0$, entretanto podemos ter $b = 0$ ou $c = 0$. Assim:

- Quando $b \neq 0$ e $c \neq 0$, a equação do $2^{\underline{o}}$ grau se diz **completa**.

  Exemplos:
  $5x^2 - 8x + 3 = 0$ é uma equação completa ($a = 5, b = -8$ e $c = 3$).
  $y^2 + 12y + 20 = 0$ é uma equação completa ($a = 1, b = 12$ e $c = 20$).

- Quando $b = 0$ ou $c = 0$, a equação do $2^{\underline{o}}$ grau se diz **incompleta**.

  Exemplos:
  $x^2 - 81 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 1, b = 0$ e $c = -81$).
  $5y^2 = 0$ é uma equação incompleta ($a = 5, b = 0$ e $c = 0$).
  $10t^2 + 2t = 0$ é uma equação incompleta ($a = 10, b = 2$ e $c = 0$).

**$3^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{o}}$ Aulas**

**Organização da turma:** A turma será dividida em grupos que farão rodízio pelas estações de aprendizagem.

**Introdução:** A aula será realizada com rotação por estações de aprendizagem.

**Desenvolvimento:** A sala será organizada com seis estações de aprendizagem, onde em cada uma terá uma atividade diferente, com o roteiro para realização e deverá ser realizada em grupo. As estações de aprendizagem serão:

1. Estação A: Vídeo: "Esse tal Bhaskara"
⟨https://www.youtube.com/watch?v=pozKHQxvFSo⟩
Nessa estação, os alunos assistirão um vídeo que mostra um pouco da história das equações do 2º grau e os métodos de resolução das civilizações antigas. Duração 12 minutos.

2. Estação B: Leitura compartilhada: "As mil e uma equações" - ⟨https://x.gd/XE24b⟩
Nessa estação, os alunos realizarão a leitura compartilhada em um livro paradidático que apresenta a história de dois príncipes que disputam a mão de uma princesa usando seus conhecimentos matemáticos.

3. Estação C: Vídeo aula: ⟨https://www.youtube.com/watch?v=nD6Xu20ADGs⟩
Nessa estação, os alunos assistirão um vídeo que apresenta a definição de equação do 2º grau, como identificar os seus coeficientes e a resolução das equações incompletas, por 15 min.

4. Estação D: Calculadora de Resolução de Equações e vídeo introdutório
⟨https://www.youtube.com/watch?v=pBz3KrYmHNo⟩ e
⟨https://scratch.mit.edu/projects/713648016⟩
Nessa estação, os alunos assistirão um vídeo introdutório que apresenta as equações do 2º grau, seus coeficientes e como resolver as equações incompletas. Depois, utilizando uma calculadora, irão resolver as equações do 2º grau após digitar os seus coeficientes.

5. Estação E: Resolução de Problemas - Lista com situações problemas.
Nessa estação, os alunos vão modelar e resolver uma lista com situações problemas.

6. Estação F: Quiz - ⟨https://wordwall.net/pt/resource/59785622⟩
Nessa estação, os alunos participarão de um jogo de quiz no Wordwall sobre as equações do 2ª grau.

A turma será dividida em 6 grupos e cada um ocupará uma das estações de aprendizagem, o tempo máximo de permanência será de 15 minutos em cada estação para a realização da tarefa e discussão em grupo. Após esse tempo, os grupos farão a troca de estação. Esse processo se repetirá até que todos o grupos circulem por todas as estações.

Figura 2.14: Estações de Aprendizagem

| Estação de aprendizagem | Atividade | Objetivo |
|---|---|---|
| A - Vídeo: "Esse tal Bhaskara | Assistir ao vídeo e discutir os pontos mais importantes. | Conhecer um pouco da história das equações. |
| B - Leitura: "As mil e uma equações" | Realizar a leitura compartilhada e discutir principais trechos. | Desenvolver as habilidades leitora e de interpretação de texto com a história da matemática |
| C - Vídeo aula | Assistir ao vídeo aula e discutir as dúvidas e/ou dificuldades. | Reforçar o aprendizado do conteúdo ensinado. |
| D - Calculadora para Equações do 2º grau e vídeo introdutório: Aula 73 - Telecurso | Assistir ao vídeo e identificar os coeficientes para inserir na calculadora e obter suas raízes. | Reconhecer os coeficientes e entender sua importância para a solução da equação. |
| E - Modelagem matemática | Interpretar situações problemas e escrever a equação para solução. | Modelar situações problemas relacionados ao cotidiano. |
| F - Quiz | Responder um quiz sobre equações do 2ºgrau | Avaliar aprendizagem do conteúdo ensinado. |

**Conclusão:** Ao final da aula faremos uma breve discussão (10 min) sobre as informações apresentadas nas estações.

**Avaliação:** A avaliação acontecerá durante todo o processo através da participação e desempenho dos alunos nas estações de aprendizagem.

| Colégio: | |
|---|---|
| Disciplina: | Série/Turma: |
| Professor(a): | Data: |
| Aluno(a): | |

**Lista de Equações do 2º grau - Estação D**

- Identifique os coeficientes das equações do 2º grau e digite-os na calculadora: ⟨https://scratch.mit.edu/projects/713648016⟩.

a) $2x^2 + 3x – 4 = 0$

b) $x^2 + 2x = 0$

c) $-x^2 + 14 = 0$

d) $x^2 + 2x – 13 = 0$

e) $2x^2 + 5x = 0$

f) $-x^2 + x = 0$

g) $2x^2 – 4 = 0$

h) $-x^2 + 9 = 0$

i) $x^2 – 5 = 0$

j) $2x^2 = 0$

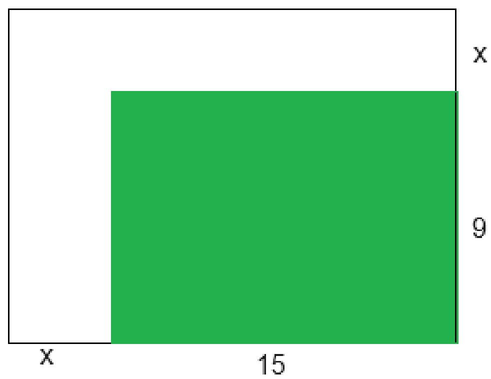
| | |
|---|---|
| Colégio: | |
| Disciplina: | Série/Turma: |
| Professor(a): | Data: |
| Aluno(a): | |

**Atividade com Resolução de Problemas - Estação E**

- Leia com atenção as situações problemas, escreva a equação correspondente e em seguida encontre a solução.

1. Seu Francisco tem um sítio com uma área verde de 135 $m^2$, representado na figura abaixo pelo retângulo verde. Ele pretende aumentar a área verde para 216 $m^2$ acrescentando a mesma medida a ambos os lados, comprimento e largura da área verde.

Figura 2.15: Área Verde




a) Qual expressão representa a nova área?

---

b) Qual o valor de x?

---

c) Qual será a medida de cada lado?

---

2. A escola Tales de Mileto está em reforma. A área de lazer foi ampliada 2 m no comprimento e reduzida 2 m na largura. Sabendo que a nova área mede 32 $m^2$ e considerando-se a medida do lado do terreno inicial como x e ea forma do terreno quadrangular, para

cercar essa área serão necessários quantos metros de cerca?

3. Um pedreiro utilizou 1500 azulejos quadrados e iguais para revestir 60 $m^2$ de parede. Qual é a medida do lado de cada azulejo?

4. Se do quadrado da quantia que Laura possui, subtrairmos 15 reais, obteremos 129 reais. Quantos reais Laura possui?

5. Um problema matemático foi encontrado em uma escavação arqueológica e dizia que: "O dobro do quadrado de um número positivo adicionado 6 unidades é 78. Calcule esse número." O arqueólogo decidiu resolver o problema, qual valor ele encontrará?

**5ª Aula**
**Organização da turma:** Dividida em grupos.

**Introdução:** A turma será direcionada para sala de vídeo, onde será dividida em sete grupos.

**Desenvolvimento:** Com a turma dividida em grupos, os alunos assistirão a um curto vídeo para desmistificar a fórmula de Bhaskara - "A fórmula de Bhaskara NÃO É DE BHASKARA": ⟨https://www.youtube.com/watch?v=A280b9MOPls⟩. Depois os grupos farão uma pesquisa sobre os variados métodos de resolução das equações do segundo grau criados pelas antigas civilizações, divididos da seguinte forma:

1. Egito: Método da falsa posição.
2. Babilônia: Processo algébrico
3. Grécia: Método de Diofanto
4. Arábia: Método de Completar Quadrados algébrico e geométrico
5. Índia: Método de Bhaskara
6. Europa: Método de Viéte
7. Europa: Soma e Produto das Raízes - Girard

**Conclusão:** Cada grupo deve pesquisar o método de resolução e apresentar para turma um exemplo de uma equação do 2º grau resolvida pelo método, na próxima aula.

**Avaliação:** A avaliação acontecerá durante todo o processo através da participação e desempenho dos alunos.

**6ª e 7º Aulas**
**Organização da turma:** Sala arrumada em semicírculo.

**Introdução:** A turma se organizará para que cada grupo apresente o método e a resolução da equação do 2º grau pesquisado (duração 10 min).

**Desenvolvimento:** Cada grupo irá apresentar o método pesquisado para a resolução da equação do segundo grau através de um exemplo.

1. Egito: Método da falsa posição.
2. Babilônia: Processo algébrico
3. Grécia: Método de Diofanto

4. Arábia: Método de Completar Quadrados algébrico e geométrico
5. Índia: Método de Bhaskara
6. Europa: Método de Viète
7. Europa: Soma e Produto das Raízes - Girard

**Conclusão:** Breve discussão (20 min) sobre os métodos de resolução da equação do segundo grau que foram apresentados.

**Avaliação:** A avaliação acontecerá durante todo o processo através da participação e desempenho dos alunos durante a apresentação.

**8º Aula**
**Organização da turma:** Sala será arrumada em filas.

**Introdução:** A aula será expositiva para sistematização da resolução da equação do 2º grau através da fórmula resolutiva.

**Desenvolvimento:** Nesta aula, faremos a sistematização da resolução das equações do 2º grau usando a fórmula resolutiva e sua demonstração com o Método de completar quadrados, através da aula expositiva. Após a resolução de alguns exemplos na lousa com diferentes níveis de dificuldade, faremos o estudo das raízes através do discriminante e dos coeficientes de uma equação.

**Conclusão:** Finalizaremos com uma curiosidade - A equação do Amor.

**Avaliação:** A avaliação levará em consideração a participação dos alunos durante a aula e a resolução dos exemplos.

### Fórmula Resolutiva de uma equação do 2º grau com uma incógnita

Será demonstrado como chegar à fórmula resolutiva através do Método de completar quadrados. Em paralelo, será apresentada a dedução da fórmula através de um exemplo de uma equação. O professor poderá optar em apresentar apenas uma das deduções ou ambas, de acordo com a turma.

Tabela 2.1: Demonstração da fórmula resolutiva

| Dedução da fórmula resolutiva | Processo algébrico de Bhaskara |
|---|---|
| $ax^2+bx+c=0 \;\; (a\neq 0)$ | $x^2+4x-12=0$ |
| $\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$ | |
| $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ | |
| $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}=0-\frac{c}{a}$ | |
| $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ | $x^2+4x=12$ |
| $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ | $x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2=12+\left(\frac{4}{2}\right)^2$ |
| $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ | |
| $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ | $x^2+4x+4=12+4$ |
| $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ | $(x+2)^2=16$ |
| $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ | $(x+2)=\pm\sqrt{16}$ |
| $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ | $(x+2)=\pm 4$ |
| $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ | $x=-2\pm 4$ |
| $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $x=2 \quad \text{ou} \quad x=-6$ |

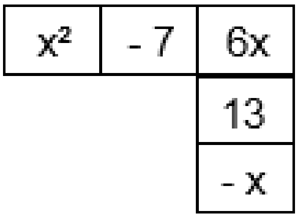
**Exemplos que serão apresentados aos alunos após a demonstração da fórmula resolutiva.**

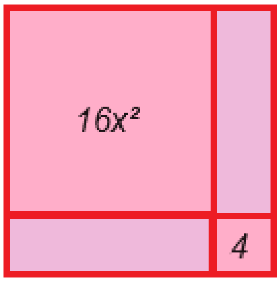
1. O quadrado de um número real inteiro é igual a dez vezes o número, menos 16. Qual é esse número?

2. Um terreno retangular tem 140 $m^2$ de área. A lateral desse terreno tem 4 metros a mais que a frente. Quais são as dimensões desse terreno?

3. GIOVANNI Jr; CASTRUCCI - Na figura a seguir, a soma dos números que estão na linha é igual à soma dos números que estão na coluna. Quais são os valores reais de x que tornam verdadeira essa afirmação?

4. DANTE - Determine o valor de x sabendo que a área da maior região quadrada abaixo é 1156 $cm^2$.




5. GIOVANNI Jr; CASTRUCCI - Uma pessoa distribui 240 balas para um número x de crianças. Se cada criança receber uma bala a menos, o número de balas que cada criança vai receber será igual ao número de crianças. Qual é o valor de x?

**Curiosidade Matemática**

*A equação do amor*

Conhecidos os números reais positivos $a, t, e, o, m$, vamos obter o valor real x na equação:

$$\sqrt{\frac{ax + ate}{mo}} = a$$

Elevamos ambos os membros ao quadrado e obtemos:

$$\frac{ax + ate}{mo} = a^2$$

Multiplicamos ambos os membros por $mo$ (que é diferente de zero) e obtemos:

$$ax + ate = a^2mo$$

$$ax = a^2mo - ate$$

Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por $a$, obtendo:

$$x = \frac{a^2mo - ate}{a} = \frac{a(amo - te)}{a}$$

$$x = amo - te$$

**9º Aula**
**Organização da turma:** A sala será arrumada em grupos de 3 a 4 participantes.

**Introdução:** Os alunos participarão de um jogo; "Quantas raízes há?", adaptado do livro da Coleção Teláris - Matemática, Dante (2018).

**Desenvolvimento:** Nesta aula, a turma será dividida em grupos de 3 a 4 componentes que participarão de um jogo para identificar quantas raízes tem cada equação do segundo grau que foi sorteada. Ganha o grupo que conseguir mais pontos após 5 rodadas.

**Conclusão:** Finalizaremos com a divulgação do resultado do jogo realizado e a discussão com os grupos sobre os motivos que ocasionaram os possíveis erros ocorridos.

**Avaliação:** A avaliação levará em consideração a participação dos alunos durante o jogo e o desempenho dos grupos.

**Quantas raízes há?**
**Orientações:**

- Número de participantes: grupos de 3 a 4 componentes
- Como jogar: Inicialmente, cada grupo irá receber uma folha com o quadro de pontuação. Em seguida cada grupo sorteará uma ficha com uma equação do segundo grau.
- Descrição de uma rodada: Cada grupo sorteia um papel, verifica a equação correspondente, determina quantas raízes reais a equação sorteada tem, usando o valor do discriminante ou outro conhecimento adquirido, e marca os pontos no quadro de pontuação.
- Pontuação:
  - Se a equação não tiver raízes reais, não marca ponto (0).
  - Se a equação tiver duas raízes reais iguais, marca um ponto (1).
  - Se a equação tiver duas raízes reais distintas, marca dois pontos (2).
  - Se o grupo errar a resolução da equação perde um ponto ($-1$).

Tabela 2.2: Quadro de Pontuação

| Rodada | Pontuação |
|---|---|
| 1º | |
| 2º | |
| 3º | |
| 4º | |
| 5º | |
| Total | |

Tabela 2.3: Fichas do jogo

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x^2+x+1=0$ | $x^2-11x+30=0$ | $x^2-6x+9=0$ | $x^2+x=0$ |
| $4x^2-4x+1=0$ | $3x^2+108=0$ | $7x^2-10x+4=0$ | $x^2-12x+36=0$ |
| $2x^2-3x+1=0$ | $x^2-4x+4=0$ | $3x^2-27=0$ | $2x^2-2x+4=0$ |
| $x^2+5x+6=0$ | $x^2-2x-8=0$ | $x^2-12x+36=0$ | $x^2+3x-10=0$ |
| $x^2-5x+4=0$ | $x^2+4x+4=0$ | $x^2-x-6=0$ | $x^2+8x+12=0$ |
| $x^2+x-20=0$ | $3x^2-5x+2=0$ | $x^2+6x+9=0$ | $3x^2-x=0$ |
| $2x^2-98=0$ | $3x^2-5x+3=0$ | $-x^2+10x-25=0$ | $5x^2-x-1=0$ |
| $2x^2-50=0$ | $x^2-12x+40=0$ | $2x^2-3x+1=0$ | $x^2-x-3=0$ |
| $-3x^2+10x-3=0$ | $x^2+x+2=0$ | $4x^2-8x+3=0$ | $x^2-3x+1=0$ |
| $x^2+6x+7=0$ | $12x^2-9x+7=0$ | $x^2+2x+1=0$ | $x^2-3x-18=0$ |

**10º Aula**

**Organização da turma:** A sala será arrumada em semicírculo.

**Introdução:** Os alunos farão uma autoavaliação com o objetivo de levá-los a refletir e questionar-se quanto ao seu aprendizado e ao seu desempenho durante as aulas.

**Desenvolvimento:** Os estudantes vão responder a algumas questões para a realização da autoavaliação e discussão com a turma sobre os conteúdos aprendidos e a participação de cada um durante o processo de ensino e aprendizagem.

**Conclusão:** Discussão sobre o ensino e aprendizagem dos conteúdos trabalhados.

**Avaliação:** A avaliação acontecerá durante todo processo de autoavaliação e discussão com a turma.

**Ficha para Autoavaliação**

| | |
|---|---|
| 1. Empenhei-me o suficiente na leitura dos textos e na resolução das atividades? | |
| 2. Tomei atitudes que auxiliaram na resolução das minhas dúvidas sobre o conteúdo e ajudei aos meus colegas com aquilo que eu sabia? | |
| 3. Participei das atividades de classe e extraclasse, com interesse e de forma colaborativa com os colegas e o professor? | |
| 4. Aprofundei os meus conhecimentos matemáticos? | |

### 2.2.3 Sequência 03: Equações Diofantinas Lineares

As equações diofantinas lineares não são tema curricular da educação básica, no entanto, os alunos aprendem a resolver equações lineares com duas incógnitas e sistemas de equações com duas incógnitas sem restrição ao conjunto solução. Ou seja, de forma implícita os mesmos têm contato com as equações diofantinas lineares.

Além disso, diversos tópicos da Teoria Elementar dos Números que são importantes para a resolução das equações diofantinas lineares são apresentados durante o Ensino Fundamental II, dentre eles: os números naturais e inteiros: propriedades e operações básicas, decomposição em fatores primos, algoritmo da divisão, estudo da divisibilidade, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, Algoritmo de Euclides, números primos e critérios de divisibilidade.

Muitos desses conteúdos são trabalhados através de exercícios repetitivos e depois não são mais abordados, deixando escapar a oportunidade de aplicá-los em situações problemas relacionadas ao cotidiano dos alunos que possibilitem uma aprendizagem significativa e que permita trabalhar de forma complementar à Teoria dos Números e à Álgebra, como menciona Vansan (2015):

> Como sabemos, a Teoria dos Números é uma área que trata de problemas, que facilitam o pensamento dos alunos, para desenvolver estratégias de resolução, sem que haja a necessidade de uso dos algoritmos. Na Teoria dos Números podemos trabalhar de modo complementar com a Álgebra, onde muitos problemas podem ser resolvidos de modo a utilizar as duas áreas em conjunto (VANSAN, 2015, p. 533).

Nesse contexto, é possível incorporar de forma introdutória e contextualizada as equações diofantinas lineares ao nono ano do Ensino Fundamental, através de situações problemas que podem ser modeladas envolvendo a Teoria dos Números e a Álgebra, como ressaltam os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Desse modo, o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). (BRASIL, 1998, p. 84)

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é importante a comunicação matemática no Ensino Fundamental, nas séries finais, através do uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação, possibilitando por meio da articulação dos diversos campos garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real às representações e associem-nas a conceitos e propriedades matemáticas:

> Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 221).

Portanto, o estudo das equações diofantinas lineares no nono ano do Ensino Fundamental II se apresenta como uma oportunidade de aguçar a curiosidade dos estudantes, despertando-lhes o gosto pela descoberta da solução de desafios, estimulando o raciocínio lógico através da resolução de problemas e permitindo-lhes conhecer a aplicação dessas equações em variadas situações.

Diversos problemas podem ser modelados, dentro do conjunto de números inteiros, por equação do tipo $ax+by=c$, onde $a, b$ e $c \in \mathbb{Z}$, sendo $a$ e $b$ não nulos simultaneamente.

Tais equações são chamadas equações diofantinas lineares. Uma solução dessa equação é, então um par de inteiros $(x_0, y_0)$ tal que $ax_0 + by_0 = c$.

As equações diofantinas lineares podem ter ou não solução; quando existe solução, são infinitas as soluções inteiras. Apresentamos a Proposição 2.1 que determina a condição de existência para a solução dessas equações e a Proposição 2.2 afirma que, se a equação tem solução, então teremos infinitas soluções inteiras que podem ser determinadas a partir de uma solução particular.

**Proposição 2.1.** *Sejam $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e $c \in \mathbb{Z}$. A equação $ax + by = c$ admite solução em números inteiros se, e somente se, $(a, b)|c$.*

**Proposição 2.2.** *Seja $x_0, y_0$ uma solução da equação $ax+by = c$, onde $(a, b) = 1$. Então, as soluções $x, y$ em $\mathbb{Z}$ da equação são*

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

As demonstrações dos resultados acima podem ser encontradas em (HEFEZ, 2016).

Em algumas situações é possível encontrar uma ou mais soluções da equação diofantina linear através do método de inspeção, ou seja, através da tentativa e erro verificando quais soluções tornam verdadeira a sentença matemática. No entanto, existem outros métodos para a resolução. Um que podemos mencionar envolve as proposições acima citadas e a versão estendida do *Algoritmo de Euclides* para determinar o *MDC (Máximo Divisor Comum)* entre os coeficientes da equação (HEFEZ, 2016). Utilizaremos esse método na 2.2.3 para resolver os exemplos da lista de atividades da gamificação.

**Tema da sequência didática:** Equações Diofantinas Lineares.

**Objetivos da sequência didática:**

- Introduzir os estudos de equações diofantinas no ensino fundamental.
- Compreender o conceito de equação diofantina linear com duas incógnitas.
- Aplicar equação diofantina linear com duas incógnitas na resolução de situações problemas.
- Desenvolver o raciocínio lógico e investigativo através de situações problemas contextualizadas à prática diária.

**Conteúdos a serem trabalhados:**

- MDC e Algoritmo de Euclides.
- Equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

**Habilidades da BNCC a serem desenvolvidas:**
**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

**Materiais necessários:** Papel, lápis, data show, computador e/ou tablet.

**Detalhamento das aulas:**

**1ª Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada em semicírculo.

**Introdução:** A aula será expositiva e discutida para apresentação da história de Diofanto e apresentação das equações diofantinas lineares.

**Desenvolvimento:** A aula terá início com a apresentação de slides ⟨https://x.gd/drEEY⟩ e um vídeo (duração: 1'40") - Diofanto de Alexandria (autor: Hercules Gimenez) - ⟨https://www.youtube.com/watch?v=t1rcmnQMcv8⟩ contando de forma breve a história de Diofanto. A seguir serão apresentadas situações problemas que abordam os conteúdos Máximo Divisor Comum (MDC), Equações do 1º grau e Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, que são pré-requisitos para a aprendizagem das equações diofantinas lineares. A partir desses exemplos, os alunos discutirão estratégias e analisarão qual a melhor solução. Inicialmente os alunos tentarão responder individualmente após 10 min, eles vão apresentar as soluções encontradas e como pensaram suas soluções numa discussão coletiva (15 min). Na sequência será apresentada a solução dos problemas e será feita a sistematização do conteúdo apresentando a definição e a condição de existência da solução das equações diofantinas lineares.

**Conclusão:** Para finalizar serão feitos alguns comentários a respeito da aplicação das equações diofantinas lineares em situações diárias.

**Avaliação:** A participação e o desempenho dos estudantes na solução proposta para os exemplos apresentados.

### Descrição dos exemplos das situações problemas

Com o objetivo de revisar e solucionar possíveis dúvidas sobre os conteúdos abordados em séries anteriores que são pré-requisitos para a aprendizagem das equações diofantinas lineares, e também aplicá-los em situações do cotidiano, contextualizando e dando maior significado aos conteúdos matemáticos através da resolução de situação problema, os alunos responderão aos exemplos abaixo. O primeiro exemplo aborda o Máximo Divisor Comum (MDC), o segundo apresenta uma equação do 1º grau e o terceiro um Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

**Exemplo 1**

Sr. Chico é comerciante e deseja colocar 520 tomates e 340 batatas em caixas, de tal forma que cada caixa tenha a mesma quantidade de tomates e batatas, e que seja a maior possível. Determine o número de tomates e batatas em cada caixa e o número de caixas necessárias.

*Resolução:* A maior quantidade em cada caixa, igual para tomates e batatas, é o MDC entre 520 e 340, pois o máximo divisor comum de dois números, não simultaneamente nulos, é o maior elemento do conjunto de todos os divisores comuns desses números.

Tabela 2.4: Cálculo do MDC

| | 1 | 1 | 1 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| 520 | 340 | 180 | 160 | 20 |
| 180 | 160 | 20 | 0 | |

Portanto, cada caixa deverá conter 20 batatas ou 20 tomates.
Serão $520 : 20 = 26$ caixas de tomates e $340 : 20 = 17$ caixas de batatas.

No total serão necessárias $26 + 17 = 43$ caixas.

**Exemplo 2**

Emily tem $R\$ \ 300,00$ e está economizando para comprar um celular que custa $R\$ \ 1550,00$. Ela consegue economizar $R\$ \ 50,00$ por semana. Determine em quantas semanas Emily conseguirá juntar dinheiro suficiente para comprar o celular.

*Resolução:* A equação que representa a situação problema é dada por:

$$300 + 50x = 1550$$

onde x representa a quantidade de semanas.

$$50x = 1550 - 300$$

$$50x = 1250$$

$$x = 25$$

Portanto, Emily precisará de 25 semanas para juntar o dinheiro para comprar o celular.

**Exemplo 3**

Lucas usou apenas cédulas de $R\$$ $20,00$ e de $R\$$ $5,00$ para fazer um pagamento de $R\$$ $140,00$. Quantas cédulas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram 10 cédulas?

*Resolução:* Fazendo a modelagem desse problema temos um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, sendo $x$ a quantidade de cédulas de $R\$$ $20,00$ e y a quantidade de cédulas de $R\$$ $5,00$:

$$\begin{cases} 20x + 5y = 140 \\ x + y = 10 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Resolvendo o sistema pelo método da substituição, isolaremos a incógnita $x$ na equação $x + y = 10$, obtendo $x = 10 - y$.
Substituindo o valor de x na equação $20x + 5y = 140$, temos:

$$20(10 - y) + 5y = 140$$

$$200 - 20y + 5y = 140$$

$$-15y = -60$$

$$y = 4$$

Encontraremos o valor de x substituindo $y = 4$ em $x = 10 - y$:

$$x = 10 - 4$$

$$x = 6$$

Assim, Lucas usou 6 cédulas de $R\$$ $20,00$ e 4 cédulas de $R\$$ $5,00$.

**2ª e 3º Aulas**

**Organização da turma:** A turma será organizada em grupos com quatro ou cinco componentes.

**Introdução:** Nesta aula, os alunos trabalharão em grupos com quatro ou cinco componentes para uma atividade gamificada. Eles resolverão uma lista de problemas que recaem em equações diofantinas lineares.

**Desenvolvimento:** Com a turma dividida em grupos, será retomada a resolução de problemas com as equações diofantinas lineares com duas incógnitas, na qual será abordada a definição, a condição de existência para solução e um exemplo com resolução que será exibido pelo vídeo - Aritmética - Aula 30 - Equações diofantinas. [5]. Outra opção será substituir a exibição do vídeo por uma aula expositiva e participativa para abordagem do conteúdo, de acordo com a disponibilidade dos recursos tecnológicos e/ou do perfil da turma. Em seguida, os alunos farão uma atividade gamificada. A gamificação é uma abordagem que traz para a sala de aula os elementos e a linguagem dos jogos na realização das atividades, trazendo desafios, competições e recompensas para motivar e envolver os alunos. Dessa forma, os grupos receberão uma lista com problemas para serem resolvidos de acordo com um sorteio, mas para essa atividade haverá um tempo definido, pois o grupo que terminar primeiro vai apresentar a solução para os demais colegas. A pontuação será para o(s) grupo(s) que responder(em) corretamente o maior número de situações problemas da lista de atividades. O grupo pode utilizar o método que desejar para responder, no entanto é importante verificar se a equação tem solução: entre os problemas haverá um que não possui solução; os alunos serão avisados e terão que descobrir qual dos problemas é impossível de ser resolvido.

**Conclusão:** A aula terminará com a discussão sobre os resultados da atividade gamificada e a solução da lista de atividades.

**Avaliação:** A avaliação será durante todo processo de resolução da lista de atividades, considerando a participação e desenvolvimento da atividade gamificada.

Os exemplos apresentados para aplicação da atividade buscam ampliar as concepções dos alunos em relação à aritmética e à álgebra, através da resolução de problemas contextualizados, permitindo a aplicabilidade de conteúdos estudados anteriormente, além de propiciar o desenvolvimento do raciocínio lógico e da autonomia para a elaboração de métodos próprios de resolução das questões, possibilitando a tomada de decisões em situações do cotidiano, potencializando a aprendizagem significativa. Não é esperado que os estudantes respondam aos problemas através do método formal, provavelmente usarão o método de inspeção ou utilizarão outras estratégias. As resoluções serão apresentadas formalmente ao final dessa aula, nessa mesma subseção 2.2.3, para uso do professor.

[5]⟨https://www.youtube.com/watch?v=HAX0whUteAw&list=PLrVGp617x0hC8WkPHtM3IjoOiiyJs-hHh&index=30⟩

**Atividade gamificada - Equações diofantinas lineares**[6]

Tabela 2.5: Atividade Gamificada

| | |
|---|---|
| Nome da gamificação | Desafio Diofantino |
| Necessidade Pedagógica | Modelar e resolver problemas de equações diofantinas lineares |
| Objetivo: | Aprender a resolver equações diofantinas lineares através de situações problemas. |
| Meta do jogo: | - Acertar a solução dos problemas da lista, sendo que um dos problemas não tem solução, neste caso será considerada como resposta correta se os alunos justificarem o fato da equação não ter solução.<br>- Obter o maior número de acertos em menor tempo. |
| Regras: | - Formar grupos com 4 ou 5 participantes.<br>- Cada grupo receberá uma lista de atividades com situações problemas.<br>- Cada grupo terá uma ficha para registro da equação e da solução.<br>- Sortear o número da questão que será respondida. Todos os grupos responderão a questão.<br>- O grupo que terminar primeiro apresentará para os demais a solução.<br>- Para solução incorreta, o segundo grupo com menor tempo de resposta irá responder.<br>- O grupo com mais acertos em menor tempo vence. |
| Elementos/Estrutura: | * Papel, lápis e borracha.<br>* Fichas para registro das equações e do resultado.<br>* Lista de atividades.<br>* Fichas para sorteio numeradas de 1 a 10 |
| Quem vai participar: | Todos os alunos do 9º ano. |

[6]⟨www.gameducar.com.br⟩

| Colégio: | |
|---|---|
| Disciplina: | Série/Turma: |
| Professor(a): | Data: |
| Aluno(a): | |

Lista de Atividade

Equações Diofantinas Lineares [7]

1. Raquel e Analu foram à sorveteria com $R\$$ 50,00. Ao chegar à sorveteria viram que havia duas opções de sorvete: frutas - $R\$$ 3,00 e cremosos - $R\$$ 5,00. Existe uma grande variedade de sabores de sorvete de frutas e cremosos.
   a) Qual o número máximo de sorvetes que elas podem comprar gastando todo o dinheiro?
   b) Qual o número mínimo de sorvetes que elas podem comprar gastando todo o dinheiro?

2. João foi ao caixa eletrônico para realizar um saque no valor de $R\$$ 320,00. Nesse caixa só tinha cédulas de $R\$$ 20,00 e $R\$$ 50,00. Qual a maior e a menor quantidade de notas que João poderá receber ao realizar o saque?

3. MONTEIRO - Exprimir 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo seja divisível por 11.

4. Cecília comprou um número ímpar de lápis e algumas canetas, gastando $R\$$ 25,00. Sabendo-se que os preços unitários dos lápis e das canetas são, respectivamente, $R\$$ 2,00 e $R\$$ 4,00, determine quantos lápis e quantas canetas ela comprou.

5. O valor da entrada de um teatro é $R\$$ 7,00 e da meia-entrada é de $R\$$ 5,00. Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de $R\$$ 250,00?

6. CAMPOS, G - Uma certa quantidade de maçãs é dividida em 37 montes de igual número. Após serem retiradas 17 frutas, as restantes são acondicionadas em 79 caixas, cada uma com a mesma quantidade. Quantas maçãs foram colocadas em cada caixa? Quantas maçãs tinha cada monte?

[7] Algumas questões foram inspiradas e/ou adaptadas das obras de SILVA et al.; VANSAN; CAMPOS, A et al.

Modelo de ficha para registro da equação e do resultado

Tabela 2.6: Ficha da gamificação

| Problema | Equação | Resultado |
|---|---|---|
| 1. | | |
| 2. | | |
| 3. | | |
| 4. | | |
| 5. | | |
| 6. | | |

**Resolução da lista de atividades - Equações diofantinas lineares**

1. Raquel e Analu foram à sorveteria com $R\$ \ 50,00$. ao chegar a sorveteria viram que havia duas opções de sorvete: frutas - $R\$ \ 3,00$ e cremosos - $R\$ \ 5,00$. Existe uma grande variedade de sabores de sorvete de frutas e cremosos.

   **Resolução:** Considerando a quantidade de sorvete de frutas sendo $x$ e a quantidade de sorvete cremosos sendo $y$, temos a seguinte equação:

$$3x + 5y = 50,$$

   onde para $ax + by = c$ temos: $a = 3$, $b = 5$, e $c = 50$.
   Temos uma equação diofantina linear com duas incógnitas. Como $(3, 5) = 1$ e $1|50$, pela Proposição 2.1 a equação possui solução.
   Verifica-se por inspeção que $x_0 = 0; \quad y_0 = 10$ é uma solução particular. Consequentemente, pela Proposição 2.2 as soluções são:

$$\begin{cases} x = x_0 + bt = 0 + 5t = 5t \\ y = y_0 - at = 10 - 3t; \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

   Contudo, é importante lembrar que o problema aceita apenas soluções inteiras não-negativas. Então, vamos descobrir em qual intervalo $t$ deve variar em 2.2.2.

$$\begin{gathered} 5t \geq 0 \quad \text{e} \quad 10 - 3t \geq 0 \\ t \geq 0 \quad \text{e} \quad t \leq 3. \end{gathered} \tag{2.2.3}$$

   Assim, por 2.2.3 temos que $t$ pode assumir valores no conjunto $\{t \in \mathbb{Z}; 0 \leq t \leq 3\}$.

$$t = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 10);$$

$$t = 1 \Rightarrow (x, y) = (5, 7);$$

$$t = 2 \Rightarrow (x, y) = (10, 4);$$

$$t = 3 \Rightarrow (x, y) = (15, 1).$$

a) Qual o número máximo de sorvetes que elas podem comprar gastando todo o dinheiro?
*O número máximo de sorvetes que elas podem comprar são 16 sorvetes, sendo 15 de frutas e 1 cremoso.*

b) Qual o número mínimo de sorvetes que elas podem comprar gastando todo o dinheiro?
*O número mínimo de sorvetes que elas podem comprar são 10 sorvetes cremosos.*

2. João foi ao caixa eletrônico para realizar um saque no valor de $R\$\ 320,00$. Nesse caixa só tinha cédulas de $R\$\ 20,00$ e $R\$\ 50,00$. Qual a maior e a menor quantidade de notas que João poderá receber ao realizar o saque?

**Resolução:** Resolveremos a equação:

$$20x + 50y = 320. \tag{2.2.4}$$

Pela Proposição 2.1 temos que a equação tem solução, pois $(20, 50) = 10$ e $10|320$. Dividindo ambos os membros da equação por $10 = (20, 50)$, obtemos a equação equivalente

$$2x + 5y = 32. \tag{2.2.5}$$

Vamos, em seguida, achar uma solução particular $x_0, y_0$ desta última equação 2.2.5. Pelo Algoritmo de Euclides, temos:

$$1 = 2 \cdot (-2) + 5 \cdot (1).$$

Daí temos

$$32 = 2 \cdot (-2 \cdot 32) + 5 \cdot (1 \cdot 32)$$

$$32 = 2 \cdot (-64) + 5 \cdot (32).$$

Então $(-64, 32)$ é uma solução particular para a equação 2.2.5. Consequentemente a solução geral é dada por:

$$x = -64 + 5t, \quad y = 32 - 2t, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Note que o problema aceita apenas soluções inteiras não-negativas, ou seja:

$$-64 + 5t \geq 0 \quad \text{e} \quad 32 - 2t \geq 0$$

$$t \geq 13 \quad \text{e} \quad t \leq 16.$$

Assim, $t$ pode assumir valores no conjunto $\{t \in \mathbb{Z}; 13 \leq t \leq 16\}$.

$$t = 13 \Rightarrow (x, y) = (1, 6);$$

$$t = 14 \Rightarrow (x, y) = (6, 4);$$

$$t = 15 \Rightarrow (x, y) = (11, 2);$$

$$t = 16 \Rightarrow (x, y) = (16, 0).$$

*Portanto a maior quantidade de notas que João poderá receber é 16 notas de* $R\$ \ 20,00$. *E a menor quantidade de notas é 7 notas, sendo 1 nota de* $R\$ \ 20,00$ *e 6 notas de* $R\$ \ 50,00$.

3. MONTEIRO - Exprimir 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo seja divisível por 11.

**Resolução:** De acordo com o enunciado, sejam $7x$ e $11y$ os dois inteiros positivos. Temos então:

$$7x + 11y = 100. \tag{2.2.6}$$

Resolvendo, $(7, 11) = 1$ e $1|100$, logo temos que a equação 2.2.6 tem solução. Pelo Algoritmo de Euclides, temos:

$$\begin{aligned} 11 &= 7 \cdot 1 + 4 \\ 7 &= 4 \cdot 1 + 3 \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1. \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima umas nas outras, obtemos
$1 = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - (7 - 4 \cdot 1)1 = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = (11 - 7 \cdot 1)2 - 7 \cdot 1 = 7(-3) + 11 \cdot (2)$.
Temos então:

$$100 = 7(-3 \cdot 100) + 11(2 \cdot 100) = 7(-300) + 11(200).$$

A solução geral é dada por:

$$x = -300 + 11t, \quad y = 200–7t, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como $x$ e $y$ são inteiros positivos, então:

$$-300 + 11t > 0 \quad \text{e} \quad 200 - 7t > 0$$

$$t > 27 \quad \text{e} \quad t < 28,57.$$

Portanto, $t = 28$.
Neste caso temos:

$$x = -300 + 11 \cdot 28 = 8 \quad \text{e} \quad y = 200 - 7 \cdot 28 = 4.$$

Os números são $7x = 7 \cdot 8 = 56$ e $11 \cdot 4 = 44$.

4. Cecília comprou um número ímpar de lápis e algumas canetas, gastando $R\$\ 25,00$. Sabendo-se que os preços unitários dos lápis e das canetas são, respectivamente, $R\$\ 2,00$ e $R\$\ 4,00$, determine quantos lápis e quantas canetas ela comprou.

   **Resolução:** Escrevendo a equação da modelagem do problema temos:

   $$2x + 4y = 25.$$

   *Note que, considerando o conjunto universo sendo os números inteiros, a equação não tem solução.* Analisando a paridade da soma $2x + 4y$ temos que o resultado será um número par e temos que o termo independente 25 é ímpar. De acordo com a Proposição 2.1, temos $(2, 4) = 2$ e $2 \nmid 25$.

5. O valor da entrada de um teatro é $R\$7,00$ e da meia-entrada é de $R\$\ 5,00$. Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de $R\$\ 250,00$?

   **Resolução:** Resolveremos a equação

   $$7x + 5y = 250, \tag{2.2.7}$$

   onde $x$ representa a quantidade de pessoas que pagarão a entrada inteira e $y$ sendo a quantidade de pessoas de meia-entrada.
   Pela Proposição 2.1 temos que a equação 2.2.7 tem solução, pois $(5, 7) = 1$ e $1|250$.

Vamos, em seguida, achar uma solução particular $x_0, y_0$ da equação pelo Algoritmo de Euclides:

$$\begin{aligned} 7 &= 5 \cdot 1 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

Substituindo as equações acima umas nas outras, obtemos:

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (7 - 5 \cdot 1) = 5 - 2 \cdot 7 + 5 \cdot 2 = 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2).$$

Temos então:

$$250 = 7 \cdot (-2 \cdot 250) + 5 \cdot (3 \cdot 250).$$

Então $(-500, 750)$ é uma solução particular da equação e, consequentemente, a solução geral é dada por:

$$x = -500 + 5t, \quad y = 750 - 7t, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como queremos determinar o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão temos, já que $x$ e $y$ são positivos:

$$-500 + 5t > 0 \quad \text{e} \quad 750 - 7t > 0$$

$$t > 100 \quad \text{e} \quad t < 107,14.$$

Assim, $t$ pode assumir valores no conjunto $\{t \in \mathbb{Z}; 100 < t < 108\}$.

$$t = 101 \Rightarrow (x, y) = (5, 43);$$

$$t = 102 \Rightarrow (x, y) = (10, 36);$$

$$t = 103 \Rightarrow (x, y) = (15, 29);$$

$$t = 104 \Rightarrow (x, y) = (20, 22);$$

$$t = 105 \Rightarrow (x, y) = (25, 15);$$

$$t = 106 \Rightarrow (x, y) = (30, 8).$$

$$t = 107 \Rightarrow (x, y) = (35, 1).$$

*Portanto,* $x + y = 35 + 1 = 36$ *será o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja R\$* $250,00$*, sendo que 35 pessoas* *pagarão o valor da entrada inteira, R\$ 7,00, e 1 pessoa pagará o valor de R\$ 5,00 da meia-entrada.*

6. CAMPOS, G - Uma certa quantidade de maçãs é dividida em 37 montes de igual número. Após serem retiradas 17 frutas, as restantes são acondicionadas em 79 caixas, cada uma com a mesma quantidade. Quantas maçãs foram colocadas em cada caixa? Quantas maçãs tinha cada monte?

   **Resolução:** Vamos considerar que o número total de maçãs é $x$ e o número de maçãs em cada monte é $y$, assim:

$$\frac{x}{37} = y. \tag{2.2.8}$$

   Analisando a segunda informação do problema, onde $x$ representa o número de maçãs e $z$ representa o número de maçãs em cada caixa, vem:

$$\frac{x-17}{z} = 79. \tag{2.2.9}$$

   De 2.2.8 e 2.2.9, temos:

$$37y - 17 = 79z \iff 37y - 79z = 17. \tag{2.2.10}$$

   Como $(37, 79) = 1$ e $1|17$, então a equação 2.2.10 tem solução.
   Utilizando o Algoritmo de Euclides, temos:

$$\begin{aligned} 5 &= 79 - 37 \cdot 2 \\ 2 &= 37 - 5 \cdot 7 \\ 1 &= 5 - 2 \cdot 2. \end{aligned}$$

   Fazendo as substituições, obtemos:

$$1 = 5-2\cdot 2 = 5-2\cdot(37-5\cdot 7) = 5\cdot 15-2\cdot 37 = 79\cdot 15-37\cdot 32 = 37\cdot(-32)-79\cdot(-15).$$

   Temos então:

$$17 = 37 \cdot (-32 \cdot 17) - 79 \cdot (-15 \cdot 17).$$

   Assim, $(-544, -255)$, é uma solução de particular de 2.2.10, que tem como solução geral:

$$x = -544 - 79t, \quad y = -255 - 37t, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como o problema trata sobre a quantidade de maçãs, então, $y$ e $z$ devem ser números naturais, sendo assim,

$$-544 - 79t \geq 0 \quad \text{e} \quad -255 - 37t \geq 0$$

$$t \leq -6,88 \quad \text{e} \quad t \leq -6,89,$$

que equivalem a $t \leq -7$.
O menor número de maçãs em cada monte $y$, é obtido com $t = -7$, daí

$$y = -544 - 79 \cdot (-7) = 9, \quad z = -255 - 37 \cdot (-7) = 4 \quad \text{e} \quad x = 37 \cdot 9 = 333.$$

*Então foram colocadas 4 maçãs em cada caixa, e em cada monte, havia no mínimo 9 maçãs.*
É importante destacar que nesse problema só podemos dizer a quantidade mínima de maçãs.

**4º Aula**
**Organização da turma:** A turma será organizada com os mesmos grupos da aula anterior.

**Introdução:** Nesta aula, os alunos trabalharão com os grupos da aula anterior fazendo uso do Geogebra.
**Desenvolvimento:** Os grupos formados na aula anterior serão retomados e farão uso do tablet ou computador para, utilizando o Geogebra, inserir as equações modeladas matematicamente dos exemplos resolvidos na atividade gamificada e, assim, conhecer a representação gráfica das soluções inteiras das equações diofantinas lineares com duas incógnitas e, nessa oportunidade, pode ser discutido também que as soluções inteiras fazem parte de um conjunto discreto e graficamente são representadas como pontos.

**Conclusão:** A aula terminará com a discussão sobre os conteúdos apresentados, a sua aplicação e importância para resolução de problemas do cotidiano.

**Avaliação:** A avaliação será contínua durante o desenvolvimento de todas as atividades propostas na aula.

**Utilizando o Geogebra para representação gráfica das soluções das equações**

Os problemas 01 e 02 serão representados graficamente através do Geogebra, a equação diofantina será digitada na janela de entrada para que os alunos verifiquem se as soluções são verdadeiras ou para que possam buscar por soluções diferentes, podendo inclusive fazer observações relacionadas as soluções reais. Abaixo ilustramos os gráficos esperados.

Figura 2.16: Geogebra - Exemplo 01

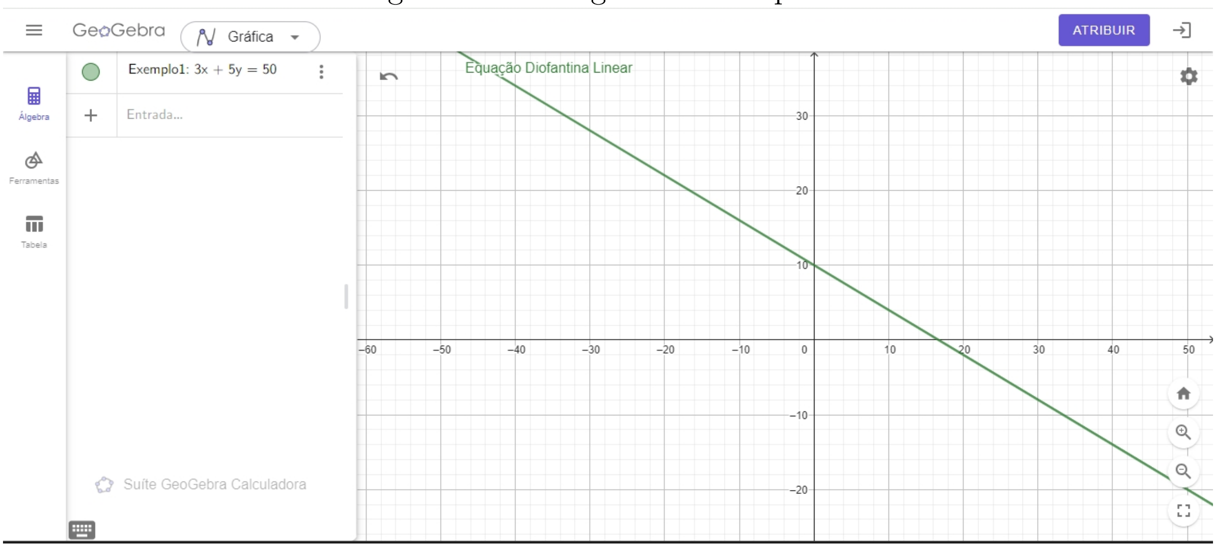
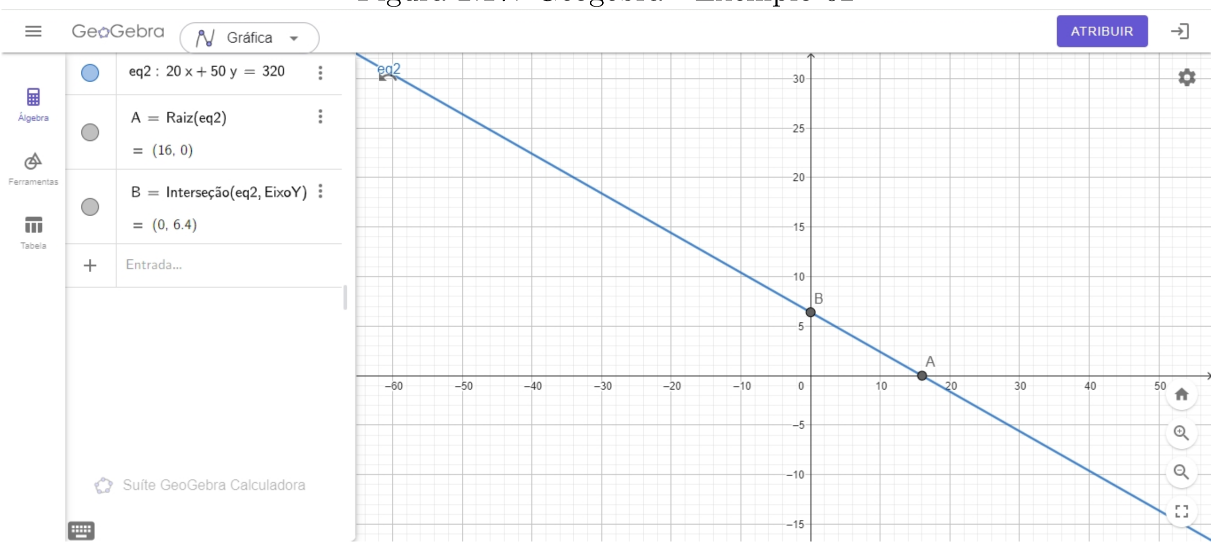



Figura 2.17: Geogebra - Exemplo 02



# Capítulo 3

# Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de abordagem para o estudo das equações no nono ano, elencando argumentos que respondam à questão norteadora: *Como despertar nos estudantes o interesse pelo estudo das equações por meio de sequências didáticas assistidas por elementos da história da matemática e da resolução de problemas?*

Para alcançar o nosso objetivo de discutir o estudo das equações dos 1º e 2º graus e das equações diofantinas lineares com o auxílio da história da matemática e da resolução de problemas e responder à nossa questão norteadora, elaboramos três sequências didáticas com o intuito de despertar o interesse do aluno para o estudo das equações através de uma aprendizagem contextualizada e significativa que buscam desmistificar a abstração algébrica e de discutir a possibilidade de introdução das equações diofantinas lineares no Ensino Fundamental.

Com o intuito de colaborar com o enfrentamento aos desafios do ensino da matemática e na busca por um ensino com mais qualidade e eficiência, este trabalho pode servir de inspiração para professores da educação básica que busquem trabalhar com as equações no nono ano fazendo uso de metodologias ativas.

Realizou-se, no primeiro momento, um estudo sobre o ensino da matemática, destacando a importância da Educação Matemática na abordagem das tendências para um ensino que supere as dificuldades, buscando melhorar os resultados dos índices apresentados atualmente pelas avaliações nacionais e internacionais. Além disso, discorremos sobre como a BNCC e os PNC orientam para uma educação baseada no desenvolvimento de competências e habilidades, ou seja, do letramento matemático que assegure aos estudantes reconhecer esse conhecimento como fundamental para a compreensão e atuação no mundo favorecendo também o raciocínio lógico e crítico.

Nesse estudo, verificou-se a necessidade de motivar a aprendizagem matemática, destacando o papel do aluno como protagonista do seu aprendizado e o professor como mediador e orientador desse processo. Nesse sentido, foi muito importante enfatizar o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) com práticas pedagógicas que pretendem envolver e engajar os alunos.

As sequências didáticas foram construídas para fomentar o estudo das equações partindo de uma revisão das equações do 1º grau que utilizou a história da matemática como metodologia de ensino para incentivar a pesquisa e a investigação, buscando responder aos "porquês" matemáticos. Foram disponibilizadas uma diversidade de atividades para tornar o aprendizado mais atrativo e dinâmico.

A sequência didática para o estudo das equações do 2º grau destaca a importância desse conteúdo em diversas áreas do conhecimento e utiliza a resolução de problemas como metodologia de ensino aliada à metodologia ativa de Rotação por estações com auxílio de jogos e recursos digitais, no entanto, de acordo com a realidade escolar, os recursos digitais podem ser substituídos e podem ser feitas adaptações. Os métodos pesquisados para resolução das equações trouxeram uma oportunidade para os alunos perceberem a construção humana da matemática com a contribuição de antigas civilizações e de matemáticos importantes.

Por fim, para introduzir o estudo das equações diofantinas lineares no Ensino Fundamental recorremos ao fato dos conhecimentos prévios necessários para esse aprendizado terem sido trabalhados nas séries anteriores. No entanto, destacamos que de acordo com o resultado levantado após a aplicação das atividades diagnósticas e dos exemplos indicados, o professor pode elaborar uma sequência de atividades para revisar tais conteúdos. A gamificação foi aplicada para dinamizar e despertar o interesse dos alunos na solução de problemas que poderiam ser respondidos pelo método de inspeção, ou seja, por tentativa e erro, que foram contextualizados com situações da vida real. Dessa forma, entendemos que é possível introduzir esse conteúdo nessa etapa da educação básica, enriquecendo ainda mais o aprendizado das equações.

A representação gráfica das equações diofantinas lineares modeladas dos exemplos da atividade gamificada teve como sugestão a visualização através do Geogebra, mas que pode também ser representada no plano cartesiano, em malha quadriculada.

Diante da importância da matemática na formação integral dos educandos, propomos atividades que visam despertar o entusiasmo do aluno, desenvolvendo as habilidades de criar, comparar, atuar criticamente na sociedade e que motivem o aprendizado para uma disciplina que é considerada muito difícil e que ainda tem um alto índice de reprovação na educação básica.

Dada a relevância do tema e os desafios que precisam ser vencidos no ensino da matemática, entendemos que há um caminho longo a ser percorrido com o propósito de tornar esse ensino mais interessante, prático e de qualidade, de forma que os estudos, pesquisas, recomendações e discussões precisam continuar ocorrendo, para contribuir com a transformação da realidade educacional.

Por fim, entendemos que este trabalho se constituiu como uma contribuição para o estudo das equações no Ensino Fundamental seguindo pelo caminho da história da matemática, pois acreditamos que pode colaborar muito para uma aprendizagem contextualizada, respondendo aos questionamentos e indagações dos alunos, e da resolução de problemas, que permite o desenvolvimento de um posicionamento crítico, diante de problemas reais e de situações desafiadoras, além de tornar a aprendizagem significativa. As metodologias sugeridas aliadas às Tecnologias digitais da Comunicação e Informação são subsídios a uma prática pedagógica mais eficiente para ensinar matemática.

# Referências Bibliográficas


BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. [S.l.]: Penso Editora, 2017.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Álgebra**. [S.l.]: Atual Editora, 1992.

BIANCHINI, E. **Matemática. 9º ano**. São Paulo: ed. Moderna, 2015.

BICUDO, M. A. V.; PAULO, R. M. Um exercício filosófico sobre a pesquisa em educação matemática no brasil. **Boletim de Educação Matemática**, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 25, n. 41, p. 251–298, 2011.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC-Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

_____. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

CAMPOS, A, d. et al. Equações diofantinas lineares: possibilidades didáticas usando a resolução de problemas. Universidade Federal de Santa Maria, 2015.

CAMPOS, G, D. M. Equações diofantinas lineares. Universidade Federal do Mato Grosso, 2013.

CAPILHEIRA, B. H. Equações diofantinas lineares: uma proposta para o ensino médio. 2012.

CARVALHO, D. L. de. **Metodologia do ensino da matemática**. [S.l.]: Cortez Editora, 2014.

CARVALHO, J. Avaliação e perspectivas da área de ensino de matemática no brasil. **Em Aberto**, v. 14, n. 62, 1994.

CHAQUIAM, M. O uso da história da matemática e dos conteúdos matemáticos na sala de aula. **XIII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo**, 2016.

_____. **Ensaios Temáticos: História e Matemática em Sala de Aula.** Belém, 2017.

CREASE, R. P. **As grandes equações**. Rio de Janeiro: Tradução de A. Cherman. Zahar, 2011.

D’AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus Editora, 1996. 79 p.

______. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP**, p. 97–115, 1999.

D’AMBROSIO, U. Priorizar história e filosofia da matemática na educação. **Revista Tópicos Educacionais**, Universidade Federal de Pernambuco, v. 18, n. 1-2, p. 159–175, 2012.

D’AMBROSIO, U. A interface entre história e matemática uma visão histórico-pedagógica. **Revista história da matemática para professores**, v. 7, n. 1, p. 41–64, 2021.

DANTE, L. R. **Matemática/Projeto Teláris**. São Paulo: Editora Ática, 2018.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. ed. [S.l.]: Editora Atual, 2003.

DUARTE, E. M.; CALEJON, L. C. Objetos de aprendizagem: uma análise da aprendizagem matemática e suas concepções tecnológicas. **Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul**, v. 2, n. 1, 2014.

D’AMBROSIO, B, S. Como ensinar matemática hoje. **Temas e Debates. SBEM. Ano II N**, v. 2, p. 15–19, 1989.

ECHERRíA, M. d. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed**, p. 13–42, 1998.

EVES, H. **Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H Domingues**. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 1, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. campinas, sp: Autores associados, 2006. **Coleção formação de professores**, 2010.

FLEMMING, D.; LUZ, M. E. F.; MELLO, A. C. C. d. **Tendências em educação matemática**. Palhoça: UnisulVirtual, 2005.

FREIRE, P. **Pedagogia dos Oprimidos**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

FREITAS, C. W. A. Equações diofantinas. 2015.

FREUDENTHAL, H. Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? **For the Learning of Mathematics,**, JSTOR, v. 2, n. 1, p. 30–33, 1981. Disponível em: ⟨http://www.jstor.org/stable/40240745.⟩

GIOVANNI Jr, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**. São Paulo: ed. FTD, 2018.

GUELLI, O. **Contando a história da matemática**. São Paulo: Ática, 1995.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is. 1992. 330p**. Tese (Doutorado) — Thesis (Phd)–University of Nottingham, Nottingham, 1992.

LOPES, A.; BORBA, M. d. C. Tendências em educação matemática. **Revista Roteiro**, Chapecó, n. 32, p. 49–61, 1994.

MACHADO, S. D. A. et al. Educação matemática: uma (nova) introdução. **São Paulo: EDUC**, 2008.

MENDES, I. A. História no ensino da matemática: trajetórias de uma epistemologia didática. **Rematec**, v. 8, n. 12, p. 66–85, 2013. Disponível em: ⟨https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/357/357⟩.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores. **Belém: SBHMat**, 2016.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **História na educação matemática**. [S.l.]: Autêntica Editora, 2019.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: Uma introdução à matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1998.

MONTEIRO, L. H. J. **Elementos da álgebra**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.

MORAN, J. et al. Mudando a educação com metodologias ativas. **Coleção mídias contemporâneas. Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens**, v. 2, n. 1, p. 15–33, 2015.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. **Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, 2018.

OLIVEIRA, A. F. F. P. d. et al. Equações diofantinas lineares: uma proposta para as séries finais do ensino fundamental. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2018.

ONUCHIC, L. d. L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. **Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP**, p. 199–220, 1999.

ONUCHIC, L. d. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. **Educação Matemática: pesquisa em movimento**, Cortez São Paulo, v. 4, p. 232–252, 2004.

PEREIRA, R. Método ativo: técnicas de problematização da realidade aplicada à educação básica e ao ensino superior. **VI Colóquio internacional. Educação e Contemporaneidade.**, São Cristóvão, SE, v. 20, 2012.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. Tópicos de história da matemática. **Coleção PROFMAT. 1ed. SBM**, Rio de Janeiro, 2012.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução: Heitor Lisboa de araújo**. Rio de Janeiro: Interciências - Segunda reimpressão, 1995.

PONTES, E. A. S. A capacidade de gerar soluções eficientes e adequadas no processo ensino e aprendizagem de matemática. v. 8, n. 10, p. 193–205, 2019. Disponível em: ⟨https://revistas.cesmac.edu.br/psicologia/article/view/891⟩.

RIBEIRO, A. J. A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 1, 2009.

ROCQUE, G.; PITOMBEIRA, J. B. Uma equação diofantina e suas resoluções. **Revista do Professor de Matemática, São Paulo**, v. 19, p. 39–47, 1991.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012.

ROQUE, T. Desmascarando a equação. a história no ensino de que matemática? **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 7, n. 2, p. p. 167–185, 2014.

SASSAKI, C. Para uma aula diferente, aposte na rotação por estações de aprendizagem. **Nova escola**, Outubro 2016. Disponível em: ⟨https://novaescola.org.br/conteudo/3352/blog-aula-diferente-rotacao-estacoes-de-aprendizagem⟩.

SCHOENFELD, A. H. Making sense of "out loud" problem-solving protocols. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 4, n. 2, p. 171–191, 1985.

SELBACH, S. e. o. **Matemática e didática**. Petropólis, RJ: Vozes, 2010.

SILVA, A. R. L. da; CATAPAN, A. H.; SILVA, C. H. da; REATEGUI, E. B.; SPANHOL, F. J.; GOLFETTO, I. F.; DIANA, J. B.; ALVES, L. R. G.; FADEL, L. M.; LINDNER, L. H. et al. **Gamificação na educação**. [S.l.]: Pimenta Cultural, 2014.

SILVA, A. V. d. et al. Uso das equações diofantinas lineares no ensino fundamental. Universidade Federal de Alagoas, 2013.

SILVEIRA, E.; MARQUES, C. **Matemática: compreensão e prática**. São Paulo: ed. Moderna, 2015.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. [S.l.]: Papirus editora, 2001.

SQUALLI, H. **Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base**. [S.l.]: National Library of Canada = Bibliotheque Nationale du Canada, Ottawa, 2002.

UNESCO. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica**. Brasília: EdUFSCar, 2016.

VALENTE, J. A. Inovação nos processos de ensino e de aprendizagem: o papel das tecnologias digitais. **Tecnologia e educação: passado, presente e o que está por vir. NIED/UNICAMP**, Campinas, SP, 2018.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental-: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. [S.l.]: Penso Editora, 2009.

VANSAN, A. H. Equações diofantinas: Um projeto para a sala de aula e o uso do geogebra. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 532–554, 2015.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Penso Editora, 2015.

ZERHUSEN, A.; RAKES, C.; MEECE, S. Diophantine equations. University of Kentucky., Kentucky, 1999.

# Apêndice A

**Respostas das Atividades Diagnósticas**

Atividade Diagnóstica - Tipo 01

1. 6 caixas
2. 101
3. a) $3t + 40 = 61$; b) $2y - 20 = 160$; c) $\frac{x}{2} + x = 96$; d) $5x = 3x + 62$
4. d
5. $x = 10\ g$
6. 57
7. 9 anos
8. Comprimento: $25\ m$ e largura: $15\ m$
9. 6 horas
10. $R\$\ 660,00$

Atividade Diagnóstica - Tipo 02

1. a, g, h, i, j
2. a) $3y - 5$
   b) $3 + y$
   c) $y$
3. a) Sim; b) Não; c) Sim; d) Não
4. a) $(n + 10) \cdot 3 = 72$; b) $n = 14$
5. a) $3x + 10 = 1$; b) $x + 18 = 30$; c) $80 - x = 24$

6. a) $x = 5$    b) $x = 10$    c) $x = -6$    d) $x = -8$    e) $x = -23$

7. $x + 5 = 37$

8. 4 irmãos

9. 68 e 70

10. a) $c = 3x$
    b) 6x + 2x = 80
    c) Largura: 10 $m$ e comprimento: 30 $m$

Atividade Diagnóstica - Tipo 03

1. a) sim;    b) Não;    c) Não;    d) Sim

2. a) $x = 5$
   b) $x = 17$
   c) $x = 4$
   d) $x = -1$

3. a) 16

4. a) $x = 150\ g$

5. a) 675 $m^2$

6. a) 28 maçãs

7. 16

8. 22 alunos

9. 65 anos

10. 44 $kg$ e 36 $kg$

# Apêndice B

**Respostas das Atividades com situações problema sobre equações do 1º grau**

1. a) $R\$ \ 1.040,00$
   b) $0,9 \cdot x - 40$

2. a) 36 l; 45 l
   b) 360 km

3. $R\$ \ 1.384,61$

4. a) x + 12 + x = 350
   b) 169 gols; 181 gols

# Apêndice C

**Respostas das Atividades das Estações de Aprendizagem**

- **Estação D**

  a) $a = 2; \quad b = 3; \quad c = -4$

  b) $a = 1; \quad b = 2; \quad c = 0$

  c) $a = -1; \quad b = 0; \quad c = 14$

  d) $a = 1; \quad b = 2; \quad c = -13$

  e) $a = 2; \quad b = 5; \quad c = 0$

  f) $a = -1; \quad b = 1; \quad c = 0$

  g) $a = 2; \quad b = 0; \quad c = -4$

  h) $a = -1; \quad b = 0; \quad c = 9$

  i) $a = 1; \quad b = 0; \quad c = -5$

  j) $a = 2; \quad b = 0; \quad c = 0$

- **Estação E**

  1. a) $x^2 + 24x - 81 = 0$
     b) $x = 3$
     c) Comprimento: 18 $m$ e largura: 12 $m$

  2. 24 m

  3. 0,2 m

  4. $R\$ \ 12,00$

  5. 6

# Apêndice D

**Respostas dos exemplos apresentados após a demonstração da fórmula resolutiva**

1. 8 ou 2
2. Frente do terreno: 10 $m$; Lateral: 14 $m$
3. -5 ou 4
4. $x = 8$
5. $x = 15$