

**MNPEF**  
Mestrado Nacional  
Profissional em  
Ensino de Física



Universidade Estadual  
de Feira de Santana



NÉVITON PEREIRA DOS SANTOS

## A FÍSICA DO TUNELAMENTO QUÂNTICO: UMA PROPOSTA DE ORGANIZADOR PRÉVIO PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pesquisa e Pós-Graduação do Departamento de Física da Universidade Estadual de Feira de Santana no Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Orientador (es):  
Prof. Dr. José Carlos Oliveira de Jesus  
Prof. Dr. José Luis Michinel

Feira de Santana-Bahia  
Setembro/2017

# A FÍSICA DO TUNELAMENTO QUÂNTICO: UMA PROPOSTA DE ORGANIZADOR PRÉVIO PARA O ENSINO MÉDIO

NÉVITON PEREIRA DOS SANTOS

Orientador (ES):

Prof. Dr. José Carlos Oliveira de Jesus

Prof. Dr. José Luis Michinel

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pesquisa e Pós-Graduação do Departamento de Física da Universidade Estadual de Feira de Santana no Curso de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física.

Aprovada por:

---

Prof. Dr. José Carlos Oliveira de Jesus – UEFS (Presidente)

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Gabriela Ribeiro Peixoto Rezende Pinto - UEFS

---

Prof. Dr. Hugo Saba Pereira Cardoso - UNEB

---

Prof. Dr. João de Azevedo Cardeal - UEFS

Feira de Santana/Bahia  
Setembro/2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

### Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

S238f Santos, Néviton Pereira dos  
A Física do tunelamento quântico: uma proposta de organizador  
prévio para o ensino médio./ Néviton Pereira dos Santos. – 2017.  
139f.

Orientadores: José Carlos Oliveira de Jesus; José Luis Michinel.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de  
Santana, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em  
Física, 2017.

1.Física – Ensino. 2.Sequência didática. 3.Aprendizagem  
significativa. 4.Tunelamento quântico. 5.Organizadores prévios.  
I.Jesus, José Carlos Oliveira de, orient. II.Michinel, José Luis, orient.  
III.Universidade Estadual de Feira de Santana. IV. Título.

CDU : 53(07)

Maria de Fátima de Jesus Moreira – Bibliotecária – CRB5/1120



## DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a todos os professores que, mesmo diante das dificuldades enfrentadas em sala de aula, entregam as suas vidas à tarefa de semear sonhos.

## **Agradecimentos**

Ao Deus criador que me deu a vida e a oportunidade de conhecer um pouco do universo.

Ao professor Prof. Dr. Álvaro Santos Alves por sua dedicação e empenho à frente da Coordenação do Polo 06 do MNPEF/UEFS.

Ao Profs. Dr. José Carlos Oliveira de Jesus e Prof. Dr. José Luis Michinel pela dedicação no papel de professores orientadores no desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, especialmente nos momentos de maiores dificuldades.

A CAPES pelo apoio financeiro, por meio da bolsa concedida.

A toda minha família pelo apoio incondicional principalmente nas horas difíceis.

Aos colegas de curso pelo companheirismo e palavras de estímulo.

## RESUMO

O presente trabalho traz uma proposta de Sequência Didática, composta de Organizadores Prévios como recurso instrucional potencialmente facilitador da Aprendizagem Significativa, de acordo com a Teoria de Ausubel. A Sequência começa pelo levantamento dos Conhecimentos Prévios dos Alunos, através da utilização de um Organizador Prévio que traz à tona o fenômeno do Tunelamento Quântico de moléculas de água aprisionadas em estruturas de berílio, e segue fazendo uso de outros Organizadores Prévios específicos para cada etapa da matéria de ensino, dos fenômenos ondulatórios presentes em meios físicos elásticos de densidades distintas. Na etapa seguinte, discutiu-se o fenômeno ondulatório em ondas eletromagnéticas através dos fenômenos da Reflexão Interna Total e Reflexão Interna Total Frustrada, ampliando a conceituação sobre ondas, com o objetivo de promover a formação dos conceitos subsunçores, e em seguida a ocorrência da Diferenciação Progressiva e da Reconciliação Integrativa dos conceitos adquiridos. A última etapa da Sequência Didática pautou-se no estudo detalhado de fenômenos quânticos a partir de modelos simples, visando o fenômeno do Tunelamento Quântico, através do uso de simuladores PhET “Tunelamento Quântico” e “Poço Duplo”. A Sequência Didática aqui proposta foi aplicada em uma turma de alunos da terceira série do Ensino Médio, de uma unidade escolar da rede pública de ensino do Estado da Bahia. A pesquisa é de natureza aplicada e objetivo descritivo-compreensivo, com a coleta de informações segundo uma abordagem qualitativa. Resultados preliminares indicam que a metodologia aplicada influenciou na aprendizagem dos alunos. Buscou-se identificar as mudanças argumentativas dos alunos partícipes e quais fatores mais contribuíram para a aprendizagem dos conceitos quânticos selecionados. Os materiais didáticos produzidos nessa dissertação serão disponibilizados via mídia digital no Sítio do Polo 06 e no Sítio do MNPEF.

**Palavras-chave:** Sequência Didática. Organizadores Prévios. Subsunçores. Aprendizagem Significativa. Tunelamento Quântico.

## ABSTRACT

The present work shows a proposal of Didactic Sequence, composed of Previous Organizers as an instructional resource potentially facilitating Significant Learning, according to the Ausubel Theory. The Sequence begins with the survey of the Students' brainstorming, through the use of a Preliminary Organizer that brings to the surface the quantum tunneling phenomenon of water molecules trapped in beryllium structures, and continues making use of other specific organizers for each stage of the of wave phenomena present in elastic physical media of different densities. In the next step, we discussed the wave phenomena in electromagnetic waves through the Total Internal Reflection and Total Frustrated Total Reflection phenomena, expanding the concept of waves, with the objective of promoting the formation of subfunction concepts, and then the occurrence of Differentiation Progressive and Integrative Reconciliation of acquired concepts. The last stage of the didactic sequence was based on the detailed study of quantum phenomena from simple models, aiming at the phenomenon of Quantum Tunneling, through the use of PhET simulators "Quantum Tunneling" and "Double Well". The Teaching Sequence proposed here was applied to a class of third grade students from a public school system in the State of Bahia. The research is applied nature and descriptive-comprehensive objective, with the collection of information according to a qualitative approach. Preliminary results indicate that the methodology applied influenced students' learning. We sought to identify the argumentative changes of the participating students and what factors contributed most to the learning of the selected quantum concepts. The didactic material produced in this dissertation will be made available via digital media in the Polo Site 06 and in the MNPEF Site.

**Keywords:** Teaching-learnig sequence. Advance Organizers. Subsunsors. Meaningful Learning. Quantum Tunelling.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1.1 Contextualização</b>	<b>11</b>
<b>1.2 Introdução da temática física moderna e contemporânea no ensino médio</b>	<b>12</b>
<b>1.3 REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>16</b>
1.3.1 Aportes para a revisão de literatura	16
1.3.2 Linha da revisão de literatura	16
<b>1.4 Penetração de barreiras por ondas eletromagnéticas</b>	<b>17</b>
1.4.1 Uma demonstração simples sobre a analogia clássica	17
1.4.2 Reflexão interna total frustrada ou penetração de barreira ótica	18
<b>1.5 Da problematização à pergunta da pesquisa</b>	<b>18</b>
1.5.1 A transposição da Física Clássica para a Física Moderna	19
<b>1.6 Recortes de artigos relacionados ao tema da pesquisa</b>	<b>20</b>
1.6.1 O Efeito Túnel e sua importância para a Mecânica Quântica	20
1.6.2 A inserção da Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio	22
<b>1.7 Síntese do projeto</b>	<b>25</b>
1.7.1 Sujeitos da pesquisa	25
1.7.2 Local da intervenção	26
<b>1.8 Objetivos da pesquisa</b>	<b>26</b>
1.8.1 Objetivo geral	26
1.8.2 Objetivos específicos	26
<b>CAPÍTULO 2. REFERENCIAIS TEÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS</b>	<b>27</b>
<b>2.1 Proposta do Mestrado em Ensino de Física</b>	<b>27</b>
<b>2.2 Aspectos gerais da Teoria Ondulatória</b>	<b>27</b>
2.2.1 Propagação de um pulso em um meio elástico	27
2.2.2 Reflexão de pulsos	30
2.2.3 Reflexão e refração de pulsos em cordas de densidades diferentes	31
<b>2.3 Estados estacionários em uma corda vibrante</b>	<b>33</b>
<b>2.4 Soluções da Equação de Onda.</b>	<b>34</b>
<b>2.5 Reflexão Interna Total Frustrada</b>	<b>37</b>
2.5.1 Penetração de Barreiras por Ondas Eletromagnéticas	38
2.5.2 Um exemplo de analogia do Efeito Tunelamento Quântico	39
2.5.3 Reflexão Interna Total Frustrada ou Penetração de Barreira Ótica	42
<b>CAPÍTULO 3. A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER</b>	<b>44</b>
<b>3.1 Sistemas simples tratados quanticamente</b>	<b>44</b>
<b>3.2 Sistemas quânticos simples</b>	<b>44</b>
3.2.1 Estados estacionários quânticos	44
<b>3.3 A partícula livre</b>	<b>46</b>
<b>3.4 Partícula numa caixa rígida ou poço infinito</b>	<b>48</b>

<b>3.5 Reflexão e transmissão de um feixe de partículas em um Degrau de Potencial</b>	<b>50</b>
3.5.1 Energia total da partícula menor do que a altura do degrau: ( $0 < E < U_0$ ).	51
3.5.2 Energia total da partícula maior do que a altura do degrau ( $E > U_0$ ):	54
<b>3.6 Barreira de Potencial e Tunelamento Quântico</b>	<b>55</b>
3.6.1 Energia total maior que a energia potencial na barreira: ( $E > V_0$ ).	57
3.6.2 Energia total menor que a energia potencial da barreira: ( $E < V_0$ ).	59
<b>3.7 A partícula numa caixa não rígida ou Poço Finito.</b>	<b>64</b>
3.7.1 Quantização: $0 < E < V_0$ .	65
3.7.2 Espalhamento e Transmissão Ressonante ( $E > V_0$ )	68
<b>3.8 Poço duplo simétrico</b>	<b>71</b>
3.8.1 Equação de autovalores e função de onda para o sinal positivo	75
3.8.2 Equação de autovalores e função de onda para o sinal negativo	76
<b>CAPÍTULO 4. A TEORIA DE AUSUBEL DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA</b>	<b>79</b>
<b>4.1 David Ausubel e a sua Teoria da Aprendizagem</b>	<b>79</b>
<b>4.2 A Aprendizagem significativa</b>	<b>81</b>
<b>4.3 A Teoria de Ausubel e a experiência em sala de aula</b>	<b>85</b>
<b>4.4 Os Conceitos e Proposições Gerais da Mecânica Quântica e o Efeito Túnel</b>	<b>88</b>
<b>4.5 Tipos de Aprendizagem Significativa</b>	<b>93</b>
<b>4.6 Processos da Aprendizagem Significativa</b>	<b>95</b>
<b>4.7 Os Processos de Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integrativa</b>	<b>96</b>
<b>4.8 Resultados esperados</b>	<b>96</b>
<b>CAPÍTULO 5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b>	<b>98</b>
<b>5.1 O Efeito Túnel</b>	<b>98</b>
<b>5.2 Justificativa</b>	<b>98</b>
<b>5.3 Um recorte do conteúdo da Mecânica Quântica no Ensino Médio</b>	<b>100</b>
5.3.1 Objetivo Geral	101
5.3.2 Objetivos Específicos	101
5.3.3 Hipóteses	102
<b>5.4 Referenciais Teóricos</b>	<b>102</b>
5.4.1 Referencial Pedagógico	102
5.4.2 Referente Epistemológico	104
5.4.3 Referencial da Mecânica Quântica	106
<b>5.5 Modelo da Sequência Didática</b>	<b>107</b>
<b>5.6 Características contextuais</b>	<b>109</b>
5.6.1 Local de aplicação da Sequência Didática	109
<b>5.7 Nível Educativo</b>	<b>110</b>
5.7.1 Tipo de Sequência Didática	110
<b>5.8 Enfoque ou ações curriculares maiores</b>	<b>110</b>

<b>5.9</b>	<b>Resultados esperados</b>	<b>110</b>
<b>5.10</b>	<b>Estratégia da sequência didática</b>	<b>111</b>
<b>5.11</b>	<b>Etapas da Sequência Didática</b>	<b>111</b>
5.11.1	Seleção e apresentação de Organizadores Prévios	111
5.11.2	Simuladores PhET utilizados	113
5.11.3	Experimentos Físicos:	113
5.11.4	Textos diversos.	113
<b>CAPÍTULO 6.</b>	<b>METODOLOGIA E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b>	<b>114</b>
<b>6.1</b>	<b>Aplicação do produto educacional MNPEF</b>	<b>114</b>
<b>6.2</b>	<b>A Turma e a Instituição de Ensino</b>	<b>114</b>
<b>6.3</b>	<b>Metodologia utilizada</b>	<b>115</b>
6.3.1	Pesquisa Qualitativa	116
6.3.2	Técnica de Coleta de dados	117
6.3.3	Análise de dados	117
<b>6.4</b>	<b>Aplicação da Sequência Didática</b>	<b>117</b>
6.4.1	Encontros da Sequência Didática	117
6.4.2	Registro da presença dos alunos	118
<b>6.5</b>	<b>Apresentação e tratamento de dados:</b>	<b>120</b>
6.5.1	Aula 01	120
6.5.2	Aula 02	120
6.5.3	Aula 03	125
6.5.4	Aula 04	130
6.5.5	Aula 05	132
6.5.6	Aula 06	133
<b>CAPÍTULO 7.</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>135</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>		<b>137</b>

# CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO

## 1.1 Contextualização

O trabalho aqui apresentado é um produto do programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF), promovido pela Sociedade Brasileira de Física (SBF) do qual o Departamento de Física da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) participa sendo responsável pelo Polo - 06.

A opção pela aplicação da Aprendizagem Significativa de Ausubel ocorre devido ao fato desta teoria de aprendizagem priorizar a apropriação/compreensão de conceitos e proposições presentes no material de ensino, o que deve favorecer a aquisição de conceitos da teoria quântica (não relativística) relacionados com o fenômeno do Tunelamento Quântico. Já do ponto de vista da Física, o tema Tunelamento Quântico é satisfatório na medida em que envolve alguns dos mais importantes conceitos e princípios da Mecânica Quântica.

Historicamente, a descoberta de materiais radioativos por Marie Curie no final do século XIX foi o embrião da teoria de tunelamento quântico. Entretanto, somente na década de 1920, o fenômeno do tunelamento quântico assumiu um papel de destaque na teoria quântica quando Friedrich Hermann Hund<sup>1</sup> (1896-1997) considerou o tunelamento em seus trabalhos sobre poço duplo em 1927. Logo em seguida, em 1928, George Gamow solucionou o decaimento alfa através do tunelamento (MERZBACHER, 2002, p.44). A partir daí, foi-se descobrindo que outros fenômenos físicos importantes envolvem o tunelamento, entre eles pode-se citar a fusão nuclear presente no sol e em outras estrelas que ocorre via tunelamento, a emissão de elétrons da superfície de metais e a inversão da molécula de amônia  $\text{NH}_3$  (FEYNMAN; 1963 p.9-1). Mais recentemente, pesquisadores comunicaram a descoberta do tunelamento de moléculas de água em cristais de berílio, em artigo publicado na prestigiosa revista Physical Review Letters (KOLESNIKOV et al., 2016).

Do ponto de vista da mecânica quântica, o tunelamento de partículas massivas ocorre em consequência da natureza ondulatória da matéria, e a sua compreensão está relacionada aos seus princípios fundamentais como o princípio da incerteza, o princípio da complementaridade e a probabilidade, e o objetivo de nossa pesquisa consiste em verificar se é possível que o aluno do ensino médio,

---

<sup>1</sup> <https://www.britannica.com/biography/Friedrich-Hund>

respeitando-se as suas limitações de maturidade, aprenda conceitos de mecânica quântica mediante a aplicação de uma sequência didática elaborada a partir da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

## **1.2 Introdução da temática física moderna e contemporânea no ensino médio**

Aquela que é comumente conhecida como física moderna nasceu no início do século XX como consequência direta do fracasso da chamada física vigente na tentativa de resolver dois problemas que atormentavam os físicos teóricos no final do século XIX: um deles refere-se à radiação de corpo negro e o outro diz respeito a propagação da luz no vácuo. Na busca da solução desses dois problemas, o século XX começa com dois trabalhos revolucionários e que alteraram significativamente os conceitos da física então vigente. O primeiro deles foi o trabalho de Max Planck, em 1900, sobre a radiação de corpo negro (PLANCK, 2000, p.536; Idem, p.538; STUDART, 2000, p.523; BOSE, 2005, p.463) e o segundo, de Albert Einstein, sobre a teoria da relatividade (EINSTEIN<sup>2</sup>, 1905, p.891). Se por um lado a teoria da relatividade obteve sucesso na explicação dos fenômenos físicos que ocorrem em escalas macroscópicas e velocidades próximas à velocidade da luz, o trabalho de Max Planck sobre a radiação de corpo negro representa o ponto de partida da física quântica que se mostrou capaz de explicar fenômenos que se manifestam em escala subatômica. Avanços se sucederam após os trabalhos de tantos outros cientistas trazendo a consolidação não somente da teoria da relatividade especial que trata dos sistemas inerciais quanto posterior trabalho de Einstein sobre a relatividade geral que trata dos sistemas não inerciais, mas especialmente trabalhos como os de Louis de Broglie, Erwin Schroedinger, Werner Heisenberg, e outros que contribuíram para a consolidação da chamada mecânica quântica.

Devido a uma melhor compreensão da evolução da física, surgiu a terminologia que considera, de acordo com Ostermann e Ricci (2002), uma divisão cronológica da física em três períodos, a saber: a física clássica, que teve o seu início no século XVII e vai até o final do século XIX, a física moderna, do final do século XIX até a década de 1940, e a física contemporânea, da década de 1940 em diante.

---

<sup>2</sup> [http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1905\\_17\\_891-921.pdf](http://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1905_17_891-921.pdf)

Surpreendentemente, apesar de já ter decorrido mais de um século desde o início dessas revoluções, é possível constatar que prevalece no Ensino Médio quase que a total ausência de tópicos de Física Moderna e Contemporânea em sala de aula, ficando o ensino restrito basicamente aos conteúdos da física clássica. Essa ausência deve-se basicamente aos currículos de ciências para o ensino médio, refletido no livro didático, à falta de preparo dos professores para lidar com os conteúdos de Física Moderna e Contemporânea, e ao formalismo existente na estrutura burocrática do Ensino Médio, que traz um currículo ainda defasado quanto ao seu conteúdo, apesar do mundo representar uma janela aberta, por onde entram os ventos de novas descobertas e novas concepções, que chegam aos jovens a cada instante, muitas vezes fora do ambiente da sala de aula como, por exemplo, através dos meios de comunicação ou da vida cotidiana.

Além disso, os avanços científicos e tecnológicos geralmente trazem consigo melhorias para a qualidade de vida das pessoas, bem como uma reformulação de conceitos e até mesmo valores. Essas mudanças ocorrem sem que haja muitas vezes a participação dos professores, delimitando crenças e conhecimentos, desenvolvendo uma ética adequada para a formação de uma cidadania saudável, capaz de distinguir avanços científicos e alguns de seus resultados como mero consumismo de produtos que agregam pouco valor à qualidade de vida das pessoas.

É comum encontrar professores de física que defendem o ensino de Física Moderna e Contemporânea, porém não existe um consenso sobre como isso deve ocorrer, sendo o mais comum justificar-se como uma mera questão da necessidade de atualizar-se o ensino de física, indicando a necessidade de introdução de conteúdos de Física Moderna e Contemporânea (FMC).

A Física na Educação Básica está em crise: além da falta e/ou despreparo de professores, das más condições de trabalho, do reduzido número de aulas e da progressiva perda da identidade no currículo, o ensino da Física na educação contemporânea estimula a aprendizagem mecânica de conteúdos desatualizados. É preciso, urgentemente, mudar este panorama. O que fazer? Pleitear mais aulas? Tornar a Física opcional no Ensino Médio? Ensinar conceitos físicos desde as séries iniciais? Melhorar e valorizar o ensino de Física na universidade? Combater o publicacionismo que leva à desvalorização, ao descaso, do ensino na universidade? Ensino centrado no aluno? Aprendizagem ativa? Desenvolver talentos ao invés de selecionar talentos? Desenvolver competências científicas ao invés de tentar encher cabeças com conhecimentos memorizados mecanicamente? Incorporar, de fato, as tecnologias de informação e comunicação no ensino

da Física? Laboratórios virtuais? Valorizar os professores de Física? Mudar a formação de professores de Física? Enfim, são muitos os desafios. (MOREIRA, 2014).

Embora seja consenso entre professores e pesquisadores, e represente uma discussão de longas datas, ainda não se verifica uma mudança significativa quanto à atualização de um currículo de física com a inserção significativa dos conteúdos de física moderna e contemporânea. Ações neste sentido são isoladas e não compõem uma ação política conjunta, de maneira a promover uma revisão realista do currículo atual, rejeitando conteúdos que pouco ou nada acrescentam à formação do conhecimento em Física, ou em ciência de um modo geral. A nosso ver, a inserção de Física moderna e contemporânea no ensino médio poderia ser feita mediante a substituição de alguns temas de menor importância e meramente “decorebas”, de pouca aplicação e que não retratam o cotidiano dos estudantes, nem são capazes de fustigar a curiosidade dos mesmos.

Outro problema representa a pequena carga horária destinada à física no ensino médio, que na maioria dos casos se resume a duas horas aulas semanais.

O que se pode constatar é um ensino de física com conteúdos defasados e descontextualizados, que só tratam, e malmente, da física clássica, deixando de fora todo o conteúdo da física que surgiu no início do Século XX com a teoria da relatividade e a teoria quântica. Sabe-se que muitas foram as consequências do surgimento dessas novas teorias, como então pode o ensino médio ignorá-las simplesmente? Como pode o ensino médio considerar apenas como conteúdos importantes para a formação do seu aluno as teorias consolidadas até o final do século XIX, deixando de lado mais de um século de desenvolvimento da física? Como ignorar que diante dos alunos saltam produtos tecnológicos que são fruto de uma física moderna e que conseqüentemente muitas perguntas podem surgir na mente desses jovens sem encontrar respostas minimamente satisfatórias?

Com os atuais currículos de física, ignora-se, portanto não somente conteúdos relevantes mais principalmente a realidade desses alunos, a qual é cheia de novidades frutos de uma física moderna que é desafiadora e estimulante. Resta-nos então o desafio de inseri-la na sala de aula, uma vez que a sua presença na vida das pessoas é indiscutível. Segundo Terrazan:

A influência crescente dos conteúdos de Física Moderna e Contemporânea para o entendimento do mundo criado pelo homem atual, bem como a

inserção consciente, participativa e modificadora do cidadão neste mesmo mundo define, por si só, a necessidade de debatermos e estabelecermos as formas de abordar tais conteúdos na escola de 2º grau. (TERRAZAN, 1992, p. 210).

Numa pesquisa bibliográfica de Ostermann e Moreira (2000), destacou-se como justificativa para a inserção do ensino de FMC que o estudante precisa ter contato com o excitante mundo da pesquisa atual em física. Os autores lembram que os PCN's para o ensino médio, apontam para a reformulação do currículo de física e a inserção de FMC, uma maneira de atrair os jovens para a carreira científica, disseminar os conhecimentos que a ciência e a tecnologia disponibilizam para a população e esclarecê-los os quanto às pseudociências.

## 1.3 REVISÃO DE LITERATURA

### 1.3.1 Aportes para a revisão de literatura

A presente revisão de literatura foi desenvolvida através do levantamento bibliográfico feito com base em periódicos, tais como artigos publicados na Revista Brasileira do Ensino de Física (RBEF), Google Acadêmico, Caderno Brasileiro de Ensino de Física (CBEF), Base de dados Scielo e Base dados Redalyc, além de literatura relacionada ao ensino de efeito túnel ou tunelamento quântico, suportado por uma teoria aprendizagem. Nesse levantamento, deu-se ênfase às dificuldades relacionadas ao desenvolvimento das atividades investigativas atinentes ao ensino de temas da física moderna e contemporânea, mediante a aplicação de sequências didáticas, que convergem com as atividades propostas e desenvolvidas na pesquisa e relatada nesta dissertação, e a utilização de textos e artigos selecionados, preferencialmente dos últimos cinco anos, por indicação do Professor Orientador, ressalvados os textos e artigos clássicos. Para essa revisão foram usadas as palavras-chave Aprendizagem Significativa; Tunelamento ou Efeito Túnel; Penetração de Barreira; Método WKB; Reflexão Interna Total; Reflexão Interna Total Frustrada.

### 1.3.2 Linha da revisão de literatura

A presente revisão de literatura tratou especificamente da introdução do ensino de conceitos de Mecânica Quântica que estão presentes no fenômeno Tunelamento Quântico, mediante uma teoria de aprendizagem; mais especificamente: da introdução de conceitos de Mecânica Quântica no ensino médio mediante a teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

Como se buscava trabalhos mais recentes e atualizados a pesquisa foi realizada a partir de 2010. Inicialmente, constatou-se que não foi publicado nenhum trabalho relevante que envolvesse o ensino do fenômeno do Tunelamento Quântico para alunos do ensino médio, mediante uma teoria de aprendizagem, sendo localizados apenas alguns artigos envolvendo o tema tunelamento, com a abordagem voltada para a pesquisa científica sem haver a direcionamento para o Ensino de Física. O resultado dessa pesquisa, considerando esta faixa temporal, está transcrita nas seções seguintes.

Posteriormente, como consequência da ausência de trabalhos que tratassem do tema do Ensino de conceitos quânticos a partir do fenômeno do tunelamento, a

revisão foi estendida a um período de tempo anterior ao ano de 2010 sendo selecionados três artigos que tratam do tema Tunelamento Quântico cujo ponto em comum é o fato de todos fazerem uma analogia com o fenômeno da Reflexão Interna Total Frustrada. Outro ponto em comum é o fato de nenhum dos três trabalhos expressarem uma clara preocupação com a sua aplicação em sala de aula, muito menos ainda a preocupação de que esse conteúdo seja levado à sala de aula do Ensino Médio. Assim não seria demais concluir que nenhum dos três trabalhos leva em consideração alguma teoria de aprendizagem. Os artigos selecionados foram resumidos nas seções 2.2.1 a 2.2.3.

## **1.4 Penetração de barreiras por ondas eletromagnéticas**

O artigo **Penetração de barreiras por ondas eletromagnéticas** (HELENE, Otaviano; Instituto de Física-USP, 199x) descreve o fenômeno da reflexão interna total frustrada e em seguida apresenta um interessante aparato experimental utilizando um sistema composto de um emissor e um receptor de micro-ondas; para as medidas usou-se micro-ondas com comprimento de onda de três centímetros. Trata-se de um experimento engenhoso constituído de uma corneta receptora dotada de um medidor que permite medir a intensidade da onda recebida. Nesse artigo, o autor justifica a sua opção por utilizar micro-ondas, em vez de luz visível, cujo comprimento de onda por ser muito pequeno exige um aparato experimental mais sofisticado e preciso, o que torna o experimento de difícil execução. Como era de se esperar, o autor faz uma analogia do fenômeno da reflexão interna total frustrada com o efeito túnel da mecânica quântica.

### **1.4.1 Uma demonstração simples sobre a analogia clássica**

O artigo de título: “Uma demonstração simples sobre a analogia clássica efeito de tunelamento quântico” (SENA, Cleidiane O; OLIVEIRA Glaura C. Azevedo; JÚNIOR, Petrus Alcântara; Universidade Federal do Pará- UFPA) defende de que o efeito túnel possui o análogo clássico que corresponde a Reflexão Interna Total Frustrada (RITF). A RITF ocorre quando a onda evanescente, ou onda de superfície, se estende com amplitude suficiente, através de um meio menos denso, para uma região próxima ocupada por um material de índice de refração maior, a energia pode ser transmitida através deste intervalo. O artigo traz a proposta experimental

constituída de uma lente plano-convexa, um prisma e uma lâmpada com luz não coerente. Os proponentes defendem que é possível estender a demonstração da RITF, associada ao análogo clássico do efeito túnel quântico, de uma forma mais simples.

#### 1.4.2 Reflexão interna total frustrada ou penetração de barreira ótica

Artigo de título Reflexão interna total frustrada de penetração de barreira ótica (LEÃO, Márcia R. Moreira; PERES, Orlando; UNICAMP, sd.).

O texto de Márcia Regina e Orlando Peres tem por objetivo principal explorar a analogia entre o fenômeno da reflexão interna total frustrada e o efeito do tunelamento quântico. Trata inicialmente do problema de um feixe eletromagnético que incide obliquamente na interface de dois meios; parte do feixe é refletida, parte é transmitida. Considera ainda o caso no qual o feixe incide do meio de maior índice de refração para o meio de menor índice de refração. Lembram ainda o caso no qual o feixe incide com um ângulo maior que certo valor, chamado ângulo crítico, no qual ocorre a reflexão total: o feixe incidente não atravessa a interface, que funciona como uma barreira. Descreve a situação na qual ao se colocar um terceiro meio, bem próximo do primeiro, deixando um “gap” entre eles, é possível observar a transmissão da luz do segundo meio para o terceiro, fenômeno este conhecido como reflexão interna total frustrada ou penetração de barreira ótica, a qual ocorre devido à existência de ondas evanescentes. Discutem também a possibilidade de encontrar os valores de transmitância em função do ângulo de incidência, espessura do “gap”, comprimento de onda da luz incidente e índice de refração dos meios envolvidos, podendo ser feito um paralelo com os conceitos de tunelamento em uma barreira retangular da mecânica quântica, uma vez que, segundo os autores, a dependência funcional da transmissão na interface pode ser comparada à encontrada para o tunelamento quântico.

### 1.5 Da problematização à pergunta da pesquisa

A revisão de literatura teve como objetivo identificar artigos e publicações voltadas para divulgações de experiências pedagógicas relacionadas com a introdução da física moderna e contemporânea no ensino médio, mais

especificamente o estudo do efeito túnel. Nessa linha de raciocínio a pesquisa foi direcionada para responder a seguinte **pergunta**:

É possível promover a Aprendizagem Significativa de conceitos da Mecânica Quântica em alunos do ensino médio, utilizando o fenômeno do Tunelamento Quântico como Organizador Prévio?

Considerando esta pergunta da pesquisa, para a elaboração de uma sequência didática (SD) que possa promover a aprendizagem significativa do tema abordado, e as limitações de pré-requisitos de conhecimentos de física dos alunos do ensino médio, foi realizada uma apropriação de recursos audiovisuais e simulações computacionais para elaborar uma resposta à questão aqui colocada.

Já se passaram alguns anos desde que essa questão do ensino dos conteúdos de física moderna e contemporânea no ensino médio foi colocada à comunidade de pesquisadores em Ensino de Física, como atestam alguns artigos que abordam esta temática (REZENDE JÚNIOR; CRUZ, 2003; MONTEIRO; NARDI; BASTOS FILHO, 2009.). Pouca coisa mudou desde então, haja vista que na maioria das vezes os temas da Física Moderna e Contemporânea não estão presentes em sala de aula do ensino médio, assim como estão ausentes em grande parte dos livros didáticos do ensino médio, e muitas vezes, quando presentes, se faz apenas de maneira superficial e resumidamente. Se reclamamos da ausência da física moderna e contemporânea no ensino médio, o que dizer da formação dos professores de física? É para esse público que se destina o Produto Educacional desenvolvido neste trabalho.

### 1.5.1 A transposição da Física Clássica para a Física Moderna

Uma grande dificuldade ao se abordar a temática da Mecânica Quântica reside no fato de alguns conceitos físicos presentes na Mecânica Clássica não serem compatíveis com a Mecânica Quântica. Como sabemos, esta teoria representa uma das grandes revoluções do pensamento científico e possui uma abordagem própria, uma formulação diferente da mecânica clássica determinística, passando para uma abordagem probabilística, a qual é bem mais complexa, o que a torna mais difícil de inserir no ensino médio pelo fato do aluno não ter conhecimento de diversos conteúdos, seja de física, seja de matemática, necessários para a construção do conhecimento nesta área. Na revisão de literatura aqui apresentada, verificamos a existência de poucos artigos que tratam do tema efeito túnel ou

tunelamento relacionado ao ensino, apesar de verificarmos a existência de um número bem mais expressivo de artigos que tratam do tema como fenômeno físico de amplo interesse da comunidade científica, inclusive voltados para a medicina e diversas aplicações tecnológicas, como é o caso do microscópio eletrônico de varredura (MARTÍNEZ et al, 2009; BERNAL; OSÓRIO, 2009; SERIDONIO; OLIVEIRA; YOSHIDA, 2009;.BERNAL; ÁVILA, 2008; USHIODA et al, 2008)

## **1.6 Recortes de artigos relacionados ao tema da pesquisa**

Assinalamos a divisão dos artigos:

- a) O Tunelamento Quântico e sua importância para a Física Moderna e Contemporânea e consolidação da Mecânica Quântica.
- b) O ensino de Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio.
- c) O ensino do Tunelamento Quântico mediante o ensino de conteúdos relacionados a este tema mediante teorias da aprendizagem.

Dos artigos pesquisados através das referidas fontes que tratam do Tunelamento Quântico, a grande maioria possui um cunho especificamente científico e/ou tecnológico com diversos ramos de aplicação sem a preocupação em transmitir as informações para o segmento da educação. Foi localizado apenas um artigo específico que relaciona o tunelamento quântico, através de uma analogia clássica com a reflexão total frustrada. Apenas como ilustração, pois não constitui objeto de nossa pesquisa, relacionamos alguns artigos que tratam do tema efeito túnel ou tunelamento quântico. Mas antes apenas destacamos alguns artigos que tratam do ensino da física moderna e contemporânea (FMC) no ensino médio (EM).

### **1.6.1 O Efeito Túnel e sua importância para a Mecânica Quântica**

Um número significativo de artigos sobre o efeito túnel foi publicado, com foco em física quântica, com diversas aplicações seja em física aplicada, engenharia ou medicina. Foram relacionados a seguir alguns exemplos a título de ilustração quanto importante é o conhecimento desse fenômeno quântico, e cujas aplicações atingem diversas áreas. Estão relacionados alguns artigos, tão somente a título de ilustração da abrangência desses artigos, embora não seja o foco de nossa pesquisa, cujo cunho central é eminentemente educacional.

Um dos trabalhos nessa linha foi publicado por Silva Júnior e Andrade Neto (2014), sob o título Expressões analíticas para a probabilidade de tunelamento em fenômeno de emissão por campo. O artigo é um trabalho eminentemente teórico, e trata da emissão por campo, no qual elétrons são extraídos da superfície sólida por efeito túnel, traz o cálculo da probabilidade de tunelamento, considerando uma barreira unidimensional sendo utilizada a aproximação JWKB<sup>3</sup> (LEMES; GOMES, 2013), onde são propostos dois modelos de potenciais unidimensionais e em ambos são incluídos explicitamente o potencial imagem e o campo elétrico. Esses modelos tratam do processo de ionização por campo. No primeiro modelo, separam em regiões distintas as contribuições do potencial imagem e do campo elétrico externo, o que permite uma solução exata da integral a ser resolvida. No segundo modelo, o potencial imagem e o campo elétrico são considerados em todo o espaço, o que leva a uma integral cuja solução deixa de ser trivial. Os autores obtêm expressões analíticas, do tipo Fowler-Nordheim, relativamente gerais. Os resultados obtidos são discutidos e comparados com outros da literatura.

Um trabalho importante na área foi publicado por Moura e Ricotta (2008) e tratou da Corrente em microscopia de varredura por tunelamento segundo o método WKB. O fenômeno de propagação de partículas por regiões onde a energia potencial é maior do que a energia das partículas é denominado tunelamento quântico (ou efeito túnel) e encontra uma série de aplicações em tecnologias atuais.

Esse trabalho consiste no estudo de uma tecnologia que apresenta o tunelamento quântico como princípio de funcionamento, o microscópio de varredura por tunelamento, baseando-se no protótipo simplificado de microscópio e objetiva obter a expressão da corrente de tunelamento entre ponta e amostra segundo o método aproximativo WKB ou JWKB.

O artigo de Andrade Neto e Silva (2010) aborda o Efeito túnel e microscopia com resolução atômica e trata sobre os princípios físicos de funcionamento de microscópios que apresentam resolução em escala atômica, i.e., dispositivos capazes de fornecer imagens de átomos individuais. Em particular são discutidos os processos de emissão por campo (emissão fria) e ionização por campo, fenômenos que têm como princípio fundamental o efeito túnel ou penetração de barreira o qual serve de base para o funcionamento dos microscópios de Emissão por Campo (Field

---

<sup>3</sup> H. Jeffreys, G. Wentzel, H. A. Kramers, L. Brillouin.

Emission Microscope – FEM), Microscópio Iônico de Campo (Field Ion Microscope – FIM) e o Microscópio de Varredura por Tunelamento (Scanning Tunneling Microscope – STM).

O artigo intitulado Visualizando o tunelamento quântico através da geração de microplasmas, de Sismanoglu, Nascimento e Aragão (2015), aborda o tunelamento quântico como um fenômeno capaz de proporcionar inúmeras aplicações tecnológicas através da aplicação direta dos conceitos da mecânica quântica. De acordo com este fenômeno, elétrons podem ser extraídos de superfícies metálicas sob as quais existe um enorme gradiente de potencial, ou seja, um intenso campo elétrico local. Através de um dispositivo elétrico conhecido como micro cátodo oco, que consiste de duas camadas de metal intercaladas por uma fina camada de mica (com espessura  $d = 3 \mu\text{m}$ ), perfurada com furo de diâmetro  $D = 200 \mu\text{m}$  e na pressão de 20 Torr, propiciou a emissão a frio de elétrons para um micro campo elétrico local de aproximadamente 15 V/nm. Os metais polarizados com uma diferença de potencial elétrico de aproximadamente 390 V permitiram a passagem dos elétrons através da barreira de potencial presente na região do furo catódico. A curva de Fowler-Nordheim (KYRITSAKIS; XANTHAKIS, 2015; FORBES; DEAN, 2007.) ratificou a eficácia do fenômeno na geração de um microplasma neste furo, visível a olho nu.

Em síntese, esses artigos trazem à tona a importância do fenômeno do efeito túnel nas pesquisas relacionadas com a mecânica quântica na atualidade. Poderíamos relacionar um número maior de artigos, inclusive com publicações de outros países, já que o tema é bastante pesquisado mundialmente, entretanto, destaca-se que o objeto de nossa pesquisa diz respeito ao ensino deste fenômeno, portanto nosso foco é o ensino do efeito túnel, e não as pesquisas sobre o efeito túnel em si, como objeto de interesse dos pesquisadores em física teórica. Os artigos relacionados servem apenas para ilustrar a importância do efeito túnel nos trabalhos dos físicos teóricos e experimentais na atualidade.

### 1.6.2 A inserção da Física Moderna e Contemporânea no Ensino Médio

Em 2005, Lobato e Greca realizaram uma Análise da inserção de conteúdos de teoria quântica nos currículos de física do ensino médio. Esse artigo trata do impacto da inovação científica e tecnológica do século XX e contrasta com a

experiência docente, afirmando que as aprendizagens na escola secundária estão longe de acompanhar a evolução que se verifica na sociedade atual. No entanto, já estão sendo incluídos alguns conteúdos de Física Moderna nos currículos oficiais de vários países, parecendo evidenciar uma preocupação em atualizar a preparação dos jovens para o mundo que os rodeia. O artigo apresenta um estudo acerca dos currículos de Física de alguns países, sobretudo no que diz respeito à Teoria Quântica, a grande invenção do século XX, tentando identificar os conteúdos selecionados e a maneira como estes se integram nas orientações curriculares gerais.

Sena, Oliveira e Alcântara Júnior (2005) apresentaram o trabalho: “Uma demonstração simples sobre a analogia clássica do efeito de tunelamento quântico”. Esse artigo traz à tona a questão que geralmente nos cursos introdutórios de mecânica quântica é comum depararmos com a afirmação de que o efeito túnel não tem análogo clássico. Entretanto, os autores do artigo lembram que segundo o princípio da correspondência quase todos os fenômenos quânticos têm seu análogo clássico, então perguntam qual seria o análogo clássico do efeito túnel? Hoje, sabe-se que o princípio da correspondência de Ehrenfest não é geral. Veja-se, por exemplo, a descoberta do spin do elétron, fenômeno que não possui paralelo na física clássica. (GOMES; PIETROCOLA, 2011.).

No mesmo artigo, os autores argumentam que a resposta para esta pergunta está na teoria da reflexão interna total frustrada (RITF), e explicam que esse fenômeno ocorre quando a onda evanescente (onda de superfície) se estende com amplitude suficiente, através de um meio menos denso, para uma região próxima ocupada por um material de índice de refração superior, a energia pode ser transmitida através deste intervalo, excitando elétrons no material e provocando a emissão de ondas eletromagnéticas, frustrando assim a reflexão interna total. Usando uma lente plana convexa, um prisma e uma lâmpada com luz não coerente é possível estender a demonstração da RITF, que é associada ao análogo clássico do efeito túnel quântico, de uma forma mais simples, já que em muitos experimentos de óptica feitos em sala de aula ou em laboratórios avançados de física seguem uma prescrição tradicional encontrada em muitos manuais, onde a experiência é feita com dois prismas retangulares e o uso de um laser devido a sua alta intensidade e coerência.

O artigo traz ilustrações de como realizar o experimento em sala de aula, de forma detalhada o que certamente pode se constituir em um trabalho de grande utilidade para os professores que desejarem ensinar o tema em sala de aula. Entretanto, vale ressaltar que o mesmo não traz um referencial teórico pedagógico destinado ao ensino do tema em sala de aula, ou seja, o artigo dá atenção ao conteúdo de física, não entrando no mérito de como serão as ações do professor e a sua interação com o sujeito mais importante no processo ensino aprendizagem, a saber, o aluno, a quem Ausubel chama algumas vezes de aprendiz. O artigo destaca essencialmente o princípio da correspondência, relacionando um fenômeno clássico e o efeito quântico tratando a analogia entre eles.

A seguir foram relacionados artigos que tratam do fenômeno tunelamento que e foram selecionados para a pesquisa da presente dissertação.

<b>Temas</b>	<b>Artigos</b>
O efeito túnel e sua importância para a FMC	Expressões analíticas para a probabilidade de tunelamento em fenômeno de emissão por campo
	Corrente em microscopia de varredura por tunelamento segundo a tentativa WKB.
	Efeito túnel e microscopia com resolução atômica.
	Visualizando tunelamento quântico através da geração de microplasmas.
O ensino de FMC no EM	Análise da inserção de conteúdos de teoria quântica nos currículos de física do ensino médio.
	Artigos de Moreira sobre o ensino de FMC.
O ensino do efeito túnel no EM referenciado em teorias de aprendizagem	Uma demonstração simples sobre a analogia clássica do efeito do tunelamento quântico.

Tabela 1 Síntese dos textos que compõem a revisão de literatura

A Tabela 1 traz uma síntese dos artigos e textos que tratam do tema efeito túnel ou tunelamento quântico e suas relações com o ensino de FMC no EM. De acordo com a pesquisa bibliográfica que apresentamos aqui, pode-se constatar em primeiro lugar que existe uma preocupação quase geral entre professores e

pesquisadores em ensino, em se inserir conteúdos de física moderna e contemporânea no ensino médio. Entretanto, apesar dessa posição comum, não verificamos uma reformulação no currículo deste ramo da física no ensino médio, o que implicaria possivelmente na reformulação de uma nova grade curricular no ensino médio.

Considerando que até a data da conclusão desta revisão não foi possível identificar nenhum trabalho acadêmico instrucional cujo objetivo seja promover a aprendizagem significativa em conformidade com a teoria de Ausubel do efeito túnel para estudantes do ensino médio, acreditamos que a proposta de trabalho dessa dissertação serve para preencher uma lacuna na literatura.

## **1.7 Síntese do projeto**

Assim, cumpre retomar aqui a questão de pesquisa, a saber: *“é possível promover a Aprendizagem Significativa de conceitos da Mecânica Quântica em alunos do ensino médio, utilizando o fenômeno do Tunelamento Quântico como Organizador Prévio?”* e colocá-la em termos do objetivo geral e dos objetivos específicos, caracterizando o lócus da intervenção pedagógica, bem como os sujeitos implicados na mesma.

### **1.7.1 Sujeitos da pesquisa**

Para a efetivação da presente pesquisa foi realizada a aplicação da Sequência Didática para uma turma da terceira série do Ensino Médio, do turno vespertino, de um colégio da rede pública do Estado da Bahia localizado na cidade de Salvador, composta de trinta e cinco alunos matriculados, embora como fosse constatado ao longo dos trabalhos que o número de alunos frequentes girou em torno de vinte alunos, com a faixa etária entre dezessete e vinte anos, os quais na sua grande maioria residentes no mesmo bairro onde o colégio está situado. Devido à condição social característica das pessoas que residem nesse bairro, a maioria dos alunos exerce trabalho remunerado de modo a puderem manter as próprias despesas ou ajudar as respectivas famílias, fato que dificulta a frequência regular às aulas.

### 1.7.2 Local da intervenção

O colégio onde foi aplicada a Sequência Didática descrita através desta dissertação possui aproximadamente trinta salas de aulas e ocupa uma extensa área, sendo parte dela arborizada, e embora possua uma arquitetura simples, típica de um colégio da rede pública de ensino do Estado da Bahia, tem a estrutura bem conservada. O seu quadro de professores, bem preparados e comprometidos em oferecer um ensino de qualidade, apesar das limitações típicas do ensino médio de uma rede pública estadual, conta com vários Especialistas e Mestres.

## 1.8 Objetivos da pesquisa

### 1.8.1 Objetivo geral

Produzir uma Sequência Didática a partir de uma situação investigativa sobre o tema Tunelamento Quântica que promova a Aprendizagem Significativa de conceitos de Mecânica Quântica.

### 1.8.2 Objetivos específicos

A pesquisa relatada na presente dissertação foi realizada tendo em vista:

- a) **Propor um Material Instrucional mediante a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, composto de uma Sequência Didática que discorre sobre um tema de Física Moderna a ser aplicado no Ensino Médio, baseada em Organizadores Prévios.**
- b) **Apresentar o relato de experiência da aplicação do produto educacional proposto através da nossa pesquisa em uma unidade de ensino da Rede Estadual de Ensino Público da Bahia. Essa primeira aplicação serve para levantar eventuais problemas na elaboração da SD, visando sua reestruturação e validação como produto educacional.**
- c) **Disponibilizar os recursos didáticos através de um Produto Educacional com conteúdo de Física Moderna, organizado sequencialmente, baseado em uma Teoria de Aprendizagem, acompanhado de suas instruções, textos auxiliares e simuladores, de maneira que possam ser utilizados por outros professores em salas de aulas do ensino médio.**

## **CAPÍTULO 2. REFERENCIAIS TEÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS**

### **2.1 Proposta do Mestrado em Ensino de Física**

Como a proposta de mestrado em Ensino de Física envolve a compreensão de forma e conteúdo, isto é, do campo teórico-metodológico da didática, por um lado, do campo epistemológico da física, por outro, é pertinente que sejam declaradas aqui essas mesmas opções, com o fito de situar o leitor. Para tratar das questões atinentes ao ensino optou-se pela teoria de David Paul Ausubel. Para o campo conceitual da física quântica, optou-se pela abordagem ondulatória de Erwin Schroedinger. Esses dois campos serão tratados separadamente nas seções subsequentes deste capítulo.

### **2.2 Aspectos gerais da Teoria Ondulatória**

Para fundamentar a parte de física do trabalho, foram abordados os temas: ondas em meios elásticos, reflexão e transmissão/refração, expandindo esses fenômenos para a propagação de ondas eletromagnéticas em sistemas óticos de índices de refração distintos, com ênfase no fenômeno da reflexão interna total frustrada, evidenciando seus principais aspectos, em especial a sua semelhança com o efeito túnel, útil, portanto, para elaboração de um organizador prévio que, pretende-se, propiciar a aprendizagem significativa do efeito túnel ou tunelamento quântico.

#### **2.2.1 Propagação de um pulso em um meio elástico**

Esse tópico é importante porque abrange subsunçores de ondulatória necessários à compreensão da teoria quântica *a la* Schrödinger. Serão apresentados os principais aspectos dos fenômenos de propagação, reflexão e refração (transmissão) de ondas mecânicas em meios elásticos, a exemplo de cordas e molas longas ou tipo slinky.

Se efetuarmos um movimento brusco em uma extremidade de uma corda mantida reta, isto é, submetida a uma tensão  $T$ , tendo a outra extremidade fixa, a mesma será percorrida por um pulso. Se esta corda for homogênea e flexível, e não houver mecanismos de perda de energia, o pulso irá manter praticamente a mesma

forma à medida que se propaga. Essa situação está mostrada esquematicamente na Figura 3.1.



Figura 2-1 - Propagação de um pulso em um meio elástico, com fronteira fixa (sup.) e fronteira móvel (inf.).

FONTE: [brasilecola.com.br/física/reflexão-onda-uma-corda.htm](http://brasilecola.com.br/física/reflexão-onda-uma-corda.htm)

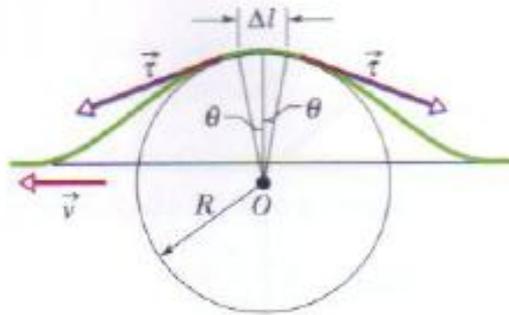
Em uma dimensão, a propagação dos pulsos em um meio elástico é descrita pela equação de onda, Eq.3.1 (NUSSENZVEIG, 1981, p.103-104):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(x, t) = 0 \quad (3.1)$$

Como as forças que atuam em um meio elástico não se alteram dentro do pulso, a resultante horizontal deverá ser nula.

Para calcular a velocidade de uma onda numa corda cuja densidade é dada por  $\mu$  e que está submetida a uma tensão  $T$ , em vez de uma onda senoidal é conveniente considerar um pulso simétrico, que se propaga da esquerda para a direita ao longo da corda com velocidade  $v$ . Para tanto, considera-se uma seção de comprimento  $\Delta L$  na região superior do pulso, o qual pode ser considerado como sendo um arco de circunferência de raio  $R$  que subtende um pequeno ângulo ( $2\theta$ ).

Observando-se apenas o trecho da corda de comprimento  $\Delta L$ , pode-se considerar que neste trecho a trajetória possui uma forma circular. Neste caso, a corda parece passar por um nó com velocidade  $v$ .



**Figura 3.2.** - Propagação de um pulso simétrico em um meio elástico, onde o pulso é estacionário e a corda parece mover-se da direita para a esquerda com a velocidade  $v$ . FONTE: Halliday & Resnick, vol. 2.

Nessas condições verifica-se que componente horizontal da força resultante sobre o segmento  $\Delta L$  é dada por:

$$T_D \cos(\theta) - T_E \cos(\theta) = 0 \quad (3.2)$$

A componente vertical da força resultante é dada por:

$$T_D \sin(\theta) + T_E \sin(\theta) = F_R \quad (3.3)$$

E como a tensão da esquerda ( $T_E$ ) possui intensidade igual a da tensão da direita ( $T_D$ ), isto é,  $T_E = T_D = T$ . Como visto acima, tem-se que a resultante horizontal é nula, porém não será nula a componente vertical; assim:

$$2T \sin(\theta) = F_R \quad (3.4)$$

Para pequenos ângulos a aproximação  $\sin \theta \approx \theta$  pode ser utilizada sem nenhuma perda de generalidade. Daí pode-se concluir:

$$F = 2(T \sin \theta) \approx T(2\theta) = T \frac{\Delta l}{R} \quad (3.5)$$

A massa elementar, ou massa de um elemento  $\Delta l$ , será dada por:

$$\Delta m = \mu \Delta l, \quad (3.6)$$

onde  $\mu$  é a densidade linear de massa, como já foi citado anteriormente.

Assim, considera-se que o elemento de corda  $\Delta l$  está se movendo em um arco de círculo, e por conta disso, existe uma aceleração centrípeta  $a_c$  (que aponta para o centro do círculo), a qual é dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad (3.7)$$

As equações 3.5 e 3.7 contêm os elementos da segunda lei de Newton:  $\vec{F} = m\vec{a}$  (Força=massa x aceleração). Tem-se, portanto:

$$\frac{T\Delta l}{R} = (\mu\Delta l) \frac{v^2}{R} \quad (3.8)$$

Segue-se diretamente daí que:  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

A Eq. 3.8 fornece a velocidade do pulso numa corda, conforme a Figura 3.2 e, mais amplamente, a velocidade de qualquer onda que se propaga numa corda submetida a uma tensão T.

Da Eq. 3.8 pode-se concluir que a velocidade de uma onda que se propaga numa corda ideal estirada depende somente da tensão a que a mesma está submetida e de sua densidade linear de massa, não dependendo da frequência da onda que nela se propaga (HALLIDAY, 1999, p.453).

Assim, tem-se caracterizada a velocidade de um pulso ou onda que se propaga em um meio elástico, uma corda estirada, por exemplo.

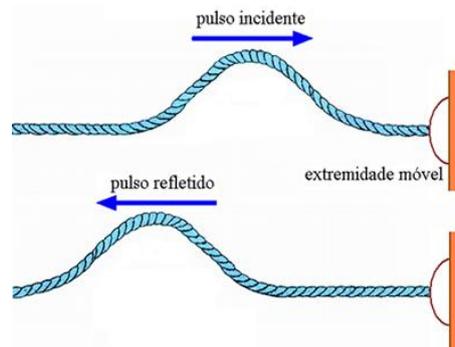
### 2.2.2 Reflexão de pulsos

A equação de ondas admite soluções específicas para dadas condições de contorno (também chamadas condições de fronteira). Assim, dependendo de como a corda tenha a sua extremidade contrária ao ponto onde o pulso foi inicialmente gerado, ocorrerão duas situações distintas (NUSSENZVEIG, 1981, p.112-114):

a) A corda possui uma extremidade fixa. Nesse caso, quando o pulso se propaga até a extremidade fixa, a corda exerce uma força no suporte, e devido ao princípio da ação e reação, o suporte exerce uma força (de reação) em sentido contrário, o que provoca a inversão do pulso incidente. Daí surge então um pulso invertido que se propaga em sentido contrário, isto é, o pulso sofre uma reflexão com inversão de fase.

b) A corda possui uma extremidade fixa a uma argola, a qual pode se deslocar livremente e sem atrito ao longo de um eixo. Nesse caso, quando o pulso atingir a argola, a corda irá se deslocar livremente e sem atrito. Tem-se então que o

pulso realiza uma reflexão sem inversão de fase.



**Figura 3.3.** Reflexão de um pulso em uma fronteira móvel e sem atrito.  
FONTE: [brasilecola.com.br/fisica/reflexão-onda-uma-corda.htm](http://brasilecola.com.br/fisica/reflexão-onda-uma-corda.htm)

### 2.2.3 Reflexão e refração de pulsos em cordas de densidades diferentes

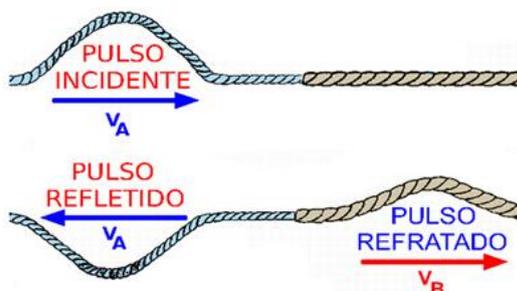
Vamos considerar agora um sistema formado por duas cordas diferentes, uma delas com grande densidade linear, ou seja, grande massa por unidade de comprimento, e outra de pequena densidade linear, ou seja, com pequena massa por unidade de comprimento. O sistema possui uma das extremidades fixas e a outra é livre e pode ser submetido a um movimento brusco que origina um pulso. Ao atingir o ponto de junção das cordas, observa-se que o pulso é propagado da primeira para a segunda corda. Este fenômeno é denominado refração do pulso, já que é possível considerar as cordas de densidades diferentes, como meios físicos distintos. Neste mesmo instante, quando surge o pulso refratado, observa-se que surge também um pulso refletido na junção, movimentando-se em sentido oposto ao pulso incidente (NUSSENZVEIG, 1981, p.114; p.122).

A depender do arranjo construído com as cordas, sendo a primeira corda de menor densidade linear e a segunda corda de maior densidade linear, ou vice versa, teremos duas situações.

#### 2.2.3.1 PRIMEIRO ARRANJO: PULSO SE PROPAGA DE MEIO MENOS DENSO PARA MEIO MAIS DENSO.

Quando a primeira corda possuir menor densidade linear, o pulso se propaga para a corda de maior densidade sem inversão de fase, enquanto o pulso refletido será invertido em relação ao pulso incidente. Isto se deve ao fato de a corda de maior densidade linear se comportar fisicamente semelhante a um ponto de junção fixo. Teremos dois pulsos propagando-se em sentidos contrários. A energia do pulso

incidente é dividida entre o pulso refletido e o pulso refratado. Como as cordas estão sujeitas a mesma tensão, o pulso se propaga com maior velocidade na corda de menor densidade.

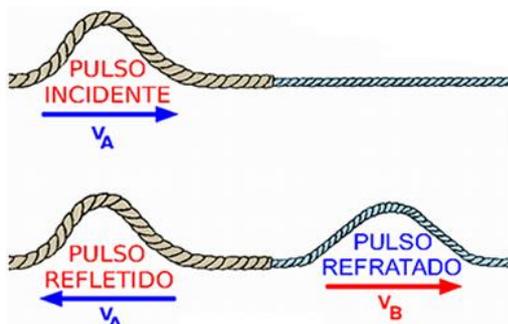


**Figura 3.4** .- Reflexão e refração de um pulso que viaja de um meio menos denso para um meio mais denso.

FONTE: <http://alunosonline.uol.com.br/fisica/refracao-ondas-uma-corda.html>

### 2.2.3.2 SEGUNDO ARRANJO: PULSO SE PROPAGA DE MEIO MAIS DENSO PARA MEIO MENOS DENSO.

Neste caso, o pulso refletido não sofrerá inversão de fase, e a energia do pulso incidente será dividida entre o pulso refletido e o pulso refratado. Existirão, portanto dois pulsos com a mesma fase propagando-se em sentidos contrários,



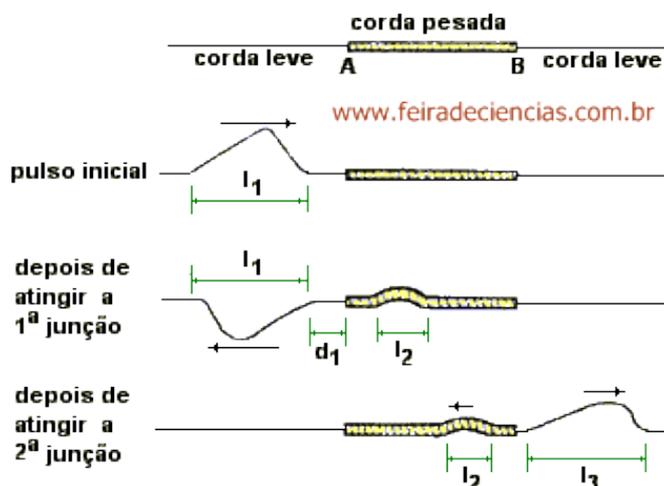
**Figura 3.5** .- Reflexão e refração de um pulso que viaja de um meio mais denso para um meio menos denso.

FONTE: <http://alunosonline.uol.com.br/fisica/refracao-ondas-uma-corda.html>.

### 2.2.3.3 TERCEIRO ARRANJO: PULSO SE PROPAGA EM TRÊS MEIOS ELÁSTICOS DISTINTOS

Considere-se agora que um pulso se propaga em três meios elásticos: o primeiro, de baixa densidade linear, o segundo de alta, e o terceiro também de baixa densidade linear. Este arranjo combina em um só experimento os arranjos anteriores e será interessante para o nosso propósito, na medida em que serve para ilustrar a propagação antes e após o fenômeno da refração. É possível através da construção destes experimentos mostrar de uma maneira relativamente simples, os fenômenos

físicos de propagação de uma onda numa corda, assim como a reflexão e refração considerando-se as diferentes densidades das cordas.



**Figura 3.6** - Esquema mais geral de reflexão e refração. Em lugar de “leve” e “pesada”, leia-se “menos densa” e mais densa”.

FONTE: [www.feiradeciencias.com.br](http://www.feiradeciencias.com.br)

Conceitos mais importantes destacados neste experimento: Ondas, pulsos, propagação, reflexão e refração de pulsos.

Esses aspectos são importantes neste trabalho, pois serão retomados na Sequência Didática (SD), quando da exibição de dois vídeos curtos (de 2 e 3 minutos), mostrando os fenômenos citados aqui.

## 2.3 Estados estacionários em uma corda vibrante

Verifica-se facilmente, por substituição, que a equação de ondas admite soluções na forma de funções harmônicas  $\psi(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t)$ . Como essas soluções podem existir simultaneamente no meio elástico, é possível então fazer a superposição delas, formando padrões diferenciados.

Os estados estacionários são os estados físicos nos quais a energia é bem definida. Ocorrem, por exemplo, quando duas ondas de mesma amplitude se propagam em um mesmo meio (como por exemplo, numa corda), porém em sentidos contrários.

$$\psi_1(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (3.10)$$

$$\psi_2(x, t) = A \cos(kx + \omega t) \quad (3.11)$$

Aqui, tem-se: A, Amplitude da onda; k, Número de onda; x, Coordenada no eixo dos “x”;  $\omega$ , velocidade angular; t, tempo.

Fazendo-se a combinação linear dessas ondas harmônicas na forma:

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) \pm \psi_2(x, t) = A[\cos(kx - \omega t) \pm \cos(kx + \omega t)] \quad (3.12)$$

$$\psi(x, t) = A[\cos(kx)\cos(\omega t) + \text{sen}(kx)\text{sen}(\omega t) \pm (\cos(kx)\cos(\omega t) - \text{sen}(kx)\text{sen}(\omega t))] \quad (3.13)$$

Agora, se tomarmos o sinal positivo em “ $\pm$ ” segue-se que:

$$\psi_+(x, t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t) \quad (3.14)$$

Porém, se tomarmos o sinal negativo em “ $\pm$ ”, segue-se que:

$$\psi_-(x, t) = 2A\text{sen}(kx)\text{sen}(\omega t) \quad (3.15)$$

Essas combinações são ditas estacionárias, pois as partes temporal e espacial da solução estão separadas: não há o argumento de propagação ( $kx \pm \omega t$ ).

## 2.4 Soluções da Equação de Onda.

Assim, podem-se buscar soluções da equação de onda na forma separável, isto é, como o produto de uma função espacial e uma função temporal. Vamos retomar esse tópico brevemente aqui.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x, t) = 0 \quad (3.16)$$

Se  $\Psi(x, t) = \psi(x)\Phi(t)$ , então:  $\Phi(t)\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) - \psi(x)\frac{1}{v^2}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) = 0$

Dividindo-se essa equação por  $\psi(x)\Phi(t)$  e rearrumando os termos, obtém-se:

$$\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{1}{v^2}\frac{1}{\Phi(t)}\frac{d^2}{dt^2}\Phi(t) \quad (3.17)$$

Como cada um dos membros depende apenas de uma variável distinta da outra, a condição de separabilidade exige que ambos sejam iguais a uma constante. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -k^2 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{1}{\Phi(t)} \frac{d^2}{dt^2} \Phi(t) = -k^2 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \Phi(t) + k^2 v^2 \Phi(t) = 0 \quad (3.19)$$

A equação espacial admite soluções do tipo  $\psi(x) = e^{\pm ikx}$  e a equação espacial admite soluções na forma:

$$\Phi(t) = e^{\pm ikvt} \quad (3.20)$$

de sorte que:

$$\psi(x)\Phi(t) = e^{\pm ikx} e^{\pm ikvt}. \quad (3.21)$$

Como as equações são de segunda ordem, deve-se exigir a combinação linear delas como solução geral, com coeficientes determinados pelas condições iniciais:

$$\Psi(x, t) = [Ae^{ikx} + Be^{-ikx}][Ce^{ikvt} + De^{-ikvt}] \quad (3.22)$$

Há várias possibilidades de determinação dos coeficientes A, B, C e D, de acordo com as condições iniciais. Se, por exemplo, a função total for nula em  $t=0$ , então:

$$\begin{aligned} \Psi(x, 0) &= [Ae^{ikx} + Be^{-ikx}][Ce^{ikv0} + De^{-ikv0}] \\ &\Rightarrow [Ae^{ikx} + Be^{-ikx}][C + D] = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ou seja:  $D=-C$ . Com isso, a parte temporal assume a forma:

$$\Phi(t) = Ce^{ikvt} - Ce^{-ikvt} = C(e^{ikvt} - e^{-ikvt}) = 2iC \text{sen}(kvt) \quad (3.24)$$

A solução pode ser então reescrita na forma:

$$\Psi(x, t) = [Ae^{ikx} + Be^{-ikx}]2iC \text{sen}(kvt) = [\tilde{A}e^{ikx} + \tilde{B}e^{-ikx}] \text{sen}(kvt) \quad (3.25)$$

Ou seja:

$$\Psi(x, t) = [\tilde{A}e^{ikx} + \tilde{B}e^{-ikx}] \text{sen}(kvt) \quad (3.26)$$

Por simplicidade, os coeficientes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$  absorveram o fator  $2iC$ . Aqui, poderíamos aplicar também a condição de fronteira dos extremos fixos a um meio elástico de comprimento L, de sorte que:

$$\begin{aligned} \Psi(0, t) &= \Psi(L, t) = 0 \\ \Psi(0, t) = 0, &\text{ implica em } \tilde{A} + \tilde{B} = 0 \text{ e, portanto,} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\Psi(x, t) = [\tilde{A}e^{ikx} - \tilde{A}e^{-ikx}]sen(kvt) = Fsen(kx)sen(kvt), \quad (3.28)$$

onde  $F = 2i\tilde{A}$ .

Esse último resultado corresponde à superposição  $\psi_-(x, t)$  da seção precedente. Agora, aplicando-se a condição de extremo fixo na extremidade  $x=L$ , obtém-se:

$$\Psi(L, t) = Fsen(kL)sen(kvt) = 0, \forall t \Rightarrow sen(kL) = 0 \quad (3.29)$$

Sabe-se que  $sen(kL) = 0$ , se, e somente se,  $kL = n\pi$ , com  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Assim, há um vetor de onda para cada valor de  $n$ , tais que:  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ . Os comprimentos de onda que se propagam no meio elástico são somente aqueles dados por:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}, \quad (3.30)$$

Isto é:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (3.31)$$

Conclusão: Os comprimentos de onda, possíveis de se estabelecerem numa corda vibrante com extremidades fixas são “discretizados”, isto é, apenas submúltiplos de um comprimento de onda fundamental são “possíveis”, ou “permitidos”. O maior comprimento de onda possível de se estabelecer em uma corda vibrante com extremidades fixas, é igual ao dobro do comprimento da corda,  $\lambda = 2L$ , o que corresponde à situação  $n=1$ .

Deve-se destacar que a o fenômeno aqui discutido é um fenômeno da mecânica clássica, não da mecânica quântica.

Começamos a nossa abordagem trazendo à tona o caso clássico da corda vibrante com extremidades fixas, a qual é bastante útil por se tratar de um exemplo físico cuja analogia remete diretamente ao caso quântico da partícula em uma caixa rígida, e nos estendemos para casos mais particulares de configuração do potencial  $U(x)$ , até o caso que trata do efeito túnel.

## 2.5 Reflexão Interna Total Frustrada

Quando a luz incide sobre a superfície de separação de dois meios transparentes parte dela é refletida e parte é transmitida através do segundo meio, sendo esta chamada de luz refratada, fenômenos esses descritos pelas leis da reflexão e refração de Snell-Descartes.

Importante lembrar que quando ocorre esta mudança entre dois meios, cujos índices de refração sejam diferentes, embora a frequência da onda se mantenha inalterada, tanto a velocidade quanto o comprimento da onda luminosa são alterados, e é justamente a alteração de velocidade da onda que provoca um desvio da direção de propagação da mesma.

Agora, se a luz se propaga através de dois meios, sendo o índice de refração do primeiro meio maior do que o índice de refração do segundo meio, como por exemplo, se tivermos a luz passando através da água para em seguida passar para o ar, neste caso, a luz refratada se afasta da normal, o que está de acordo com a segunda lei de Snell-Descartes da refração:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (3.32)$$

e,

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.33)$$

Partindo desta lei, é possível concluir que se aumentarmos suficientemente o ângulo de incidência  $\theta_1$ , haverá um valor limite que garante que  $\sin \theta_2 \leq 1$ :

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \leq 1 \quad (3.34)$$

Da expressão acima, vê-se imediatamente que há um ângulo crítico de incidência, que satisfaz a desigualdade:

$$\sin \theta_1 \leq \frac{n_2}{n_1} \quad (3.35)$$

Na realidade, a conclusão que se tira é que existe um limite para o qual a refração pode ocorrer, e à partir de um determinado valor do ângulo de incidência, denominado ângulo crítico, a refração não ocorre e o que se verifica é que parte da luz refratada se propaga paralelamente à superfície de separação entre os dois meios, surgindo o que é denominada onda evanescente, ou onda de superfície. Este fenômeno é denominado reflexão total interna. (REITZ; MILFORD; CHRISTY, p.379, 1982).

Uma consequência da presença da onda evanescente é a penetração dos campos eletromagnéticos no meio menos refringente por uma distância comparável ao comprimento de onda  $\lambda$ , da onda evanescente, havendo fluxo de energia através da superfície de separação (HELENE, Otaviano; Instituto de Física USP; sd.).

Se em seguida for colocado um terceiro meio ótico, cujo índice de refração seja igual ao primeiro meio, separados por este meio intermediário, cujo índice de refração é menor, e a distância de separação entre os dois meios de índices de refração iguais não seja grande, comparado com o comprimento de onda  $\lambda$  da onda evanescente, haverá fluxo de energia através do meio de separação entre os dois meios de mesmo índice de refração, e este fluxo de energia será tão mais intenso quanto menor for a distância entre os meios de mesmo índice de refração. Se a distância entre os dois meios for da ordem de grandeza do comprimento de onda da onda evanescente, a sua energia pode ser transmitida através deste intervalo, de maneira que haverá propagação de luz no terceiro meio ótico. Este fenômeno é denominado Reflexão Interna Total Frustrada, e é o análogo clássico do Efeito Túnel.

Exatamente devido a esta semelhança, muitos autores trataram os dois fenômenos físicos como sendo análogos um sendo um fenômeno clássico enquanto que o outro é essencialmente um fenômeno que somente pode ser compreendido através dos fundamentos da mecânica quântica.

Daremos atenção a três trabalhos acadêmicos disponíveis na web, que tratam do efeito túnel como análogo da reflexão interna total frustrada, dos quais destacamos a seguir os principais pontos:

### 2.5.1 Penetração de Barreiras por Ondas Eletromagnéticas

O primeiro artigo selecionado para ser discutido é: “Penetração de Barreiras por Ondas Eletro Magnéticas” (HELENE, Otaviano; Instituto de Física USP; 19xx). Nesse artigo o autor descreve o fenômeno da reflexão interna total frustrada e em seguida apresenta um interessante aparato experimental utilizando um sistema composto de um emissor e um receptor de micro-ondas, cujo comprimento da onda é de 3 cm. Trata-se de um experimento engenhoso que funciona, pois a corneta receptora dotada de um medidor permite avaliar a intensidade da onda recebida. Porém, o mais importante do experimento é a justificativa apresentada pelo autor,

que afirma a sua opção por utilizar micro-ondas, em vez de luz visível, devido ao fato de “medidas experimentais de penetração de barreiras usando-se luz visível exige um aparato experimental bastante sofisticado”, devido ao fato da onda evanescente cair exponencialmente com distâncias da ordem do comprimento de onda da luz visível que da ordem de  $10^{-7}$  metros, o que exige a utilização de prismas com o mínimo de imperfeições em suas superfícies. Com a utilização de micro-ondas cujo comprimento de onda situado na faixa de 3 cm, esta dificuldade é facilmente superada o que torna o experimento bem sucedido e bastante elucidativo. Como era de se esperar, o autor faz uma analogia do fenômeno da reflexão interna total frustrada com o efeito túnel da mecânica quântica, porém não trata do fenômeno quântico, limita-se apenas a fazer uma menção.

### 2.5.2 Um exemplo de analogia do Efeito Tunelamento Quântico

Através do artigo: “Uma demonstração simples sobre a analogia clássica do efeito de tunelamento quântico” (SENA; OLIVEIRA; ALCANTARA JÚNIOR)<sup>4</sup>. Os autores lembram que não existe correspondente do efeito túnel na mecânica newtoniana; porém, defende que é possível achar correspondência na teoria ondulatória da luz, já que a mesma pode ser como uma onda eletromagnética ao invés de um feixe de partículas. Interessante citar que os autores lembram o fato de segundo a mecânica quântica uma partícula quântica, um elétron, por exemplo, possuir natureza dual, podendo manifestar tanto o comportamento de onda como de partícula. Os autores lembram que nesta abordagem, o elétron é descrito por uma função de onda de matéria que é representada por autofunções que são soluções da equação de Schrödinger com condições de contorno em  $x=0$  e  $x=L$ , apropriadas ao problema da barreira de potencial. Através deste modelo teórico, os autores consideram as probabilidades de Reflexão,  $R$ , e de transmissão,  $T$ , isto é, que o elétron seja espalhada pela barreira de potencial. Sabe-se que a probabilidade de transmissão, tratada como coeficiente de transmissão, é extremamente sensível à amplitude do potencial e a largura da barreira, já que a probabilidade de transmissão é dada Por:

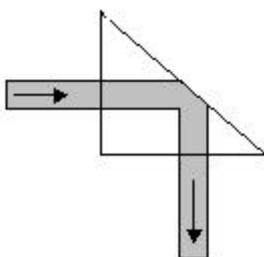
$$T = e^{-2kl} \quad (3.36)$$

---

<sup>4</sup> (SENA, Cleidiane O; OLIVEIRA, Glaura C. Azevedo; ALCANTARA JÚNIOR, Petrus; Universidade Federal do Pará – UFPA)

onde  $k$  é o comprimento característico da barreira (comprimento de penetração) e depende da diferença de energia do feixe de partículas incidente para a altura da barreira de potencial.

O trabalho trata do problema da reflexão interna total frustrada em prismas retos. Da física o que pode ser afirmado é que normalmente, na superfície de um meio transparente de índice de refração menor que o do meio anterior, este não sofrerá nenhum desvio. Ao incidir obliquamente no mesmo sentido, o raio luminoso se afasta da normal. Aumentando-se o ângulo de incidência até um ângulo limite  $\theta_L$ , o raio sai rasante a superfície ótica, ou seja, o ângulo de refração é de  $90^\circ$  com a normal. Se o ângulo de incidência for maior que o ângulo limite não há refração e a luz sofre o fenômeno chamado reflexão interna total, como discutido na seção precedente. Se o fenômeno ocorrer em prismas de ângulo reto haverá um desvio de  $90^\circ$  em relação ao raio incidente, sendo portando um sistema inversor, cuja face de  $45^\circ$  atua como um espelho plano e que pode ser visto na Fig.2.7 (**imagem retirada do artigo aqui citado**).

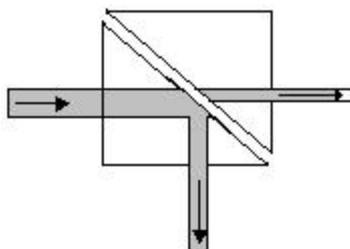


**Figura 2.7.** Reflexão interna total em um prisma de  $45^\circ$ .  
Fonte: SENA; OLIVEIRA; ALCANTARA JÚNIOR, s.d.

Segundo a teoria ondulatória, a luz penetra alguns comprimentos de onda além da interface, e é esta onda incidente na interface que dá origem à emissão de ondas que se sobrepõem e formam a onda transmitida com mesma frequência, período e fase, porém com velocidade diferente. Quanto maior for esta velocidade em relação à da onda incidente maior será a inclinação da frente de onda transmitida, ou seja, maior será a inclinação da onda transmitida em relação à normal à interface. Quando este ângulo chegar a  $90^\circ$ , teremos uma onda de superfície ou onda evanescente. Em termos gerais, quando a onda evanescente se estende com amplitude suficiente, através do meio menos denso, para uma região próxima de um material de índice de refração superior, a energia pode ser transmitida através deste intervalo; este processo é conhecido por reflexão interna

total frustrada (HECHT; E; Óptica. Trad. José Manuel, N.V. Lisboa, 1991). Se depois de tiver atravessado o intervalo, a onda evanescente ainda possuir energia suficiente para excitar os elétrons do meio adjacente, estes irão gerar uma onda que altera significativamente a configuração do campo, permitindo assim o fluxo de energia, concluindo o autor, que este é o análogo do efeito túnel quântico.

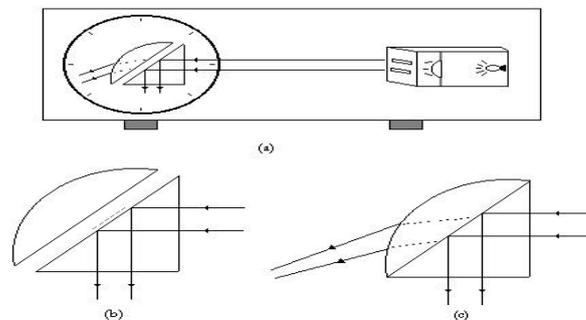
O experimento proposto pelo autor do texto é aquele no qual se propõe que se colocarmos um segundo prisma numa região, onde as vibrações eletromagnéticas ainda são apreciáveis, essas vibrações serão captadas e irão se propagar através do segundo prisma, ocorrendo o fenômeno da reflexão interna total frustrada, que é um fenômeno clássico. Segundo o autor do artigo, ocorre basicamente a mesma coisa no caso quântico, quando a região  $E < V(x)$  é diminuída desde uma largura infinita, o que corresponde a um degrau de potencial, até uma largura finita, que corresponde a uma barreira de potencial.



**Figura 2.8.** - Reflexão interna total frustrada  
Fonte: SENA; OLIVEIRA; ALCANTARA JÚNIOR, s.d.

Os autores justificam que o experimento de reflexão interna total frustrada pode ser realizado usando-se luz coerente e intensa de um laser; entretanto, a sua proposta experimental consiste em uma alternativa que é a utilização de um kit de ótica de baixo custo, com elementos feitos em acrílico, que são os prismas e as lentes, utilizando uma fonte de luz incoerente proveniente de uma lâmpada comum e colimada a qual incide num prisma. Ao aproximar-se a lente plano convexa do prisma pode-se observar que feixes de luz são transmitidos através dela. O autor justifica que este resultado deve-se ao fato da lente ser um dispositivo refrator usado para refazer frentes de onda de maneira controlada. Uma lente plano-convexa tende a fazer diminuir o raio de curvatura das frentes de onda incidentes (para índices de refração da lente superior ao do meio em que esta se encontra) fazendo com que a luz transmitida seja direcionada para o seu foco.

Este é o arranjo experimental proposto pelo autor do artigo ao qual fazemos referência, através do qual é possível verificar o fenômeno da reflexão interna total frustrada.



**Figura 2.9** Experimento para reflexão interna total frustrada que utiliza lente plano-convexa.  
Fonte: SENA; OLIVEIRA; ALCANTARA JÚNIOR, s.d.

O resultado obtido se deve ao fato da lente ser um dispositivo refrator usado para refazer frentes de onda de maneira controlada, por exemplo, e assim diminuir o raio de curvatura das frentes de onda incidentes (para o caso onde o índice de refração da lente é superior ao do meio em que esta se encontra), de modo que a luz transmitida seja direcionada para seu foco. O experimento tanto pode ser realizado com uma lente fina (plano-convexa) assim como uma lente grossa semicircular. O texto não explica como se resolve o problema da onda evanescente, possuindo um comprimento de onda extremamente pequeno é capaz de excitar campos na lente provocando o fenômeno da reflexão interna total frustrada.

### 2.5.3 Reflexão Interna Total Frustrada ou Penetração de Barreira Ótica

O artigo “Reflexão Interna Total Frustrada ou Penetração de Barreira Ótica”, de Márcia Regina e Orlando Peres, tem por objetivo principal fazer uma analogia entre o fenômeno da reflexão interna total frustrada e o efeito do tunelamento quântico. Trata inicialmente da questão de um feixe eletromagnético que incide na interface de dois meios, fazendo um ângulo com a direção normal à interface, da qual parte será refletida e parte será transmitida. Considera ainda o caso no qual o feixe incide do meio de maior índice de refração para o meio de menor índice de refração. Nesse caso, se o feixe incidir com um ângulo maior que certo valor, chamado ângulo crítico, observa-se reflexão total: o feixe incidente não atravessa a

interface, que funciona como uma barreira. Descreve então a situação na qual ao se colocar um terceiro meio, bem próximo do primeiro deixando o segundo como fenda, é possível observar a transmissão da luz através do segundo meio, fenômeno este conhecido como reflexão interna total frustrada, ou penetração de barreira ótica, a qual ocorre devido à existência de ondas evanescentes. A possibilidade de encontrar os valores de transmissão em função do ângulo de incidência, espessura da fenda, comprimento de onda da luz incidente e índices de refração do meio, podendo ser feito um paralelo com os conceitos de tunelamento em uma barreira retangular da mecânica quântica, uma vez que, segundo os autores, a dependência funcional da transmissão na interface pode ser comparada à encontrada para o tunelamento quântico.

## **CAPÍTULO 3. A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER**

### **3.1 Sistemas simples tratados quanticamente**

O presente capítulo trata de sistemas quânticos simples, organizados de maneira a explicitar as relações de dependência integrativa (reconciliação integrativa) e/ou derivativa (diferenciação progressiva) de alguns conceitos necessários à elaboração do organizador prévio que justifica o produto dessa dissertação.

O trabalho se desenvolve no contexto da Teoria Quântica ondulatória não relativística. Portanto, tem-se como centro do trabalho a equação linearizada de Schrödinger, forma simplificada da equação relativística original. As seções desse capítulo baseiam-se em textos introdutórios e intermediários de Mecânica Quântica, constantes na Bibliografia, a exemplo dos textos de Max Born, Eisberg & Resnick, entre outros. Além disso, serão tratados aqui apenas alguns sistemas quânticos simples em uma dimensão, por entender-se que são suficientes para a introdução dos conceitos de estado e função de estado, densidade de probabilidade, quantização de energia, tunelamento, e princípio de incerteza para alunos do ensino médio.

### **3.2 Sistemas quânticos simples**

O presente capítulo traz resumidamente as soluções da equação de Schrödinger dos casos mais importantes para os nossos objetivos, apresentada através de sua forma mais simples, onde a energia potencial,  $V(x)$ , depende somente da posição da partícula.

#### **3.2.1 Estados estacionários quânticos**

Na Mecânica Quântica, a quantização está associada às condições de contorno, ou seja, à configuração espacial do sistema físico. Um sistema onde a energia potencial depende somente da coordenada espacial é dito conservativo. Nesse caso, as soluções podem ser construídas como um produto da parte espacial e da parte temporal. Parte-se da equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x)\Psi(x, t) \quad (4.1)$$

Com a hipótese de separação de variáveis, supõe-se uma solução da equação de Schrödinger na forma:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \cdot \tau(t). \quad (4.1)$$

Com isso, tem-se:

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x)\Psi(x, t) \Leftrightarrow \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \psi(x) \frac{d}{dt} \tau(t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \tau(t) \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x)\tau(t) \quad (4.3)$$

Dividindo-se membro a membro por  $\psi(x)\tau(t)$ , segue-se que:

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{1}{\tau(t)} \frac{d}{dt} \tau(t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \quad (4.4)$$

O princípio de separação de variáveis requer que ambos os membros sejam iguais a uma constante de separação, digamos  $E$ . Nesse caso, obtém-se duas equações independentes:

$$i\hbar \frac{1}{\tau(t)} \frac{d}{dt} \tau(t) = E \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \ln \tau(t) = \frac{-iE}{\hbar} \quad (4.5)$$

Dessa equação resulta que  $\tau(t) = C e^{\frac{-iEt}{\hbar}}$ , onde  $C$  é uma constante complexa. Para a variável  $x$  a equação assume a forma:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) = E \Leftrightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (4.7)$$

Daí resulta a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (4.8)$$

A solução dessa equação depende da forma explícita da função energia potencial  $V(x)$ . Vê-se também que a constante de separação equivale ao valor esperado do hamiltoniano, correspondendo, pois à energia total da partícula. Em geral, como a função de onda deve ser normalizada, a constante de normalização absorve a constante  $C$  da parte temporal, o que equivale a fazer  $C = 1$ .

A solução da equação de Schrödinger assume então a forma simples:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\tau(t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}}\psi(x). \quad (4.9)$$

Assim, a densidade de probabilidade é dada por:

$$\begin{aligned} |\Psi(x, t)|^2 &= \Psi^*(x, t)\Psi(x, t) = e^{\frac{iEt}{\hbar}}\psi^*(x)e^{\frac{-iEt}{\hbar}}\psi(x) \\ &= \psi^*(x)\psi(x) = |\psi(x)|^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Daí, pode-se concluir que para os estados estacionários quânticos, a densidade de probabilidade  $P(x)$ , não depende do tempo, o que torna mais simples a solução de problemas físicos. Entretanto, vale destacar que a função de onda total,  $\Psi(x, t)$ , depende do tempo.

### 3.3 A partícula livre

Estados estacionários são aqueles nos quais a energia é bem definida, e como o valor da energia potencial depende do referencial adotado, por conveniência pode ser considerado:

$$V(x) = 0 \quad (4.61)$$

E ainda, como por definição, uma partícula livre é aquela na qual a energia potencial é constante, temos que:

$$F = -\frac{dV}{dx} = 0 \quad (4.12)$$

O que representa uma partícula livre da ação de forças.

Resolver a equação de Schrödinger independente do tempo, em resumo, significa procurar estados estacionários, para os quais a energia é bem definida.

$$\Psi(x, t) = \psi(x).e^{\frac{-iEt}{\hbar}} \quad (4.7)$$

Considere então a equação:

$$\psi''(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]\psi(x) \quad (4.14)$$

como  $V(x) = 0$  para partícula livre, tem-se:

$$\psi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) \quad (4.158)$$

Como  $E \geq V(x)$ , trataremos  $E > 0$ :

$$\psi'' = -k^2 \psi(x) \quad (4.16)$$

Onde:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (4.17)$$

Solução: procura-se por duas funções, cujas derivadas segundas sejam iguais a elas mesmas multiplicadas por uma constante negativa.

$$\psi(x) = C e^{ikx} + D e^{-ikx} \quad (4.18)$$

Note-se que essas soluções são linearmente independentes (L.I.), isto é, uma não pode ser escrita como múltiplo escalar da outra. A representação da função de onda sob a forma de função exponencial tem por vantagem, em relação à representação trigonométrica, a identificação do sentido de propagação da onda, pois a função de onda total é dada por:

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \psi(x) = C e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})} + D e^{-i(kx + \frac{Et}{\hbar})} \quad (4.19)$$

Assim, fica explícito que o primeiro termo está relacionado a uma onda que se propaga no sentido da esquerda para a direita (sentido de  $x$  crescente), e o segundo termo está relacionado a uma onda que se propaga da direita para a esquerda (sentido de  $x$  decrescente).

Conclui-se, portanto que, a função:

$$\psi(x) = C e^{ikx} + D e^{-ikx} \quad (4.209)$$

já informa suficientemente bem sobre as soluções em ondas planas. A solução é oscilatória, e representa a superposição de duas ondas que se propagam em

sentidos contrários. Ademais, a solução (4.20) pode ser reescrita também na seguinte forma:

$$\psi(x) = (C + D) \cos(kx) + i(C - D) \sin(kx) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Aqui, deve-se observar um aspecto conceitual importante da teoria quântica: há duas soluções linearmente independentes para um mesmo valor de energia total  $E$ . Nesse caso, diz-se que ocorre a *degenerescência* do autovalor de energia. Em geral, se a cada número quântico está associada uma única solução, diz que este é *não degenerado*. Por outro lado, se a um dado número quântico correspondem várias soluções linearmente independentes, diz que o mesmo é *degenerado*. E o número de autofunções L.I. é o *grau de degenerescência* do número quântico.

### 3.4 Partícula numa caixa rígida ou poço infinito

Um caso particular importante é representado pelo poço infinito, também conhecido como caixa rígida. A resolução do problema proposto por este modelo consiste em determinar quais são os estados possíveis de se estabelecer no sistema. A referência básica para essa seção é o livro Mecânica Quântica, de Griffiths (2011, p.22-30). O potencial é definido pela função

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (0, a) \\ \infty, & \text{se } x < 0, \text{ ou } x > a \end{cases} \quad (4.21)$$

A solução deve satisfazer as chamadas condições de fronteira ou contorno:

$$\psi(x = 0) = \psi(x = a) = 0 \quad (4.22)$$

$$E \quad \begin{cases} \psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \\ \psi(x = 0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \\ \psi(x = a) = 0 + B = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Tem-se, portanto, que  $B = 0$ . Resta, pois,  $A \neq 0$ , caso contrário teríamos uma função de onda identicamente nula, resultado que não tem significado físico. Resta então a parte senoidal:  $\psi(x) = A \sin kx$ . A condição de fronteira fixa em  $x=a$  fornece então:

$$\psi(x = a) = A \sin ka = 0 \quad (4.24)$$

Essa igualdade implica diretamente que:

$$ka = n\pi \quad (4.25)$$

com  $n \neq 0$

Então: 
$$k = n \frac{\pi}{a} \quad (4.26)$$

A energia total da partícula de massa  $m$  é dada por  $E = T + V$ , onde  $T$  representa a energia cinética e  $V(x)$  representa sua energia potencial. Dentro da caixa, tem-se  $V(x) = 0$ , logo,  $E = T$ :

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2. \quad (4.27)$$

Logo, 
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m a^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2 \quad (4.28)$$

Finalmente, os níveis de energia da partícula na caixa são dados por:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2 \quad (4.29)$$

Ao menor valor de energia, para  $n=1$ , pertence uma função de onda que caracteriza o chamado estado fundamental:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} \right) \quad (4.30)$$

Em resumo, os autovalores de energia e as correspondentes autofunções são tais que:

Autovalores de energia $E_n$	Autofunções pertencentes a $E_n$
$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2} n^2$	$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right)$

Pode-se mostrar facilmente que as autofunções do poço infinito são ortonormais (GRIFFITHS, 2011, p.24), isto é:

$$\int_0^a \psi_n(x) \psi_l(x) dx = \delta_{n,l} \quad (4.31)$$

Além disso, elas formam um conjunto completo de autofunções, permitindo que qualquer função  $\phi(x)$  definida dentro do intervalo  $0 \leq x \leq a$  pode ser expandida em série nesse conjunto (idem, p.25):

$$\phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} C_l \psi_l(x) \quad (4.32)$$

com os coeficientes são dados por:

$$C_n = \int_0^a \psi_n(x) \phi(x) dx \quad (4.33)$$

Ademais, essas funções também têm uma relação de completudeza (GRIFFITHS, 2011, p.27):

$$\int_0^a \phi^*(x) \phi(x) dx = \int_0^a |\phi(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow \int_0^a \left( \sum_{l=1}^{\infty} C_l \psi_l(x) \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) \right) dx \quad (4.34)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_l C_n \int_0^a \psi_l(x) \psi_n(x) dx = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_l C_n \delta_{n,l} = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = 1 \quad (4.35)$$

Também importante é a relação:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \psi_l(x) \psi_l(x') = \delta(x - x') \quad (4.36)$$

Essa identidade pode ser facilmente deduzida de:

$$\phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} C_l \psi_l(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left( \int_0^a \psi_l(x') \phi(x') dx' \right) \psi_l(x) = \quad (4.37)$$

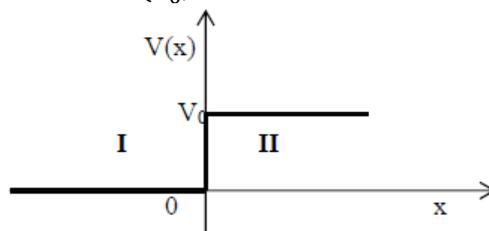
$$\phi(x) = \int_0^a \phi(x') \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \psi_l(x) \psi_l(x') \right\} dx' = \int_0^a \phi(x') \delta(x - x') dx' \quad (4.38)$$

Em resumo, o modelo da caixa rígida traz à tona uma importante consequência que é a quantização da energia. Este modelo assegura que os valores possíveis de energia para uma partícula confinada numa caixa rígida são quantizados.

### 3.5 Reflexão e transmissão de um feixe de partículas em um Degrau de Potencial

Vamos estudar o caso de uma partícula com energia E que se move, da esquerda para a direita, numa região onde a energia potencial é uma função degrau. Separamos o espaço em duas regiões, a região 1, onde  $x < 0$ , e a região 2, onde  $x > 0$ , e a partir daí podemos estabelecer o seu valor da energia potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ V_0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (4.39)$$



**Figura 3-1.** Configuração para o espalhamento de um feixe de partículas em um degrau de potencial.

A partir daí podemos considerar dois casos: o primeiro se a energia total da partícula for menor do que a altura do degrau,  $0 < E < V_0$ , e o segundo caso, se a energia total da partícula for maior do que a altura do degrau, ou seja,  $E > V_0$ .

### 3.5.1 Energia total da partícula menor do que a altura do degrau: ( $0 < E < U_0$ ).

Na região  $x < 0$ , temos que  $V(x) = 0$ . A equação de Schrödinger assume a forma:

$$\psi_1''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) \quad (4.40)$$

A qual pode ser escrita como:

$$\psi_1''(x) = -k^2 \psi_1(x) \quad (4.41)$$

Onde:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (4.42)$$

Cuja solução, já vista anteriormente, corresponde a uma função oscilatória, e pode ser escrita sob a forma de funções exponenciais:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (4.43)$$

O termo correspondente ao coeficiente A representa uma onda que se propaga no sentido crescente do eixo x e o termo em B corresponde a uma onda que se propaga no sentido decrescente do eixo x.

A equação de Schrödinger na região  $x > 0$ , onde  $V(x) = V_0$ , assume a forma:

$$\psi_2''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi_2(x) \quad (4.44)$$

Entretanto, como nesta região tem-se  $(E - V_0) < 0$ , pode-se proceder à inversão da ordem de seus termos, o que deixa a equação com a seguinte apresentação:

$$\psi_2''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi_2(x) \quad (4.45)$$

A qual pode ser escrita como:

$$\psi_2''(x) = k_2^2 \psi_2(x) \quad (4.46)$$

Onde:

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) \quad (4.47)$$

Nesse caso, procura-se por uma função cuja solução seja uma constante positiva, multiplicada pela própria função. Como já sabemos a sua solução é a combinação linear de duas funções exponenciais reais:

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} + De^{k_2x} \quad (4.48)$$

Considerando que a função deve ser finita na região II, devemos fazer  $D \equiv 0$ . Então, teremos:

$$\psi_2(x) = Ce^{-k_2x} \quad (4.49)$$

Para que a função de onda  $\psi(x)$  seja contínua em  $x=0$ , deve-se exigir que  $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ . Isso implica diretamente que  $A + B = C$ .

Além disso, a derivada da função de onda deve ser contínua em  $x=0$ , ou seja:

$$\begin{cases} \psi_1'(x = 0^-) = \psi_2'(x = 0^+) \\ ik(A - B) = -k_2C \end{cases} \quad (4.50)$$

Deve-se agora resolver o sistema de equações dos coeficientes:

$$\begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = -k_2C \end{cases} \Rightarrow \frac{A - B}{A + B} = \frac{-k_2}{ik} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{1 + \frac{k_2}{ik}}{1 - \frac{k_2}{ik}} = \frac{ik + k_2}{ik - k_2} \quad (4.51)$$

Fazendo-se  $k_2 + ik = \rho e^{i\theta}$ , onde  $\rho = \sqrt{k^2 + k_2^2}$  e  $\text{tg}\theta = \frac{k}{k_2}$ , tem-se:

$$k_2 - ik = \rho e^{-i\theta} \quad (4.54)$$

Esse resultado permite-nos expressar a razão  $\frac{A}{B}$  na forma:

$$\frac{A}{B} = -\frac{k_2 + ik}{k_2 - ik} = -e^{i2\theta} \quad (4.55)$$

Com isso, a reflectância é dada por:

$$R = \left| \frac{A}{B} \right|^2 = \left| \frac{\rho e^{i\theta}}{-\rho e^{-i\theta}} \right|^2 = |e^{i2\theta}|^2 = 1 \quad (4.56)$$

Ou seja, no degrau de potencial, se  $0 < E < V_0$ , um feixe de partículas é completamente refletido.

Na região  $x > 0$ , que é a região do degrau, existe uma probabilidade diferente de zero de a partícula penetrar “levemente” nesta região. Este fenômeno da partícula penetrar numa região classicamente proibida é o que vem a dar origem a uma dos mais notáveis previsões da mecânica quântica, que é Tunelamento Quântico, ou Efeito Túnel.

Como,

$$A = -B e^{i2\theta} \quad (4.57)$$

Então,

$$C = A + B = A - A e^{-i2\theta} = A(1 - e^{-i2\theta}) \quad (4.58)$$

e,

$$C = A(1 - e^{-i2\theta}) = A e^{-i\theta} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = (2i e^{-i\theta} \text{sen}\theta) A \quad (4.59)$$

$$C = (2i e^{-i\theta} \text{sen}\theta) A \Rightarrow |C|^2 = 4(\text{sen}\theta)^2 |A|^2 \therefore |C|^2 = \frac{4k^2}{k^2 + k_2^2} |A|^2$$

A densidade de probabilidade de encontrar a partícula na região II é dada por

$$|\psi_2(x)|^2 = |C|^2 e^{-2k_2 x} = \frac{4k^2}{k^2 + k_2^2} |A|^2 e^{-2k_2 x} \quad (4.60)$$

Assim, a probabilidade de encontrar uma partícula no intervalo entre  $x$  e  $x+dx$  dentro da região proibida é dada por:

$$P(x, x + dx) = |\psi_2(x)|^2 dx = |C|^2 e^{-2k_2 x} dx \quad (4.61)$$

Isto significa que a chance de encontrar a partícula em um intervalo  $(x, x+dx)$  à direita do degrau decresce exponencialmente, com um coeficiente de penetração:

$$\Delta x = \frac{1}{2k_2} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (4.62)$$

Que resulta:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}} \quad (4.63)$$

Este valor  $\Delta x$ , que no caso é muito pequeno, corresponde a região onde a partícula penetra na região classicamente proibida, mas não permanece nesta

região proibida, o que está de acordo com o fato do coeficiente de reflexão R, no modelo degrau de potencial, ser igual a 1.

### 3.5.2 Energia total da partícula maior do que a altura do degrau ( $E > U_0$ ):

$$\text{Seja } V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ V_0, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (4.64)$$

Na região 1, ou seja, em  $x < 0$ , teremos:

$$\psi_1''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) \quad (4.65)$$

Cuja solução é:

$$\psi_1(x) = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x} \quad (4.66)$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (4.67)$$

Entretanto, como sabemos de antemão que, neste caso o valor de A é maior que o valor de B, é de se esperar que exista uma onda se propagando no sentido positivo sobre a barreira. Na região 2, a função também será uma função oscilatória, já que  $E > V_0$ , portanto, na região onde  $x > 0$ , tem-se:

$$\psi_2''(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V_0] \psi_2(x) \quad (4.68)$$

A equação acima admite solução na forma:

$$\psi_2(x) = C e^{ik_2x} + D e^{-ik_2x} \quad (4.69)$$

Onde:

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad (4.70)$$

Como na região  $x > 0$  não há variações de potencial, não existe motivo para que ocorra reflexão, isto é, não se espera o termo que representa uma onda que se propaga no sentido decrescente do eixo  $ox$ , portanto, teremos  $D=0$ , e a função de onda fica reduzida a:

$$\psi_2(x) = C e^{ik_2x} \quad (4.71)$$

As constantes A, B e C podem ser calculadas, levando-se em conta que as funções devem ser contínuas em  $x=0$ :

$$\begin{cases} A + B = C \\ ik_1(A - B) = ik_2C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ik_1A = i(k_1 + k_2)C \\ 2ik_1B = i(k_1 - k_2)C \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad e \quad \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

Obtém-se daí que os coeficientes de reflexão e transmissão são dados respectivamente por:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad e \quad T = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{k_2}{k_1} \left( \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \right)^2 \quad (4.73)$$

Para determinar o fluxo de partículas em um feixe, toma-se o produto da velocidade pela densidade de partículas no feixe, isto é,  $\vec{v}|\psi|^2$ . Nesse caso, cada uma das soluções L.I. contribui para o fluxo da seguinte forma:

1. *fluxo incidente:*  $\vec{v}|\psi|^2 = \frac{\hbar k_1}{m} |A|^2 \hat{x}$
2. *fluxo refletido:*  $\vec{v}|\psi|^2 = -\frac{\hbar k_1}{m} |B|^2 \hat{x}$
3. *fluxo transmitido:*  $\vec{v}|\psi|^2 = \frac{\hbar k_2}{m} |C|^2 \hat{x}$

A conservação do número de partículas exige que o fluxo incidente no degrau seja igual à soma do fluxo refletido e do fluxo transmitido, isto é:

$$\frac{\hbar k_1}{m} |A|^2 = \frac{\hbar k_1}{m} |B|^2 + \frac{\hbar k_2}{m} |C|^2 \Leftrightarrow \frac{|B|^2}{|A|^2} + \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2} = 1$$

Vê-se de imediato a conservação do fluxo de partículas:  $R + T = 1$ . Mostra-se também de imediato que:

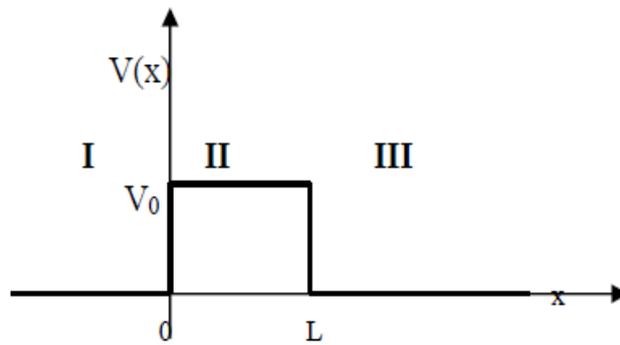
$$T = \frac{k_2}{k_1} \left( \frac{2}{1 + \frac{k_2}{k_1}} \right)^2 = 4 \left( 1 - \frac{V_0}{E} \right)^{1/2} \left[ 1 + \left( 1 - \frac{V_0}{E} \right)^{1/2} \right]^{-2}, E \geq V_0 \quad (4.74)$$

Vê-se que  $T = 0$ , se  $E = V_0$  e  $T \rightarrow 1$ , se  $E \rightarrow \infty$ .

Esse resultado será bastante explorado na sequência didática, em conexão com o simulador PHET.

### 3.6 Barreira de Potencial e Tunelamento Quântico

Nesta seção iremos considerar uma barreira de potencial com altura e largura finitas, conforme a ilustração a seguir:



**Figura 3-2.** Parâmetros da barreira de potencial para tratamento do tunelamento quântico.

O potencial pode ser escrito como:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{se } 0 < x < L \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > L \end{cases} \quad (4.75)$$

De acordo com a Mecânica Clássica, uma partícula que possui energia total  $E$  na região  $x < 0$  se movendo no sentido de  $x$  crescente, que incide sobre a barreira, tem a probabilidade um de ser refletida se a sua energia total  $E$  for menor do que a energia potencial da barreira ( $E < V_0$ ). Entretanto se a sua energia total  $E$  for maior do que a energia potencial da barreira ( $E > V_0$ ), a partícula tem probabilidade um de ser transmitida para a região  $x > L$ .

Na Mecânica Quântica nenhuma dessas afirmações descreve com precisão os resultados verificados experimentalmente. Se  $E$  não for muito maior do que  $V_0$ , existe uma probabilidade de haver uma reflexão. Por sua vez, se  $E$  não for muito menor do que  $V_0$ , a mecânica quântica prevê que existe uma probabilidade não nula de que a partícula seja transmitida através da barreira para a região  $x > L$ .

Quando uma partícula atravessa uma barreira de energia potencial  $V_0$ , cuja altura excede sua energia total, esta partícula está se comportando exclusivamente como uma onda, todavia, na região após a barreira, esta pode ser detectada como uma partícula localizada, sem que seja introduzida uma incerteza no conhecimento de sua energia. A este fenômeno, no qual a partícula atravessa uma barreira de potencial, é o que conhecemos como efeito túnel, ou tunelamento quântico.

“Assim, a penetração em uma região classicamente proibida de largura limitada a partícula pode ser observada, tanto antes como depois de atravessar a barreira, com energia total menor do que a energia potencial na região classicamente proibida” (EISBERG; RESNICK, p.258).

Vamos então tratar a barreira de potencial, via equação de Schrödinger, para as duas situações relacionadas ao valor da energia total da partícula, lembrando que devem existir soluções fisicamente aceitáveis para todos os valores de  $E > 0$ .

### 3.6.1 Energia total maior que a energia potencial na barreira: ( $E > V_0$ ).

A equação de Schrodinger se divide em três regiões:  $x < 0$  (à esquerda da barreira),  $0 < x < L$  (dentro da barreira), e  $x > L$  (à direita da barreira). Em todas as três regiões, como  $E > V_0$ , a função de onda  $\psi(x)$  possui comportamento oscilatório, Nas regiões à esquerda e a direita da barreira, as equações são de uma partícula livre com energia total  $E$ . Suas soluções gerais são:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, x < 0 \quad (4.76)$$

$$\psi_3(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}, x > L$$

O vetor de onda é dado por:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (4.77)$$

Daí, tem-se o comprimento de onda de *de Broglie* dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \quad (4.78)$$

Na região  $0 < x < L$ , que compreende a região sobre a barreira, uma vez que  $E > V_0$ , a equação também será a de uma partícula livre, mas com vetor de onda reduzido:

$$\psi_2(x) = Fe^{ik_2x} + Ge^{-ik_2x}, 0 < x < L \quad (4.79)$$

O vetor de onda nessa região é dado por:

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \quad (4.80)$$

Nesta região, a energia cinética da partícula terá um valor menor do que nas energias das regiões  $x < 0$  e  $x > L$ . O fato da partícula possuir valores diferentes de energia cinética em diferentes regiões do espaço implica no fato da sua função de onda  $\psi(x)$  possuir comprimentos de onda diferentes.

Para proceder à análise, deve-se considerar de onde parte inicialmente o feixe de partículas que incide sobre a barreira. Aqui, considera-se um feixe incidente propagando-se na região I, no sentido de  $x$  crescente. Nesse caso, há uma onda

refletida da barreira e uma onda transmitida à região III, que propaga-se para “mais infinito”. E como não há variações de potencial nessa região, não deve haver também onda refletida, significando que se deve fazer  $D \equiv 0$ .

$$\psi_3(x) = Ce^{ikx} \quad (4.81)$$

Os coeficientes são determinados pelas condições de fronteira em  $x=0$  e  $x=L$ . Assim, deve-se exigir que tanto as funções quanto suas primeiras derivadas sejam contínuas nesses pontos. Assim, em  $x=0$ , tem-se:

$$\begin{cases} A + B = F + G \\ ik(A - B) = ik_2(F - G) \end{cases} \quad (4.82)$$

Analogamente, aplicando-se as condições de contorno em  $x=L$ , obtém-se:

$$\begin{cases} Fe^{ik_2L} + Ge^{-ik_2L} = Ce^{ikL} \\ ik_2(Fe^{ik_2L} - Ge^{-ik_2L}) = ikCe^{ikL} \end{cases} \quad (4.83)$$

Pode-se mostrar facilmente que as equações acima fornecem as seguintes soluções:

$$\frac{F}{A} = \frac{2k(k + k_2)}{(k + k_2)^2 - (k - k_2)^2 e^{2ik_2L}}, \quad \frac{G}{A} = \frac{-2k(k - k_2)e^{2ik_2L}}{(k + k_2)^2 - (k - k_2)^2 e^{2ik_2L}} \quad (4.84)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(k^2 - k_2^2)(1 - e^{2ik_2L})}{(k + k_2)^2 - (k - k_2)^2 e^{2ik_2L}}, \quad \frac{C}{A} = \frac{4kk_2e^{-i(k-k_2)L}}{(k + k_2)^2 - (k - k_2)^2 e^{2ik_2L}} \quad (4.85)$$

Note-se que se fizermos  $k = k_2$  nas expressões acima, obteremos:  $\frac{B}{A} = 0$ , significando que não haveria onda refletida na região I;  $\frac{G}{A} = 0$ , implicando que não haveria onda refletida na região II; e  $\frac{F}{A} = \frac{C}{A} = 1$ , significando que haveria apenas uma onda plana propagando-se no sentido de  $x$  crescente, nas regiões I, II e III.

Agora, de posse desses resultados, pode-se calcular a reflectância,  $R$ , e transmitância,  $T$ . Para a reflectância, tem-se:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{(k^2 - k_2^2)(1 - e^{2ik_2L})}{(k + k_2)^2 - (k - k_2)^2 e^{2ik_2L}} \right|^2 \quad (4.86)$$

$$R = \frac{(k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2L)}{4k^2k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \sin^2(k_2L)}$$

Note-se que  $R = 0$ , se  $k = k_2$ , (mesmo meio, mesma energia potencial), mas também para os valores de energia que fazem  $\sin(k_2L) = 0 \Rightarrow k_2L = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$ , indicando que haverá comprimentos de onda para quais um feixe de partículas será

totalmente transmitido da região I para a região III. Nesse caso, os valores de energia do feixe incidente para os quais ocorre esse fenômeno são dados por:

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow E_n = V_0 + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad (4.88)$$

Esses valores correspondem a comprimentos de onda tais que:

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2L}{n} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E - V_0)}} \quad (4.89)$$

A transmitância calcula-se a partir de:

$$T = \left| \frac{4kk_2 e^{-i(k-k_2)L}}{(k+k_2)^2 - (k-k_2)^2 e^{2ik_2L}} \right|^2 \quad (4.90)$$

$$\Rightarrow T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{4k^2 k_2^2}{4k^2 k_2^2 + (k^2 - k_2^2)^2 \text{sen}^2(k_2 L)}$$

Ou ainda:

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \left[ 1 + \left( \frac{k^2 - k_2^2}{2kk_2} \right)^2 \text{sen}^2(k_2 L) \right]^{-1} \quad (4.91)$$

Vê-se imediatamente que  $T + R = 1$ , expressando a conservação do número de partículas: a soma do fluxo refletido com o fluxo transmitido tem que ser de 100%. Observe-se também que a transmitância será máxima, se  $\text{sen}(k_2 L) = 0$ , de pleno acordo com a análise precedente sobre a reflectância. Esse fenômeno é conhecido como transmissão ressonante e ocorre para  $\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2L}{n}$ , ou seja, para o caso em que cabe um número inteiro de meios comprimentos de onda na região de barreira:  $n \left(\frac{\lambda_2}{2}\right) = L$ .

Esse resultado será bastante explorado na Sequência Didática, em conexão com o simulador PHET.

### 3.6.2 Energia total menor que a energia potencial da barreira: ( $E < V_0$ ).

Vamos verificar o comportamento da função de onda em cada uma das regiões. Na região antes da barreira ( $x < 0$ ), e depois da barreira ( $x > L$ ), teremos  $E > 0$ . Portanto, o comportamento da função de onda nessas regiões será oscilatório, cujas soluções foram apresentadas anteriormente:

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad x < 0 \quad (4.92)$$

$$\psi_3(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx}, \quad x > L$$

Se considerarmos que antes do degrau teremos uma onda se propagando no sentido progressivo ( $A \neq 0$ ), teremos também uma onda refletida, a qual se propaga em sentido retrógrado ( $B \neq 0$ ).

Por outro lado, pelo que foi aqui proposto, é de se esperar que na região após o degrau, isto é,  $x > L$ , não existe motivo para supor que ocorra reflexão (o potencial é nulo), existindo apenas um termo que representa uma onda que se propaga no sentido progressivo, o que leva a impormos  $D=0$ , e, portanto, à solução  $\psi_3(x) = C e^{ikx}$ ,  $x > L$ , O que representa uma onda apenas e que se propaga no sentido positivo de  $x$ .

No interior da barreira, como  $E < V_0$ , a função de onda deve ser representada por uma função exponencial real:

$$\psi_2(x) = F e^{\beta x} + G e^{-\beta x}, \text{ onde } \beta = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (4.93)$$

Novamente, as soluções e suas primeiras derivadas devem satisfazer às condições de continuidade em  $x=0$  e em  $x=L$ .

As condições de contorno em  $x=0$  fornecem para os coeficientes as seguintes equações:

$$\begin{aligned} A + B &= F + G \\ ik(A - B) &= \beta(F - G) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2\beta F &= (\beta + ik)A + (\beta - ik)B \\ 2\beta G &= (\beta - ik)A + (\beta + ik)B \end{aligned} \quad (4.94)$$

Dividindo-se essas duas últimas equações membro a membro, obtém-se:

$$\frac{F}{G} = \frac{(\beta + ik)A + (\beta - ik)B}{(\beta - ik)A + (\beta + ik)B} \quad (4.95)$$

Analogamente, as condições de contorno em  $x=L$  fornecem para os coeficientes as seguintes equações:

$$\begin{aligned} F e^{\beta L} + G e^{-\beta L} &= C e^{ikL} \\ \beta(F e^{\beta L} - G e^{-\beta L}) &= ik C e^{ikL} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} 2\beta F e^{\beta L} &= (\beta + ik) C e^{ikL} \\ 2\beta G e^{-\beta L} &= (\beta - ik) C e^{ikL} \end{aligned} \quad (4.96)$$

Aqui, mais uma vez, tomando a razão entre as duas últimas equações, chega-se à condição:

$$\frac{F}{G} = \frac{(\beta + ik)}{(\beta - ik)} e^{-2\beta L} \quad (4.97)$$

As condições de fronteira podem ser reunidas agora para eliminar  $F$  e  $G$  das equações precedentes, permitindo determinar a razão  $B/A$ :

$$\frac{(\beta + ik)A + (\beta - ik)B}{(\beta - ik)A + (\beta + ik)B} = \frac{(\beta + ik)}{(\beta - ik)} e^{-2\beta L} \quad (4.98)$$

Fazendo-se  $\beta + ik = \rho e^{i\varphi}$ , então:

$$\frac{F}{G} = \frac{e^{i\varphi} A + e^{-i\varphi} B}{e^{-i\varphi} A + e^{i\varphi} B} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} e^{-2\beta L} \quad (4.99)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{i\varphi} A + e^{-i\varphi} B}{e^{-i\varphi} A + e^{i\varphi} B} = e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} \quad (4.100)$$

$$e^{i\varphi} A + e^{-i\varphi} B = e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} (e^{-i\varphi} A + e^{i\varphi} B) \quad (4.101)$$

$$(e^{-i\varphi} - e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} e^{i\varphi}) B = (e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) A$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})}{(e^{-i\varphi} - e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} e^{i\varphi})} \quad (4.102)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} e^{-i\varphi} - e^{i\varphi})}{(e^{-i\varphi} - e^{i2\varphi} e^{-2\beta L} e^{i\varphi})} = \frac{e^{i\varphi} (e^{-2\beta L} - 1)}{e^{i\varphi} (e^{-i2\varphi} - e^{i2\varphi} e^{-2\beta L})} \quad (4.103)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{(e^{-2\beta L} - 1)}{(e^{-i2\varphi} - e^{i2\varphi} e^{-2\beta L})} = \frac{-e^{-\beta L} (e^{\beta L} - e^{-\beta L})}{e^{-\beta L} (e^{-i2\varphi} e^{\beta L} - e^{i2\varphi} e^{-\beta L})} = \quad (4.104)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-e^{-\beta L} (e^{\beta L} - e^{-\beta L})}{e^{-\beta L} (e^{-i2\varphi} e^{\beta L} - e^{i2\varphi} e^{-\beta L})} = \frac{-2\sinh(\beta L)}{(e^{-i2\varphi} e^{\beta L} - e^{i2\varphi} e^{-\beta L})} \quad (4.105)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-2\sinh(\beta L)}{\cos(2\varphi)(e^{\beta L} - e^{-\beta L}) - i\sin(2\varphi)(e^{\beta L} + e^{-\beta L})} \quad (4.106)$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{-2\sinh(\beta L)}{\cos(2\varphi)(e^{\beta L} - e^{-\beta L}) - i\sin(2\varphi)(e^{\beta L} + e^{-\beta L})} \right|^2 \quad (4.107)$$

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{4\sinh^2(\beta L)}{4\cos^2(2\varphi)\sinh^2(\beta L) + 4\sin^2(2\varphi)\cosh^2(\beta L)} \quad (4.108)$$

Como  $\cosh^2(\beta L) = 1 + \sinh^2(\beta L)$ , tem-se:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\sinh^2(\beta L)}{\cos^2(2\varphi)\sinh^2(\beta L) + \sin^2(2\varphi) + \sin^2(2\varphi)\sinh^2(\beta L)} \quad (4.109)$$

Reagrupando os termos de  $\sinh^2(\beta L)$ , obtém-se:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\sinh^2(\beta L)}{\sin^2(2\varphi) + \sinh^2(\beta L)} = \frac{\sinh^2(\beta L)}{4\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + \sinh^2(\beta L)} \quad (4.110)$$

Como  $\sin^2(\varphi) = \frac{\operatorname{tg}^2(\varphi)}{1+\operatorname{tg}^2(\varphi)} = \frac{\beta^2}{\beta^2+k^2}$  e  $\cos^2(\varphi) = \frac{k^2}{\beta^2+k^2}$ , a expressão de R se simplifica na forma:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{\sinh^2(\beta L)}{4\frac{\beta^2}{\beta^2+k^2}\frac{k^2}{\beta^2+k^2} + \sinh^2(\beta L)} \quad (4.111)$$

Assim, obtém-se finalmente para a reflectância a expressão:

$$R = \frac{(\beta^2 + k^2)^2 \sinh^2(\beta L)}{4\beta^2 k^2 + (\beta^2 + k^2)^2 \sinh^2(\beta L)} \quad (4.112)$$

A transmitância pode ser obtida agora da lei de conservação do fluxo de partículas:

$$T = 1 - R = 1 - \frac{(\beta^2 + k^2)^2 \sinh^2(\beta L)}{4\beta^2 k^2 + (\beta^2 + k^2)^2 \sinh^2(\beta L)} \quad (4.113)$$

$$T = \frac{4\beta^2 k^2}{4\beta^2 k^2 + (\beta^2 + k^2)^2 \sinh^2(\beta L)} \quad (4.114)$$

Esse resultado vale para feixes de partículas com energia menores do que a altura da barreira de potencial,  $0 < E < V_0$ .

Aqui, é importante explicitar os parâmetros  $k$  e  $\beta$  em termos da energia total do feixe de partículas e dos parâmetros da barreira, a saber: largura  $L$  e altura  $V_0$ .

$$\beta^2 + k^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \quad (4.115)$$

$$4\beta^2 k^2 = 4 \left[ \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right] \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right) \quad (4.116)$$

Assim,

$$\frac{(\beta^2 + k^2)^2}{4\beta^2 k^2} = \frac{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2}{4 \left[\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\right] \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)} = \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \quad (4.117)$$

Esse resultado permite-nos escrever T como sendo:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(\beta^2 + k^2)^2}{4\beta^2 k^2} \sinh^2(\beta L)} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\beta L)} \quad (4.118)$$

Se considerarmos agora uma barreira alta ( $V_0 \gg E$ ), então  $\beta L$  é grande e a função seno hiperbólico pode ser aproximada por:

$$\begin{aligned} \sinh(\beta L) &= \frac{e^{\beta L} - e^{-\beta L}}{2} \cong \frac{e^{\beta L}}{2} \\ \Rightarrow \sinh^2(\beta L) &\cong \frac{e^{2\beta L}}{4} \end{aligned} \quad (4.119)$$

Com essas considerações, a transmitância será dada por:

$$T \approx \frac{1}{\frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \frac{e^{2\beta L}}{4}} = 16 \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2\beta L} = 16 \frac{E}{V_0} \left(1 - \frac{E}{V_0}\right) e^{-2\beta L} \quad (4.120)$$

Esse resultado se encontra bem estabelecido na literatura e permite entender em linhas gerais o fenômeno de tunelamento. Uma representação para  $V_0 \gg E$  é dada por:

$$T \approx \frac{16E}{V_0} e^{-2\beta L} \quad (4.121)$$

Observe que essa forma assintótica tem um *comprimento característico* dado pelo argumento da função exponencial, exigindo-se que  $2\beta L \approx 1$ . A distância típica da barreira é, portanto:

$$L \approx \frac{1}{2\beta} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0 - E)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{8m(V_0 - E)}} \quad (4.122)$$

As expressões “efeito túnel” ou “tunelamento”, são usadas como metáforas, uma vez que se uma partícula clássica realmente sofresse tunelamento, deveria despende parte de sua energia neste processo, e ao emergir do outro lado da barreira estaria com energia menor. Este é um ponto importante, pois a partícula emerge do outro lado da barreira sem perda de energia, e o comprimento de onda de de Broglie é dado por  $E - U(x)$  em ambos os lados da barreira de potencial.

O fenômeno do efeito túnel está relacionado essencialmente a três princípios da mecânica quântica:

a) O Princípio da Incerteza, que estabelece limitações quanto à realização de medidas. Este princípio foi criado por Werner Heisenberg em 1927 e transformou-se num enunciado da Mecânica Quântica.

b) O Princípio da Complementaridade, enunciado por Niels Bohr em 1928 e assevera que a natureza da matéria e radiação é dual e os aspectos ondulatório e corpuscular não são contraditórios, mas complementares. Este princípio traduz a dualidade onda-partícula da matéria e da radiação.

c) O caráter essencialmente probabilístico da Mecânica Quântica conduz aos resultados obtidos através da interpretação dos resultados obtidos através das soluções da Equação de Schrödinger.

Uma partícula ao atravessar uma barreira de potencial, cuja altura da barreira excede a sua energia total, a mesma está exibindo exclusivamente a sua natureza ondulatória. O efeito túnel como a denominação aparentemente sugere não representa nada relacionado com a permeabilidade da matéria como se esta fosse porosa, e uma partícula pudesse eventualmente “escapar” por esses “espaços vazios”. O efeito túnel é um rico exemplo do sucesso da mecânica quântica que de forma clara traz à tona a natureza ondulatória da matéria.

Esse resultado será bastante explorado na sequência didática, em conexão com o simulador PHET.

### **3.7 A partícula numa caixa não rígida ou Poço Finito.**

A quantização da energia para uma partícula num poço quadrado finito é um resultado que se origina da solução geral da equação de Schrödinger para qualquer partícula confinada em alguma região do espaço. O poço quadrado finito é uma consideração para uma função energia potencial mais geral. Esse potencial divide o espaço em três regiões: região 1,  $x < 0$ , onde o potencial é  $V = V_0$ ; região 2,  $0 < x < L$ , onde  $V = 0$ ; e região 3,  $x > L$ , onde  $V = V_0$ . A solução da equação de Schrödinger será então definida por três sentenças:  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  e  $\psi_3$ , respectivamente.

As soluções da equação de Schrödinger para este tipo de função dependem se a energia total  $E$  for maior ou menor que  $V_0$ . No caso onde  $E > V_0$ , a partícula não estará confinada, e qualquer valor de energia é permitido, conseqüentemente não irá

existir a quantização da energia. Porém, quando a energia total é menor do que a energia potencial, haverá confinamento da partícula e, conseqüentemente, a quantização de energia. Ambos os casos são de interesse nesse trabalho, Inicialmente abordaremos a situação em que  $0 < E < V_0$ .

### 3.7.1 Quantização: $0 < E < V_0$ .

Dentro do poço  $V(x)=0$ , e a equação de Schrödinger independente do tempo é a mesma para o poço infinito. Tem-se, portanto:

$$\psi_2''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2(x) \quad (4.123)$$

$$k_2^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (4.124)$$

A solução geral para a equação pode ser escrita como:

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} \quad (4.125)$$

Aqui,  $A_2$  e  $B_2$  serão determinados pelas condições de contorno em  $x=0$  e em  $x=L$ .

Fora do poço, o potencial tem o mesmo valor,  $V_0$ . Assim, as soluções nas regiões 1 e 3 têm a mesma forma:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{\beta x} + B_1 e^{-\beta x}, \quad x < 0 \quad (4.126)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{\beta x} + B_3 e^{-\beta x}, \quad x > L \quad (4.127)$$

Onde:

$$\beta^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}. \quad (4.128)$$

A análise das condições de regularidade da função de onda, condição de normalização, exige que se faça  $A_3 \equiv 0$  e  $B_1 \equiv 0$ . Com isso, as soluções fora do poço se reduzem a:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{\beta x}, \quad x < 0 \quad (4.129)$$

$$\psi_3(x) = B_3 e^{-\beta x}, \quad x > L \quad (4.130)$$

Agora, para determinar a equação de autovalores do problema, devemos aplicar as condições de continuidade das funções de onda e de suas primeiras derivadas nas fronteiras  $x=0$  e  $x=L$ :

$$\begin{cases} A_1 = A_2 + B_2 \\ \beta A_1 = ik_2(A_2 - B_2) \end{cases} \quad (4.131)$$

E:

$$\begin{cases} B_3 e^{-\beta L} = A_2 e^{ik_2 L} + B_2 e^{-ik_2 L} \\ -\beta B_3 e^{-\beta L} = ik_2(A_2 e^{ik_2 L} - B_2 e^{-ik_2 L}) \end{cases} \quad (4.132)$$

Eliminando-se A1 e B3 nas equações acima, obtém-se:

$$\begin{cases} (\beta - ik_2)A_2 + (\beta + ik_2)B_2 = 0 \\ (\beta + ik_2)A_2 e^{ik_2 L} + (\beta - ik_2)B_2 e^{-ik_2 L} = 0 \end{cases} \quad (4.133)$$

O sistema homogêneo de duas equações e duas incógnitas é somente solúvel se o determinante da matriz dos coeficientes é nula. Para esse cálculo é importante introduzir a notação auxiliar:

$$\beta + ik_2 = \rho e^{i\varphi}; \beta - ik_2 = \rho e^{-i\varphi} \quad (4.134)$$

Onde.

$$\rho^2 = \beta^2 + k_2^2 \text{ e } \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2}{\beta} \quad (4.135)$$

Com isso, o determinante reduz-se a:

$$\rho e^{-i\varphi} \rho e^{-i\varphi} e^{-ik_2 L} - \rho e^{i\varphi} \rho e^{i\varphi} e^{ik_2 L} = 0 \Leftrightarrow -\rho^2 [e^{i(2\varphi+k_2 L)} - e^{-i(2\varphi+k_2 L)}] \quad (4.136)$$

Do resultado acima, segue-se que a equação de autovalores para a energia satisfazem a seguinte equação transcendental:

$$-2i\rho^2 \operatorname{sen}(2\varphi + k_2 L) = 0 \quad (4.137)$$

É conveniente escrever esse último resultado na forma:

$$\operatorname{sen}(2\varphi + k_2 L) = 2\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{k_2 L}{2}\right) \cos\left(\varphi + \frac{k_2 L}{2}\right) = 0 \quad (4.138)$$

Obtém-se agora duas equações:

$$\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{k_2 L}{2}\right) = 0 \text{ e } \cos\left(\varphi + \frac{k_2 L}{2}\right) = 0 \quad (4.139)$$

A expressão em seno fornece a equação:

$$\operatorname{sen}\varphi \cos\left(\frac{k_2 L}{2}\right) + \cos\varphi \operatorname{sen}\left(\frac{k_2 L}{2}\right) = 0 \quad (4.140)$$

do

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\left(\frac{k_2 L}{2}\right) = \frac{k_2}{\beta} \quad (4.141)$$

nde:

Analogamente, a equação em cosseno dá como resultado:

$$\cos\varphi \cos\left(\frac{k_2 L}{2}\right) - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\left(\frac{k_2 L}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}\left(\frac{k_2 L}{2}\right) = \frac{k_2}{\beta} \quad (4.142)$$

Essas equações são escritas geralmente na forma (SCHARFF, 1969, p.57):

$$\operatorname{tg}\left(\frac{k_2 L}{2}\right) = \frac{\beta}{k_2} \quad (4.143)$$

$$-\operatorname{cotg}\left(\frac{k_2 L}{2}\right) = \frac{\beta}{k_2} \quad (4.144)$$

Essas equações são transcendentais porque a energia está contida  $\beta$  e em  $k_2$ .

Para obter uma solução numérica desse problema, façamos  $\xi = \frac{k_2 L}{2}$ . Como:

$$\beta^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} = k_0^2 - k_2^2 \Rightarrow, \text{ onde } k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \quad (4.145)$$

$$\beta^2 = k_0^2 - k_2^2 \Rightarrow \frac{\beta^2}{k_2^2} = \frac{k_0^2}{k_2^2} - 1 \quad (4.146)$$

Ou ainda,

$$\frac{\beta}{k_2} = \left(\frac{k_0^2}{k_2^2} - 1\right)^{1/2} = \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2} \quad (4.147)$$

onde se fez:

$$\xi_0^2 = k_0^2 \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (4.148)$$

Essas definições permitem que se reescrevam as equações de autovalores (Equações 4.147 e 4.148):

$$\operatorname{tg}\xi = \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2} \quad (4.149)$$

$$-\operatorname{cotg}\xi = \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2} \quad (4.150)$$

Nas expressões acima, tem-se:  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ .

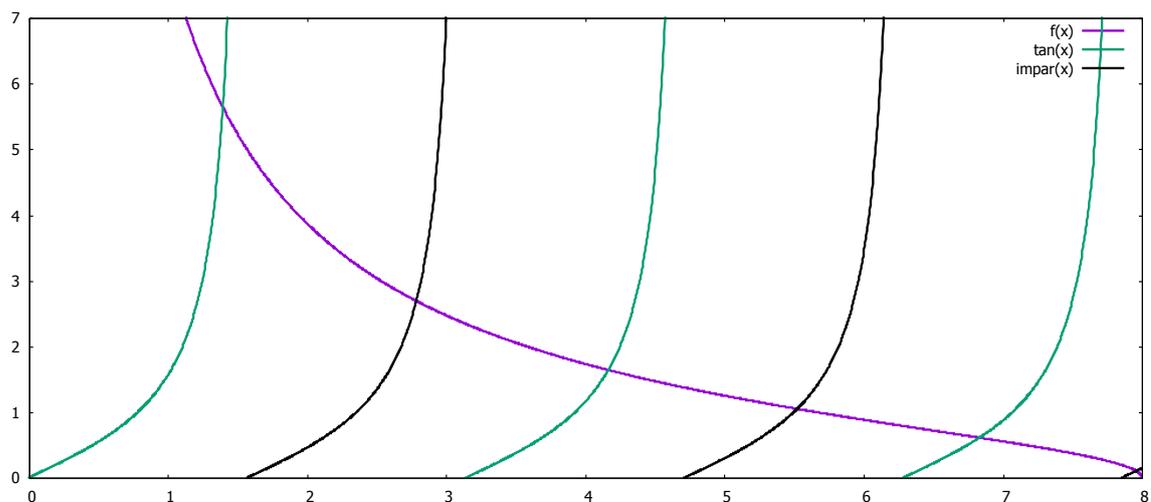


Figura 3-3. As abcissas das intersecções correspondem aos autovalores de energia. Nesse caso,  $\xi_0 = 8$ .

A Figura 3-3 mostra as soluções da equação de autovalores do poço finito para  $\xi_0 = 8$ . As soluções são dadas pelas abcissas dos pontos onde as curvas se cruzam. As linhas verdes dão os níveis de energia dos estados pares e as linhas pretas dão os níveis de energia dos estados ímpares.

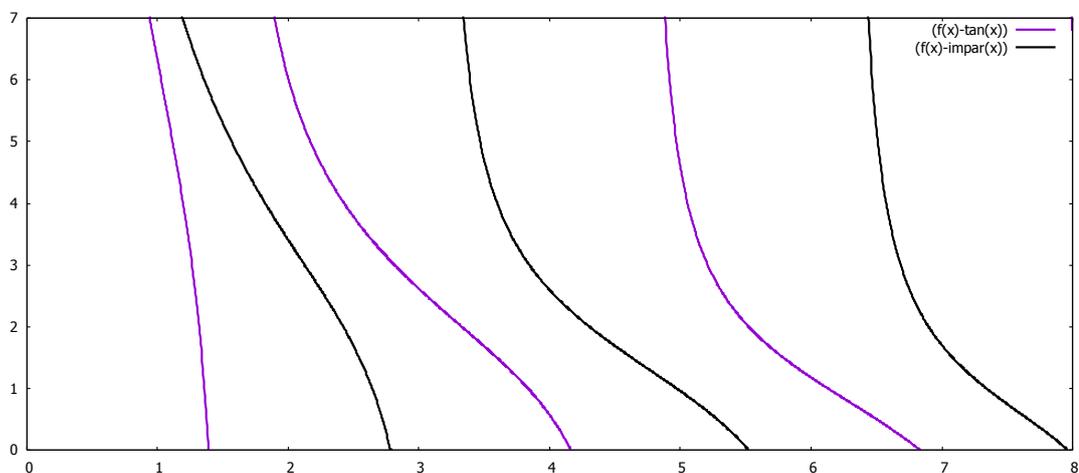


Figura 3-4. Os autovalores de energia são dados pelos zeros desse gráfico.  $\xi_0 = 8$ . Os estados correspondentes são alternadamente par e ímpar. Fonte: Jesus, J C O, comunicação privada.

### 3.7.2 Espalhamento e Transmissão Ressonante ( $E > V_0$ )

O espalhamento, isto é, reflexão e transmissão de ondas de probabilidade, pelo poço finito ocorre quando  $E > V_0$ .

A solução dentro do poço mantém-se inalterada:

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2x} + B_2 e^{-ik_2x} \quad (4.151)$$

Fora do poço as soluções são semelhantes a esta última, mas para um vetor de onda:

$$k = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}} \quad (4.152)$$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \quad (4.153)$$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \quad (4.10)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} \quad (4.155)$$

Para tratar corretamente o problema de espalhamento, toma-se um feixe de partículas incidindo sobre a barreira pela esquerda ( $x < 0$ ). Nesse caso, haverá reflexão e refração do feixe e o coeficiente  $B_1$  sobrevive. Na região 3,  $x > L$ , haverá somente a onda transmitida e portanto  $B_3 = 0$ .

As condições de fronteira implicam em:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = ik_2(A_2 - B_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik_2 & -ik_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4.156)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{-2ik_2} \begin{pmatrix} -ik_2 & -1 \\ -ik_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-2ik_2} \begin{pmatrix} -ik_2 - ik & -ik_2 + ik \\ -ik_2 + ik & -ik_2 - ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.157)$$

e

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_2} \begin{pmatrix} k_2 + k & k_2 - k \\ k_2 - k & k_2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \quad (4.158)$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2k_2} \begin{pmatrix} (k_2 + k)A_1 + (k_2 - k)B_1 \\ (k_2 - k)A_1 + (k_2 + k)B_1 \end{pmatrix} \quad (4.159)$$

$$\begin{cases} A_2 e^{ik_2L} + B_2 e^{-ik_2L} = A_3 e^{ikL} \\ ik_2(A_2 e^{ik_2L} - B_2 e^{-ik_2L}) = ikA_3 e^{ikL} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e^{ik_2L} & e^{-ik_2L} \\ ik_2 e^{ik_2L} & -ik_2 e^{-ik_2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 e^{ikL} \\ ikA_3 e^{ikL} \end{pmatrix} \quad (4.160)$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \frac{A_3 e^{ikL}}{-2ik_2} \begin{pmatrix} -ik_2 e^{-ik_2L} & -e^{-ik_2L} \\ -ik_2 e^{ik_2L} & e^{ik_2L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ ik \end{pmatrix} = \frac{A_3 e^{ikL}}{2k_2} \begin{pmatrix} (k_2 + k)e^{-ik_2L} \\ (k_2 - k)e^{ik_2L} \end{pmatrix} \quad (4.161)$$

Igualando-se as equações 4.163 e 4.166, tem-se:

$$\frac{1}{2k_2} \begin{pmatrix} k_2 + k & k_2 - k \\ k_2 - k & k_2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \frac{A_3 e^{ikL}}{2k_2} \begin{pmatrix} (k_2 + k)e^{-ik_2L} \\ (k_2 - k)e^{ik_2L} \end{pmatrix} \quad (4.162)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(k_2 + k)^2 - (k_2 - k)^2} \begin{pmatrix} k_2 + k & -(k_2 - k) \\ -(k_2 - k) & k_2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_2 + k)e^{-ik_2L} \\ (k_2 - k)e^{ik_2L} \end{pmatrix} A_3 e^{ikL} \quad (4.163)$$

Resulta daí que:

$$A_1 = \frac{A_3 e^{ikL}}{4kk_2} [(k_2 + k)^2 e^{-ik_2L} - (k_2 - k)^2 e^{ik_2L}] \quad (4.164)$$

$$B_1 = \frac{A_3 e^{ikL}}{4kk_2} (k_2^2 - k^2) (e^{ik_2L} - e^{-ik_2L}) \quad (4.165)$$

Pode-se agora calcular a reflectância, R, e a transmitância, T:

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{2i(k_2^2 - k^2) \text{sen}(k_2L)}{(k_2 + k)^2 e^{-ik_2L} - (k_2 - k)^2 e^{ik_2L}} \right|^2 \quad (4.166)$$

Desenvolvendo o denominador da expressão acima, obtém:

$$R = \frac{(k_2^2 - k^2)^2 \text{sen}^2(k_2L)}{(k_2^2 + k^2)^2 \text{sen}^2(k_2L) + 4k^2 k_2^2 \text{cos}^2(k_2L)} \quad (4.167)$$

A transmitância é dada por:

$$T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \left| \frac{4kk_2 e^{-ikL}}{(k_2 + k)^2 e^{-ik_2L} - (k_2 - k)^2 e^{ik_2L}} \right|^2 \quad (4.168)$$

Novamente, explicitando o denominador da expressão acima, obtém-se:

$$T = \frac{4k^2 k_2^2}{(k_2^2 + k^2)^2 \text{sen}^2(k_2L) + 4k^2 k_2^2 \text{cos}^2(k_2L)} \quad (4.169)$$

A reflectância, dada pela Eq. 4.172, mostra como resultado imediato que se os meios 1, 2 e 3 são iguais, isto é, se  $k = k_2$  então  $R=0$ ; um resultado óbvio. Interessante, porém, é a dependência com  $\text{sen}^2(k_2L)$ , pois esse fator pode se anular para certos valores de energia, tais que  $k_2L = n\pi, n = 1, 2, 3 \dots$ . Observe que nessa condição o valor da transmitância é igual a 1. Isso equivale a termos comprimentos de onda :  $k_2 = \frac{n\pi}{L} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3 \dots$ . Isso significa que se tivermos um feixe incidente cuja energia seja tal que caiba um número inteiro de meios comprimentos de onda em L, a largura do poço, então a reflectância será nula para esse valor de energia e o feixe de partículas será transmitido da região 1 para a região 3, como se não existisse o poço.

Esse resultado pode ser expresso em função da energia:

$$E = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \quad (4.170)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \quad (4.170)$$

Esse fenômeno é conhecido como *transmissão ressonante*. E a razão de trazê-lo aqui explicitamente é o fato de podermos explorá-lo nas simulações Phet, como se pode verificar na Sequência Didática.

### 3.8 Poço duplo simétrico

A presente seção trata do poço duplo simétrico como modelo elementar de uma molécula. A base física necessária é também o tunelamento quântico, como se verá na resolução da equação de Schrödinger independente do tempo para o potencial correspondente.

O potencial é definido por três sentenças, como se segue:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > L + D/2 \\ 0, & -L - \frac{D}{2} < x < -D/2 \\ V_0, & \frac{D}{2} < x < L + D/2 \\ 0, & \frac{D}{2} < x < L + D/2 \end{cases} \quad (4.171)$$

Nas regiões onde o potencial é infinito, a probabilidade de encontrar uma partícula é zero. Portanto, são nulas as funções de onda, nessas regiões. Como estamos interessados no tunelamento, vamos analisar apenas a região do espectro na qual a energia satisfaz a restrição:  $0 < E < V_0$ .

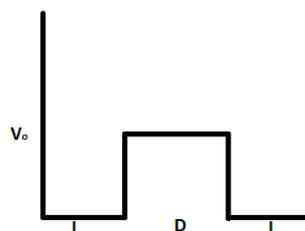


Figura 3-5. Poço duplo infinito para ilustrar ligações químicas via tunelamento quântico.

Poço duplo simétrico: as regiões de comprimento L representam dois “átomos” separados por uma barreira de potencial de largura D e altura  $V_0$ . O

tunelamento de elétrons através da barreira de largura  $D$  e altura  $V_0$  leva à ligação química, isto é, à formação de uma molécula em uma dimensão (linear).

Nos poços, regiões 1 e 3, tem-se:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= a_1 e^{ikx} + b_1 e^{-ikx} \\ \psi_3 &= a_3 e^{ikx} + b_3 e^{-ikx}\end{aligned}\quad (4.171)$$

Com:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\quad (4.172)$$

Na região 2, onde se encontra a barreira de potencial, a função de onda assume a forma:

$$\psi_2 = a_2 e^{\beta x} + b_2 e^{-\beta x}\quad (4.17311)$$

Com:

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}\quad (4.17412)$$

Essas funções devem satisfazer as condições de fronteira:

$$\psi_1(-L - D/2) = 0, \quad \psi_3(L + D/2) = 0\quad (4.175)$$

$$\psi_1(-D/2) = \psi_2(-D/2), \quad \psi_1'(-D/2) = \psi_2'(-D/2)\quad (4.176)$$

$$\psi_2(D/2) = \psi_3(D/2), \quad \psi_2'(D/2) = \psi_3'(D/2)\quad (4.177)$$

**Condição de fronteira em  $x = -L - \frac{D}{2}$**

A primeira das equações em (6) fornece:

$$a_1 e^{ik(-L - \frac{D}{2})} + b_1 e^{-ik(-L - \frac{D}{2})} = 0\quad (4.178)$$

$$\Rightarrow b_1 = -a_1 e^{-2ik(L + \frac{D}{2})}\quad (4.179)$$

A substituição de (4.186) em (2) leva à forma da solução na região 1:

$$\psi_1 = a_1 e^{-ik(L + \frac{D}{2})} \left( e^{ik(L + \frac{D}{2})} e^{ikx} - e^{-ik(L + \frac{D}{2})} e^{-ikx} \right)\quad (4.180)$$

$$= 2ia_1 e^{-ik(L + \frac{D}{2})} \text{sen} \left[ k \left( x + L + \frac{D}{2} \right) \right]\quad (4.18113)$$

$$\psi_1 = 2ia_1 e^{-ik(L + \frac{D}{2})} \text{sen} \left[ k \left( x + L + \frac{D}{2} \right) \right] = A_1 \text{sen} \left[ k \left( x + L + \frac{D}{2} \right) \right]\quad (4.18214)$$

Onde a constante  $A_1 = 2ia_1e^{-ik(L+\frac{D}{2})}$  dá a amplitude da função de onda na região 1.

**Condição de fronteira em  $x = L + \frac{D}{2}$**

A segunda das equações em (6) fornece:

$$a_3e^{ik(L+\frac{D}{2})} + b_3e^{-ik(L+\frac{D}{2})} = 0 \quad (4.183)$$

$$\Rightarrow b_3 = -a_3e^{2ik(L+\frac{D}{2})} \quad (4.184)$$

A substituição de (10) em (2) leva à forma da solução na região 3:

$$\begin{aligned} \psi_3 &= a_3e^{ik(L+\frac{D}{2})} \left( e^{-ik(L+\frac{D}{2})}e^{ikx} - e^{ik(L+\frac{D}{2})}e^{-ikx} \right) \quad (4.185) \\ &= 2ia_3e^{ik(L+\frac{D}{2})} \text{sen} \left[ k \left( x - L - \frac{D}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\psi_3 = 2ia_3e^{ik(L+\frac{D}{2})} \text{sen} \left[ k \left( x - L - \frac{D}{2} \right) \right] = A_3 \text{sen} \left[ k \left( x - L - \frac{D}{2} \right) \right] \quad (4.186)$$

A constante  $A_3 = 2ia_3e^{ik(L+\frac{D}{2})}$  dá a amplitude da função de onda na região 3.

**Continuidade da função de onda em  $x = -\frac{D}{2}$**

Substituindo-se as equações 4.180, 4.189 e 4.193 na equação 4.183, obtém-se:

$$\psi_1(-D/2) = \psi_2(-D/2) \Rightarrow A_1 \text{sen}(kL) = a_2e^{-\beta D/2} + b_2e^{\beta D/2} \quad (4.187)$$

$$\psi_1'(-D/2) = \psi_2'(-D/2) \Rightarrow kA_1 \cos(kL) = \beta(a_2e^{-\beta D/2} - b_2e^{\beta D/2}) \quad (4.189)$$

Para explicitar o coeficiente  $a_2$ , multiplica-se a Eq. 4.194 por  $\beta$  e soma-se o resultado à Eq. 4.196:

$$\begin{aligned} 2\beta a_2e^{-\beta D/2} &= \beta A_1 \text{sen}(kL) + kA_1 \cos(kL) \quad (4.189) \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{e^{\beta D/2}}{2\beta} (\beta \text{sen}(kL) + k \cos(kL)) A_1 \end{aligned}$$

De forma análoga, obtém-se o coeficiente  $b_2$ :

(4.190)

$$2\beta b_2 e^{\beta D/2} = \beta A_1 \text{sen}(kL) - kA_1 \text{cos}(kL)$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{e^{-\beta D/2}}{2\beta} (\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL)) A_1$$

Tomando-se a razão entre as equações 21 e 22, obtém-se:

$$\frac{a_2}{b_2} = e^{\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL))} \quad (4.191)$$

### Continuidade da função de onda em $x = +\frac{D}{2}$

Substituindo-se as equações 4.180, 4.189 e 4.193 na equação 4.180, obtém-se:

$$\psi_3(D/2) = \psi_2(D/2) \Rightarrow A_3 \text{sen}(-kL) = a_2 e^{\beta D/2} + b_2 e^{-\beta D/2} \quad (4.192)$$

$$\psi'_3(D/2) = \psi'_2(D/2) \Rightarrow kA_3 \text{cos}(-kL) = \beta(a_2 e^{\beta D/2} - b_2 e^{-\beta D/2}) \quad (4.193)$$

Para explicitar o coeficiente  $a_2$ , multiplica-se a Eq. 24 por  $\beta$  e soma-se o resultado à Eq. 4.200:

$$2\beta a_2 e^{\beta D/2} = \beta A_3 \text{sen}(-kL) + kA_3 \text{cos}(-kL) \quad (4.194)$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{e^{-\beta D/2}}{2\beta} (\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL)) A_3$$

Na Eq. 26, fez-se uso da paridade das funções seno e cosseno.

De forma análoga, obtém-se o coeficiente  $b_2$ :

$$2\beta b_2 e^{-\beta D/2} = \beta A_3 \text{sen}(-kL) - kA_3 \text{cos}(-kL) \quad (4.195)$$

$$\Rightarrow b_2 = -\frac{e^{\beta D/2}}{2\beta} (\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL)) A_3$$

Tomando-se a razão entre as equações 4.201 e 4.202, obtém-se:

$$\frac{a_2}{b_2} = e^{-\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL))} \quad (4.196)$$

Equação de autovalores

Como as equações 4.199 e 4.203 são iguais deve-se exigir que:

$$e^{\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL))} = \quad (4.197)$$

$$e^{-\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL))}$$

A Eq. 4.204 contém apenas as larguras dos poços, a largura da barreira, a altura do potencial, a massa da partícula e a energia do sistema. Como é uma equação transcendental, a solução não pode ser expressa mediante funções elementares. Vamos analisá-la mais de perto. Note-se que podemos reescrever a Eq. 4.204 na forma:

$$\left[ e^{\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL))} \right]^2 = 1 \quad (4.198)$$

Tem-se, portanto, que:

$$e^{\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL))} = \pm 1 \quad (4.199)$$

Os sinais distintos levam também a soluções de diferentes paridades, posto que o potencial tem paridade definida:  $V(x) = V(-x)$ .

### 3.8.1 Equação de autovalores e função de onda para o sinal positivo

Nesse caso,

$$e^{\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL))} = 1 \quad (4.200)$$

$$\Rightarrow e^{\beta D} (\beta \text{sen}(kL) + k \text{cos}(kL)) = \beta \text{sen}(kL) - k \text{cos}(kL) \quad (4.201)$$

$$(e^{\beta D} - 1) \beta \text{sen}(kL) = -(e^{\beta D} + 1) k \text{cos}(kL)$$

$$2\beta \text{senh}(\beta D/2) \text{sen}(kL) = -2k \text{cosh}(\beta D/2) \text{cos}(kL)$$

$$\Rightarrow -\cot g(kL) \cot gh(\beta D/2) = \frac{\beta}{k}$$

Com essa escolha de sinal, a Eq. 4.199 (ou a Eq. 4.203, equivalentemente) implica em  $a_2 = b_2$ . Além disso, comparando-se a Eq. 4.197 com a Eq.4.202, tem-se:  $A_3 = -A_1$ .

$$a_2 = \frac{e^{\beta D/2}}{2} \text{sen}(kL) \left( 1 + \frac{k}{\beta} \cot g(kL) \right) A_1 = \frac{e^{\beta D/2}}{2} \text{sen}(kL) (1 - \text{tgh} \beta D/2 A_1) \quad (4.202)$$

$$a_2 = \frac{e^{\beta D/2}}{2} \text{sen}(kL) \left( \frac{\text{cosh}(\beta D/2) - \text{senh}(\beta D/2)}{\text{cosh}(\beta D/2)} \right) A_1$$

$$A_1 = \frac{2\cosh(\beta D/2)}{\text{sen}(kL)} a_2 = -A_3$$

### 3.8.2 Equação de autovalores e função de onda para o sinal negativo

Nesse caso:

$$e^{\beta D} \frac{(\beta \text{sen}(kL) + k \cos(kL))}{(\beta \text{sen}(kL) - k \cos(kL))} = -1 \quad (4.203)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{\beta D} (\beta \text{sen}(kL) + k \cos(kL)) &= \\ -\beta \text{sen}(kL) + k \cos(kL) & \\ (e^{\beta D} + 1) \beta \text{sen}(kL) &= (1 - e^{\beta D}) k \cos(kL) \\ 2\beta \cosh(\beta D/2) \text{sen}(kL) &= -2k \text{senh}(\beta D/2) / \\ 2\cos kL & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\cot g(kL) \text{tgh}(\beta D/2) = \frac{\beta}{k} \quad (4.204)$$

Com essa escolha de sinal, a Eq. 4.199 (ou a Eq. 4.203, equivalentemente) implica em  $a_2 = -b_2$ . Além disso, comparando-se a Eq. 4.197 com a Eq.4.202, tem-se:  $A_3 = A_1$ . Segue-se ainda da Eq. 4.202 que:

$$\begin{aligned} a_2 = \frac{e^{\frac{\beta D}{2}}}{2} \text{sen}(kL) \left(1 + \frac{k}{\beta} \cot g(kL)\right) A_1 &= \frac{e^{\frac{\beta D}{2}}}{2} \text{sen}(kL) \left(1 - \cot gh\left(\frac{\beta D}{2}\right)\right) A_1 \quad (4.205) \\ a_2 = \frac{e^{\beta D/2}}{2} \text{sen}(kL) \left(\frac{\text{senh}(\beta D/2) - \cosh(\beta D/2)}{\text{senh}(\beta D/2)}\right) A_1 &= \\ \frac{-\text{sen}(kL)}{2\text{senh}(\beta D/2)} A_1 & \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{-2\text{senh}(\beta D/2)}{\text{sen}(kL)} a_2 = A_3 \quad (4.206)$$

Vamos analisar agora as equações de autovalores (espectro) a partir das Eqs. 4.208 e 4.211 .Note-se que, se  $D \rightarrow \infty$ , obtém-se a equação de autovalores para os poços infinitos separados, levando à degenerescência do espectro.

A resolução das equações transcendentais não é trival. Primeiramente, porque  $E$  está tanto em  $\beta$  quanto em  $k$ . Em segundo lugar, porque não há dependência explícita entre as funções envolvidas. Essa seção foi elaborada predominantemente a partir do livro de Scharff (1969, p.102-107).

#### RESUMO

$$\Rightarrow -\cot g(kL) \cot gh(\beta D/2) = \frac{\beta}{k} \quad (4.207)$$

(estados pares: Eq. 4.208)

$$\Rightarrow -\cot g(kL) \operatorname{tgh}(\beta D/2) = \frac{\beta}{k} \quad (4.208)$$

(estados ímpares Eq. 4.211)

A solução da Eq. 4.208 fornece os autovalores de energia para estados de simetria (paridade) **par**. Os estados de simetria ímpar têm seus autovalores determinados pela Eq. 4.211. Para analisar as expressões acima, toma-se por variável independente  $\xi = kL$ .

Como:

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \quad (4.209)$$

e

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (4.210)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}} = \sqrt{k_0^2 - k^2} = k \sqrt{\frac{k_0^2}{k^2} - 1} \quad (4.211)$$

$$\xi_0 = k_0 L \quad (4.212)$$

Implica que:

$$\frac{\beta}{k} = \sqrt{\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1} \quad (4.213)$$

Além disso,

$$\frac{\beta D}{2} = (\beta L) \frac{D}{2L} = (kL) \sqrt{\frac{k_0^2}{k^2} - 1} \left(\frac{D}{2L}\right) = \xi \sqrt{\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1} \left(\frac{D}{2L}\right) = \left(\frac{D}{2L}\right) (\xi_0^2 - \xi^2)^{1/2} \quad (4.214)$$

Com esses resultados, a equação de autovalores para os estados **ímpares** é dada por:

$$-\cot g(kL) \operatorname{tgh}(\beta D/2) = \frac{\beta}{k} \Rightarrow -\cot g(\xi) \operatorname{tgh}\left(\left(\frac{D}{2L}\right) \xi \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2}\right) = \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2} \quad (4.215)$$

$$\therefore -\cot g(\xi) \operatorname{tgh}\left(\left(\frac{D}{2L}\right)(\xi_0^2 - \xi^2)^{1/2}\right) = \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2}$$

Analogamente, a equação de autovalores para os estados **pares** é dada por:

$$-\cot g(kL) \operatorname{cotgh}(\beta D/2) = \frac{\beta}{k} \Rightarrow -\cot g(\xi) \operatorname{cotgh}\left(\left(\frac{D}{2L}\right)\xi \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2}\right) = \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2} \quad (4.216)$$

$$\therefore -\cot g(\xi) \operatorname{cotgh}\left(\left(\frac{D}{2L}\right)(\xi_0^2 - \xi^2)^{1/2}\right) = \left(\frac{\xi_0^2}{\xi^2} - 1\right)^{1/2}$$

As energias podem ser obtidas de:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V_0 \frac{\hbar^2 k^2}{2mV_0} = V_0 \frac{k^2}{k_0^2} = V_0 \frac{\xi_n^2}{\xi_0^2} \quad (4.217)$$

onde  $\xi_n^2$  é a  $n$ ésima solução das equações de autovalores.

$$E_n = V_0 \left(\frac{\xi_n}{\xi_0}\right)^2 \quad (4.218)$$

## **CAPÍTULO 4. A TEORIA DE AUSUBEL DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

O presente capítulo tem por finalidade apresentar uma visão geral da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, adotada no presente trabalho de pesquisa e relatada através da presente dissertação, e começa contando um pouco sobre o autor dessa importante teoria de aprendizagem.

### **4.1 David Ausubel e a sua Teoria da Aprendizagem**

David Paul Ausubel (1918-2008) nasceu em Nova York, filho de imigrantes judeus. Tem-se a suspeita de que seu interesse pela forma como ocorre a aprendizagem é resultado do sofrimento que passou durante sua infância nas escolas norte-americanas. Acredita-se que esta tenha sido a razão de, apesar de sua formação em medicina psiquiátrica, Ausubel ter dedicado parte de sua vida à psicologia educacional. Sua teoria foi apresentada em 1963, através da sua obra: “Psicologia Educacional”, numa época em que as ideias behavioristas predominavam. Apenas para contextualizar o cenário de desenvolvimento da teoria de Ausubel, o behaviorismo, do inglês *behavior*, que traduzido significa comportamento, consiste em uma teoria que propõe o comportamento como objeto de estudo da psicologia. Segundo John B. Watson, considerado um dos fundadores do behaviorismo, o objetivo teórico da psicologia é a previsão e o controle do comportamento (WATSON, 1913, p.158).

Segundo Moreira (1999, p. 14), a tônica do behaviorismo está nos comportamentos observáveis do sujeito, i.e., nas respostas que esse sujeito dá aos estímulos externos, assim como naquilo que acontece após a emissão de respostas, ou seja, na consequência. Ainda segundo esta teoria, um requisito fundamental é que qualquer estímulo externo seja o sinal de um reflexo condicionado e se sobreponha à ação de um estímulo absoluto (LA ROSA, 2003, p. 45).

Importante lembrar que Skinner é o principal representante do behaviorismo, pois foi ele “quem levou até as últimas consequências os princípios empiristas no estudo da aprendizagem. Para esta corrente, o ser humano se resume às contingências observáveis.” Ela trabalha principalmente com a ideia de extinção operante, estímulos, reforços (LA ROSA, 2003, P.57). Os behavioristas acreditavam que, manipulando-se os eventos posteriores, se pode, em princípio, controlá-los.

Seguindo essa linha, acreditava-se que grande parte da ação docente consistia em apresentar estímulos e, sobretudo, reforços positivos, (consequências boas para os alunos) na quantidade e momentos corretos, a fim de aumentar ou diminuir a frequência de certos comportamentos dos alunos, assim, as aprendizagens dos alunos eram expressas em termos de comportamentos observáveis.

Contrariamente ao behaviorismo, a filosofia cognitivista enfatiza exatamente aquilo que é ignorado pela visão behaviorista: a cognição, o ato de conhecer, como o ser humano conhece o mundo. A filosofia cognitivista trata dos processos mentais, da atribuição de significados, da compreensão, transformação armazenamento e uso das informações envolvidas no processo de cognição (Moreira, 1999, p.14).

Ausubel foi um cognitivista e, portanto, a sua teoria prioriza a aprendizagem cognitiva, considerando o processo de aprendizagem como um processo de integração, onde o conteúdo aprendido se integra a uma estrutura mental pré-existente, organizada e ordenada chamada estrutura cognitiva.

Se a estrutura cognitiva for clara, estável e bem organizada, surgem significados precisos e inequívocos e estes têm tendência a reter a força de dissociabilidade ou disponibilidade. Se, por outro lado, a estrutura cognitiva for instável, ambígua desorganizada ou organizada de modo caótico, tem tendência a inibir a aprendizagem significativa e a retenção. Assim, é através do fortalecimento de aspectos relevantes da estrutura cognitiva que se pode facilitar a nova aprendizagem e retenção. (AUSUBEL, 2000, p.26).

Segundo Moreira (1999, p.14), “a filosofia cognitivista enfatiza exatamente aquilo que é ignorado pela visão behaviorista: a cognição, o ato de conhecer, como o ser humano conhece o mundo”.

A filosofia cognitivista trata, então, principalmente dos processos mentais; se ocupando da atribuição de significados, da compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição. Na medida em que se admite, nesta perspectiva que a cognição se dá por construção chega-se ao construtivismo (MOREIRA, 1999, p.15).

Ausubel (1980) considera a estrutura cognitiva de cada indivíduo como sendo organizada e hierarquizada, no sentido que várias ideias se encadeiam de acordo com a relação que se estabelece entre elas, e esta linha de raciocínio faz parte da teoria da Aprendizagem Significativa, uma vez que, segundo essa teoria, a aprendizagem ocorre quando uma nova informação relaciona-se com algum aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo.

## 4.2 A Aprendizagem significativa

A essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e não substantiva (não literal) (AUSUBEL, NOVAK e HANESIAN, 1980 p.34).

Segundo Ausubel, o conhecimento pré-existente na estrutura cognitiva do aprendiz exerce uma forte influência no processo de aprendizagem, onde as novas informações serão assimiladas e armazenadas, de acordo com a estrutura cognitiva do aprendiz. E é esse conhecimento pré-existente, ou conhecimento prévio, o fator que exerce a função determinante no processo de aprendizagem. Segundo Moreira (1999),

(...) aprendizagem com significado, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento adquirido a novas situações; resulta da interação cognitiva não-arbitrária e não-literaI entre conhecimentos prévios e novos conhecimentos; depende fundamentalmente de conhecimentos prévios que permitam ao aprendiz captar significados (em uma perspectiva interacionista, dialética, progressiva) dos novos conhecimentos e, também, de sua intencionalidade para essa captação. (MOREIRA, 1999).

A aprendizagem significativa é o conceito central da teoria de David Ausubel, para quem a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, ou simplesmente subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistente na estrutura cognitiva do indivíduo, por subordinação<sup>5</sup>. Segundo Ausubel (1980)

A aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia correspondente para assim proceder (AUSUBEL, 1980. p.23).

A teoria de Ausubel visualiza o cérebro humano como sendo organizado,

---

<sup>5</sup> [http://www.robertexto.com/archivo3/a\\_teorias\\_ausubel.htm](http://www.robertexto.com/archivo3/a_teorias_ausubel.htm) Acesso em: 11/04/2018.

formando uma hierarquia conceitual, na qual os elementos mais específicos de conhecimento são ligados e assimilados a conceitos mais gerais, mais inclusivos, formando assim aquilo que é conhecido como estrutura cognitiva. Ausubel define a *estrutura cognitiva como uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo*. Ainda de acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1980):

Estrutura cognitiva é: o conteúdo total e organização das ideias de um dado indivíduo ou, no contexto dos assuntos, conteúdo e organização de suas ideias naquela área particular de conhecimentos (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN; 1980; p.524).

É no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o sujeito. Para Ausubel (1963, p. 58), a aprendizagem significativa é o mecanismo humano, por excelência, para adquirir e armazenar a vasta quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo de conhecimento.

A teoria de Ausubel se caracteriza pela não arbitrariedade, na medida em que o material potencialmente significativo se relaciona de maneira não literal e não arbitrária com o conhecimento pré-existente na estrutura cognitiva do aprendiz. Ou seja, o relacionamento não se dá com qualquer aspecto da estrutura cognitiva do aprendiz, mas, sim, com conhecimentos especificamente relevantes, os quais Ausubel denomina de subsunçores. Sendo assim, o Conhecimento Prévio serve de matriz ideacional e organizacional para a compreensão e fixação de novos conhecimentos especificamente relevantes, que são os subsunçores, já pré-existent na estrutura cognitiva. O novo conhecimento somente pode ser aprendido significativamente quando ideias, conceitos e proposições, especificamente relevantes, estejam presentes e claros na estrutura cognitiva do sujeito, de maneira que possam funcionar como ponte para ancorar o novo conhecimento.

Um importante aspecto a ser considerado na teoria de Ausubel, são os chamados Organizadores Prévios, que são materiais introdutórios que devem ser apresentados antes do material de aprendizagem em si, e servirão de pontes cognitivas entre novos conhecimentos e aqueles já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

Segundo a teoria de Ausubel, é importante usar os chamados organizadores prévios como uma possível estratégia capaz de promover a aprendizagem significativa de um determinado conteúdo.

Um organizador prévio é um mecanismo pedagógico que ajuda a implementar estes princípios, estabelecendo uma ligação entre aquilo que o aprendiz já sabe e aquilo que precisa saber, caso necessite aprender novos materiais de forma mais ativa e expedita. A situação mais imediata que faz com que um organizador prévio seja desejável e potencialmente eficaz no estabelecimento desta ligação é que, na maioria dos contextos de aprendizagem significativa, as ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva são demasiadas gerais e não possuem uma particularidade de relevância e de conteúdos suficientes para servirem como ideias ancoradas eficientes relativamente às novas ideias introduzidas pelo material de instrução em questão. O organizador resolve esta dificuldade desempenhando um papel de mediador, i.e., sendo mais relacional e relevante para o conteúdo particular da tarefa de aprendizagem específica por um lado, e para o conteúdo mais geral das ideias potencialmente ancoradas por outro. Também facilita a aprendizagem através da alteração destas ideias, no sentido do conteúdo particular da matéria de aprendizagem. (AUSUBEL, 2000, p.27).

Conforme o próprio Ausubel, o organizador prévio serve de ligação entre o que o aprendiz já sabe e o que precisa saber para aprender o novo material de ensino.

O uso de organizadores prévios é uma estratégia proposta por Ausubel para, deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva, a fim de facilitar a aprendizagem significativa. Organizadores prévios são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido em si. (MOREIRA, 1999, p. 155)

Seguindo-se a linha proposta por Ausubel, o presente trabalho adota a aplicação de organizadores prévios como recursos instrucionais capazes de servir de pontes cognitivas e assim o que se pretende nesse trabalho é promover o ensino de conceitos de mecânica quântica, partindo de conhecimentos pré-existentes, ou conhecimentos prévios, os quais conforme dito anteriormente constituem a matriz ideacional para o conteúdo a ser ensinado. Segundo Ausubel, o conhecimento prévio representa uma matriz ideacional, e este serve de pontes cognitivas para se alcançar a aprendizagem de novos conceitos e proposições. No caso específico, o que se pretende é ensinar conceitos e proposições da mecânica quântica que estão presentes no fenômeno do tunelamento, partindo-se de conhecimentos prévios presentes na estrutura cognitiva do aluno. Quais são então esses conhecimentos prévios que foram utilizados na presente pesquisa? São os conteúdos de ondulatória

da física clássica como ondas e seus elementos constituintes e fenômenos clássicos como a reflexão interna total frustrada.

Esses conhecimentos pré-existentes na estrutura cognitiva dos alunos podem eventualmente ser pobres de sentido e significado e pouco estimulantes, geralmente construídos em sala de aula a partir de abordagens tradicionais, comumente com quadro, giz e expressões matemáticas representativas de leis físicas, conhecimentos esses representados sob a forma de “fórmulas”, memorizadas pelos alunos para fazer avaliações e que depois são simplesmente esquecidas, porque não são relacionadas à estrutura cognitiva do aprendiz através de sua experiência cotidiana. Nesse tipo de ensino, se memoriza tudo, mas não se aprende quase nada, pois o que se aprende não é relacionável com as experiências cotidianas, seus eventos e fenômenos devem ser memorizados. O aluno memoriza tudo: fórmulas, enunciados e leis, com o único intuito de responder às questões presentes nas avaliações das disciplinas escolares, esquecendo quase tudo ao término de cada processo de avaliação. Esta forma de aprendizagem é denominada por Ausubel de “memorística”, e é vista como uma aprendizagem com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes presentes na estrutura cognitiva do aprendiz, tudo isto divorciado da teoria da Aprendizagem Significativa, que preconiza que o fator mais importante a influenciar a aprendizagem, segundo Ausubel, é aquilo que o aluno já sabe: “[...] o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe; descubra isso e ensine-o de acordo.” (AUSUBEL, 1968, p.78).

São ainda condições essenciais para a aprendizagem significativa: a disposição do aluno para aprender de maneira significativa, e que o material didático desenvolvido seja significativo para o aluno.

Esse trabalho baseia-se na aplicação dos Organizadores prévios e, segundo Moreira, Organizadores prévios são propostos como um recurso instrucional potencialmente facilitador da aprendizagem significativa, no sentido de servirem de pontes cognitivas entre novos conhecimentos e aqueles já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz.

### **4.3 A Teoria de Ausubel e a experiência em sala de aula**

Ao longo desses anos de experiência, como professor em sala de aula, pude perceber que muitas vezes os alunos não compreendem conceitos elementares pertencentes ao campo da física. Muitas são as dificuldades e geralmente esses alunos manifestam quase que exclusivamente a preocupação em memorizar “fórmulas” como se essa fosse uma proposta válida para auxiliar a aprendizagem de conteúdos de física.

Além disso, o pior é que além dos próprios alunos, muitos professores adotam esta tática de decorar “fórmulas” mediante a memorização de expressões, chavões, “musiquinhas”, desenhos de triângulos etc. Quem já não ouviu a história do “sorvetinho”, e do “sorvetão”, expressões utilizadas que fazem referência às equações do espaço do Movimento Uniforme (UM) e do Movimento Uniformemente Variado (MUV), propagada em sala de aula com o objetivo que os alunos memorizem as equações e assim resolvam mecanicamente questões de cinemática. Tais exemplos expressam claramente aquilo que Ausubel define como aprendizagem memorística, onde o aluno memoriza conceitos ou fórmulas, uma aprendizagem sem significado, e que não contribui para a compreensão significativa do conteúdo que está sendo estudado, consistindo em algo que é facilmente esquecido.

Para a teoria da aprendizagem de Ausubel, os conceitos se constituem em um aspecto importante na teoria da assimilação, presentes com destaque na sua teoria da aprendizagem:

Os conceitos consistem nas abstrações dos atributos essenciais que são comuns a uma determinada categoria de objetos, eventos ou fenômenos, independentemente da diversidade de dimensões outras que não aquelas que caracterizam os atributos essenciais compartilhados por todos os membros da categoria (AUSUBEL, Psicologia Educacional, 1963).

Também da minha experiência em sala de aula, pude constatar ao longo desses anos no ensino de física, que muitas vezes os alunos confundem significados de objetos e fenômenos, os quais estão relacionados com aquilo que se pretende ensinar, e tal dificuldade impede completamente que esses alunos compreendam o conteúdo, o fenômeno físico, que está sendo ensinado.

Muitas vezes o professor de física expõe sua aula, e utiliza-se de expressões como “eixo vertical”, “eixo horizontal”, “retas paralelas” e “retas perpendiculares”, “Normal” ao plano, dentre muitas outras expressões. Recentemente, pude observar que, apesar de descrever com exemplos para os alunos da primeira série do segundo grau, os alunos têm dificuldade em distinguir conceitos como, por exemplo, velocidade de aceleração, embora memorizem que velocidade corresponda a “delta “s” dividido por delta “t””, e aceleração corresponda a “delta “v” dividido por delta “t””. Por outro lado, tive a oportunidade de verificar diversas vezes, que não só os alunos fixam a sua atenção na memorização de “fórmulas” e “expressões chavões”, mas os próprios professores de física, geralmente adotam esta prática, quando passam para os alunos extensas listas de exercícios cuja única e exclusiva utilidade é a aplicação de “fórmulas” repetidas vezes, cujo efeito prático torna-se unicamente o desenvolvimento de realizar operações matemáticas repetidas vezes, aplicando-se várias “fórmulas” as quais não conduzem à compreensão do fenômeno que se pretende estudar, muito menos levam à interpretação dos conceitos fundamentais, como ocorrem os fenômenos, quais as teorias envolvidas nos fenômenos, dentre outras coisas.

Para completar o desastre, as atividades avaliativas seguem a linha geral de questões cujas respostas resultam de aplicação direta de fórmulas sem significado lógico para os alunos, que as decoram e têm como solução tão somente substituir letras por números e proceder cálculos elementares, ainda assim, ou talvez exatamente por isso, os alunos se saem tão mal nesta disciplina, e o que é pior: a grande maioria a detesta.

Talvez por haver tanta preocupação por parte dos alunos em memorizar, é possível que se dificulte a aprendizagem da física, pois a mesma por definição se baseia em conceitos e leis. É exatamente por fundamentar-se na utilização de conceitos, os quais devem ser claros e precisos que a teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel pode se tornar útil para ser aplicada no ensino da física.

Segundo Moreira (2000), para que ocorra a aprendizagem significativa é preciso que algumas etapas sejam cumpridas:

- 1- Identificar a estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino, Isto é, identificar os conceitos unificadores, inclusivos, com maior poder explanatório e propriedades integradoras, e organizá-las hierarquicamente, e organizá-los hierarquicamente de modo que,

progressivamente, abranjam os menos inclusivos até os mais inclusivos até chegar aos exemplos e dados específicos.

2- Identificar quais os conceitos subsunçores (conceitos, proposições, ideias claras, precisas, estáveis) relevantes à aprendizagem do conteúdo a ser ensinado, que o aluno deveria ter em sua estrutura cognitiva para poder aprender significativamente o conteúdo a ser ensinado.

3- Diagnosticar aquilo que o aluno já sabe e determinar, dentre os subsunçores especificamente relevantes (previamente identificados ao “mapear” e organizar a matéria de ensino), quais os que estão disponíveis na estrutura cognitiva do aluno.

4- Ensinar recursos e princípios que facilitem a aquisição da estrutura conceitual da matéria de ensino de uma maneira significativa. A tarefa do professor é auxiliar o aluno a assimilar a estrutura da matéria de ensino e organizar sua própria estrutura cognitiva nessa área de conhecimentos, por meio da aquisição de significados claros, estáveis e transferíveis. É óbvio que, para isso, deve levar em conta não só a estrutura conceitual da matéria de ensino, mas também a estrutura cognitiva do aluno no início da instrução e tomar providências adequadas (por exemplo, usando organizadores, ou “instrução-remédio”), se a mesma não for adequada. (MOREIRA, 2000, p. 162).

O processo instrucional segundo uma abordagem ausubeliana, que pretende que o aluno aprenda significativamente, se caracteriza por levar em consideração aquilo que o aluno já sabe antes do novo material de ensino a ser ensinado.

... O fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe; descubra isso, e ensine-o de acordo. (AUSUBEL, 1968, 1978, 1980, 2000).

Partindo-se dessas premissas, para se ensinar significativamente conteúdos de mecânica quântica presentes no tunelamento quântico, faz-se necessário delimitar o conteúdo a ser ensinado, e a partir daí identificar conceitos e leis relacionados à este fenômeno. Por sua vez, como este envolve um elevado grau de complexidade, a proposta consiste em promover a aprendizagem significativa de conceitos de mecânica quântica à partir do fenômeno do tunelamento quântico, respeitando-se o grau de maturidade intelectual de alunos do ensino médio, o que implica que abre-se mão do formalismo físico matemático e direciona-se a construção de uma aprendizagem conceitual, o que é consistente com a teoria de Ausubel.

#### **4.4 Os Conceitos e Proposições Gerais da Mecânica Quântica e o Efeito Túnel**

Para se ensinar o efeito túnel é conveniente que sejam ensinados alguns dos conceitos de física ondulatória. Não custa repetir que este ponto central foi o principal mérito do trabalho do físico francês Louis de Broglie, através da equação de Einstein e de Broglie que relaciona a natureza ondulatória e corpuscular da matéria:  $\lambda = h/p$ , onde  $\lambda$  corresponde ao comprimento da onda,  $h$  é a constante de Planck, e  $p$  representa o momento linear da partícula.

Tudo ocorreu a partir de quando Albert Einstein propôs a existência da natureza corpuscular da radiação para explicar o efeito fotoelétrico, Louis de Broglie, em contrapartida propôs em sua tese de doutorado a natureza ondulatória da matéria. Ensinar efeito túnel, portanto, passa pela compreensão da natureza corpuscular da radiação e da natureza ondulatória da matéria.

A estratégia adotada para o ensino da física envolvida no efeito túnel consiste em ensiná-lo a partir de conceitos mais gerais e inclusivos, até se chegar aos conhecimentos mais específicos e diferenciados, delimitando-se conceitos e proposições relacionados com este fenômeno. O processo de aprendizagem significativa que se pretende alcançar está proposto em três etapas distintas, ficando assim dividido:

- a) Primeira etapa: O processo de aprendizagem significativa tem início com a aprendizagem de ondas mecânica numa corda, onde se apresenta os fenômenos mais gerais de ondulatória, tais como propagação, amplitude, frequência, comprimento de onda. Em seguida, utilizando-se de meios elásticos com diferentes densidades apresenta-se e discute-se, em um vídeo preparado pelo autor, os conceitos como: amplitude, frequência, comprimento de onda, propagação, reflexão e refração.
  
- b) Segunda etapa: Os fenômenos de ondulatória, agora já de domínio do aprendiz, são apresentados em um nível de complexidade maior, através do estudo de propagação, reflexão e refração da luz, portanto de ondas luminosas, através de um experimento com prismas e uma fonte de luz a laser. No referido experimento, os alunos irão aprender o fenômeno da

reflexão total frustrada, o qual serve como boa aproximação para ensinar-se o efeito túnel.

- c) Na terceira etapa, é ensinado o efeito túnel propriamente dito, representando a culminância da sequência de ensino do fenômeno alvo. Como estratégia será utilizado o aplicativo “Efeito Túnel da PhET Simulation”, o qual reproduz os principais fundamentos do efeito túnel. Nesta etapa se espera que o aluno já possua domínio de conceitos e proposições relacionados ao efeito túnel (conceitos subsunçores), de maneira que ao se deparar com a sua dinâmica seja capaz de compreendê-lo mesmo que limitados por seu pouco domínio de conceitos mais complexos de física e matemática.

A programação dessas atividades tem por objetivo propiciar a aprendizagem significativa do efeito túnel. Para tanto, a aprendizagem dos conceitos e proposições ocorrem numa sequência crescente de complexidade. Deve ser destacado que uma preocupação central dessas etapas é que o material de ensino seja relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz; portanto, um material potencialmente significativo. Aqui, deve-se também ter em mente outro ponto da teoria de Ausubel: que o aprendiz tenha disponível em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados. Os organizadores prévios cumprem a função de garantir ou, pelo menos, propiciar a existência desses conceitos-âncora.

E quais são então os subsunçores necessários para a aprendizagem significativa de tunelamento quântico, a partir de Ausubel?

A resposta passa pela aprendizagem clara e precisa de conceitos envolvidos no efeito túnel. Conforme citado anteriormente, esta é uma etapa de grande importância, segundo Ausubel, e consiste na identificação da estrutura conceitual e proposicional da matéria de ensino.

Neste sentido, a compreensão ainda que tão somente conceitual é necessária para o ensino desse conteúdo. Destaca-se ainda que o efeito túnel como um conteúdo da física que envolve três princípios pertencentes à mecânica quântica e relacionados diretamente com o efeito túnel, a saber:

- a) O princípio da Incerteza, o qual consiste num importante enunciado da

mecânica quântica, formulado em 1927 por Werner Heisenberg, o qual prevê restrições à precisão com que se podem efetuar *medidas simultâneas* numa classe de pares observáveis.

- b) O Princípio da Complementaridade de Niels Bohr, formulado em 1928, o qual assegura que a natureza da matéria e radiação é dual e os aspectos ondulatório e corpuscular não são contraditórios, mas complementares.
- c) A probabilidade, em resumo, tem a função de mostrar a chance de ocorrência de um determinado evento. Esta, em conformidade com o princípio da complementaridade e o princípio da incerteza pode nos dizer quais as chances de uma determinada partícula tunelar através de uma barreira de potencial.

Outro ponto da maior importância, e de acordo com a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel - e que deve ser tratada - vem a ser identificar os conceitos fundamentais e indispensáveis à aprendizagem significativa do fenômeno do efeito túnel, ou melhor, identificados como conceitos subsunçores.

Destacamos a seguir aqueles conceitos e proposições considerados necessários à aprendizagem significativa do efeito túnel:

- a) Onda;
- b) Partícula;
- c) Probabilidade;
- d) Amplitude;
- e) Frequência;
- f) Comprimento de onda;
- g) Propagação;
- h) Reflexão;
- i) Refração;
- j) Reflexão total frustrada;
- k) Dualidade onda partícula;
- l) Pacote de onda;
- m) Tunelamento.

Após a identificação de conceitos e proposições pertinentes e necessários a aprendizagem significativa do efeito túnel, se faz necessário diagnosticar aquilo que o aluno já sabe. Um trabalho de pesquisa realizado pelo professor.

Segundo a teoria de Ausubel, uma estratégia possível para auxiliar a nova aprendizagem é o uso de organizadores prévios, de maneira a manipular a estrutura cognitiva do aprendiz, a fim de facilitar a aprendizagem significativa. Organizadores prévios, os quais são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido/apreendido, servem de âncora para a nova aprendizagem e levam ao desenvolvimento de conceitos subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente. Textos introdutórios cuidadosamente elaborados, ilustrações e animações podem ser utilizados com esta finalidade. Ainda segundo Ausubel:

Organizadores prévios são propostos como recursos instrucionais potencialmente facilitadores da aprendizagem significativa, no sentido de servirem de pontes cognitivas entre os novos conhecimentos e aqueles já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz (AUTOR, DATA, p.??-??).

Destaque-se, no entanto, que organizadores prévios não são simples comparações introdutórias, pois, diferentemente destas, organizadores, devem segundo Moreira (2012):

- 1 - identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e explicar a relevância desse conteúdo para a aprendizagem do novo material;
- 2 - dar uma visão geral do material em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes;
- 3 - prover elementos organizacionais inclusivos que levem em consideração, mais eficientemente, e ponham em melhor destaque o conteúdo específico do novo material, ou seja, prover um contexto ideacional que possa ser usado para assimilar significativamente novos conhecimentos.

O organizador prévio tem por objetivo propiciar uma interação entre conceitos novos que se deseja introduzir, e os já existentes na estrutura cognitiva dos alunos, buscando, dessa forma, uma aprendizagem significativa. É neste sentido que os experimentos com ondas que se propagam em cordas, e seus respectivos textos auxiliares servirão de organizadores prévios, já que os conceitos aí expostos, aprendidos significativamente serão transferidos para a aprendizagem significativa do efeito túnel.

E afinal, quais seriam os principais conceitos da mecânica quântica que devem ser ensinados aos alunos para que esses tenham condição de compreender o fenômeno do efeito túnel?

A primeira noção que se destaca, é que geralmente o aluno possui um conjunto de concepções sobre a matéria, muitas delas presentes nos livros didáticos tanto de física quanto de química, uma dessas concepções é a de que a matéria ocupa lugar no espaço e possui massa: “matéria é tudo aquilo que ocupa espaço e possui massa...” (PENROSE, 1991). Outra concepção da física ensinada no ensino fundamental e médio é a de que todos os corpos são constituídos de matéria: “matéria é um termo geral para a substância da qual os objetos físicos são constituídos” (McGraw-Hill's Access Science: Encyclopedia of Science and Technology). E para finalizar aquilo que resumidamente os alunos aprendem sobre a matéria vem o estudo do átomo, começando pela história dos sábios da antiga Grécia, os quais acreditavam que o átomo seria a menor parte da matéria e que conservava as suas propriedades e que era indivisível, daí a palavra átomo, que vem do grego e significa indivisível, porém, no final do século XIX e início do século XX surgiram novas concepções construindo um modelo de átomo, e que não é objetivo nosso discuti-lo aqui, apenas lembrando que aqui se remete a concepção de que os mesmos são constituídos de partículas, pontuais, localizadas, que descrevem trajetórias bem definidas, e que segundo a teoria clássica, dadas as condições iniciais é possível prever a sua posição a cada instante, em resumo, tentamos aqui expor que existe uma concepção de que tudo é constituído de matéria, e finalmente tudo é constituído de partículas.

Outro conceito pertencente à física clássica é o conceito de onda, como algo que se possui velocidade, transporta energia, é espalhada no espaço e manifesta alguns fenômenos exclusivos das ondas como refração e difração. Geralmente, se ensina o conceito de partícula como algo localizado, pontual, enquanto as ondas como algo espalhado em todo o espaço. Não se faz uma associação de que onda é matéria, mas que onda é energia.

Portanto, o que se pode ressaltar é a clara distinção ontológica entre os conceitos de partícula e onda, e segundo a abordagem da física clássica como objetos físicos distintos e inconciliáveis, e com atributos claros e diferenciados.

A aplicação da teoria de Ausubel para abordar o efeito túnel no ensino médio concentra-se na formação e manipulação dos conceitos presentes na teoria quântica.

Por tudo isso que foi exposto nos parágrafos anteriores, a aprendizagem significativa de Ausubel parece adequada para que um conteúdo de tal complexidade, como é o tunelamento quântico ou efeito túnel, seja ensinado em sala de aula, uma vez que a mesma prioriza os conhecimentos prévios dos alunos, dando ênfase aos significados que estão envolvidos no conteúdo a ser ensinado.

Como citado anteriormente, devemos desenvolver o processo da aprendizagem significativa, partindo do uso de organizadores prévios como recurso instrucional, de maneira que, ao final da instrução, o aluno consiga realizar esta interação cognitiva de conceitos de ondas e partículas, e seja capaz de perceber que a partícula ao atravessar uma barreira de potencial – classicamente intransponível – está se comportando como uma onda e não como uma partícula clássica.

Ao se estudar conceitos básicos de partículas, em seguida de ondas mecânicas e luminosas, espera-se que o aluno esteja preparado para aprender significativamente o efeito túnel. Metodologicamente, essa assertiva baseia-se em Moreira (2012):

Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos, ideias ou proposições relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcione, dessa forma, como “ancoradouro” para novas ideias, conceitos ou proposições. [...] a essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe, ou seja, algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante para a aprendizagem dessas ideias. Este aspecto especificamente relevante para a aprendizagem pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito, uma proposição, já significativos. (MOREIRA, 2012).

#### **4.5 Tipos de Aprendizagem Significativa**

A teoria de Ausubel prevê a existência de três tipos de aprendizagem significativa: a aprendizagem representacional, a aprendizagem de conceitos e a aprendizagem proposicional. O que se pretende através da aplicação dos organizadores prévios, implicados na sequência didática, é promover a aprendizagem significativa dos conceitos e proposições da mecânica quântica relacionados com o efeito túnel.

a) **A aprendizagem representacional** consiste basicamente numa

associação simbólica primária; neste tipo de aprendizagem significados são atribuídos a símbolos tais como: sons vocais a caracteres linguísticos.

Segundo Ausubel:

(...) aprendizagem *representacional* (tal como a atribuição de um nome) aproxima-se da aprendizagem por memorização. Ocorre sempre que o significado dos símbolos arbitrários se equipara aos referentes (objetos, acontecimentos, conceitos) e tem para o aprendiz o significado, seja ele qual for, que os referentes possuem. A aprendizagem representacional é significativa, porque tais proposições de equivalência representacional podem relacionar-se de forma não arbitrária, como exemplares, a uma generalização existente na estrutura cognitiva de quase todas as pessoas, quase desde o primeiro ano de vida – de que tudo tem um nome e que este significa aquilo que o próprio referente significa para determinado aprendiz.” (AUSUBEL, Aquisição e Retenção de Conhecimentos: uma Perspectiva Cognitiva, 2002)

- b) **A aprendizagem de conceitos** é de certa forma uma extensão da aprendizagem representacional, mas num nível mais abrangente e abstrato, como o significado de uma palavra por exemplo. A necessidade da aprendizagem de conceitos claros e precisos em física e em nosso caso torna-se evidente quando desejamos que o aluno perceba que um objeto corpuscular, ou seja, uma partícula, ao transpor barreiras de potencial, cuja energia não seja suficiente para transpô-la, e quanto esta partícula a transpõe está exibindo uma natureza ondulatória, ou seja, a mesma se comporta como uma onda, e não como partícula, expõe a necessidade do aprendiz adquirir a aprendizagem significativa dos conceitos de onda e do conceito de partícula de forma clara e precisa.
- c) **A aprendizagem proposicional** tem por objetivo promover a aprendizagem de ideias em forma de proposição. De um modo geral as palavras combinadas para promover uma sentença para constituir uma proposição representam conceitos. A tarefa não é aprender o significado dos conceitos (embora seja pré-requisito), e sim o sentido/significado das ideias expressas verbalmente por meio de conceitos sob a forma de uma proposição, ou seja, a tarefa é apreender o sentido do que está além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõem a proposição.

O ensino do efeito túnel envolve necessariamente leis e teorias da física que podem ser expressas sob a forma de proposições. Da mesma forma que para se

ensinar o efeito túnel é necessário o levantamento de todos os conceitos relevantes à aprendizagem deste fenômeno, também se faz necessária a identificação clara e precisa das proposições relacionadas, inserindo-as no material de ensino. Ideias postas sob a forma de proposição, como por exemplo, a noção de probabilidade, o princípio da complementaridade e o princípio da incerteza, necessários para propiciar a aprendizagem significativa do efeito túnel.

#### **4.6 Processos da Aprendizagem Significativa**

Outro ponto importante a ser discutido na aprendizagem significativa diz respeito a como a nova informação se relaciona com os subsunçores existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Três são as categorias assim enumeradas: Aprendizagem Significativa Subordinada, Superordenada e Combinatória (MOREIRA, 2012).

- a) **Aprendizagem subordinada:** ocorre quando a nova informação adquire significado através da interação com subsunçores; reflete uma relação de subordinação do novo material em relação à estrutura cognitiva preexistente. Um ponto importante a ser destacado é que quando a informação nova é assimilada pelo subsunçor, esta passa a alterá-lo.
- b) **Aprendizagem superordenada:** Toda vez que uma nova informação é mais ampla ou abrangente para ser assimilada por qualquer subsunçor existente na estrutura cognitiva, esta passa então a assimilá-los. As ideias pré-existentes são identificadas como instâncias mais específicas de uma nova ideia superordenada A, definida por um novo conjunto de atributos que abrange as ideias subordinadas.
- c) **Aprendizagem combinatória:** É a aprendizagem tipicamente de proposições, e em menor escala de conceitos que não guardam uma relação de subordinação ou superordenação com proposições ou conceitos específicos. Ocorre quando a nova proposição não pode ser assimilada por outras já estabelecidas na estrutura cognitiva pré-existente, nem é capaz de assimilá-las. É como se a nova informação fosse potencialmente significativa por ser relacionável à estrutura cognitiva como um todo, de uma maneira bem geral, e não com aspectos dessa estrutura, como ocorre na aprendizagem subordinada e mesmo na superordenada.

## 4.7 Os Processos de Diferenciação Progressiva e Reconciliação Integrativa

**A Diferenciação progressiva:** Consiste num princípio da matéria de ensino, segundo o qual as ideias, conceitos e proposições mais gerais e inclusivos do conteúdo devem ser apresentados no início da instrução e, progressivamente, diferenciados em termos de detalhe e especificidade. Assim, parte-se do mais geral e inclusivo para o mais específico e diferenciado.

São exemplos, desta nossa proposta, especificidade:

- Onda: um conceito geral da física, como algo que se propaga no espaço e no tempo, caracterizado por amplitude, período (ou frequência), comprimento de onda (ou vetor de onda).

- Onda mecânica- apresenta as características gerais de uma onda, porém a sua especificidade consiste em se propagar *somente* através de um meio material.

- Onda eletromagnética- repete as características gerais da onda e sua especificidade consiste em sua capacidade de propagar-se *também* no vácuo.

- Onda de matéria, pacote de onda, possui características de onda, porém vai além, e a sua descrição e compreensão está relacionada aos princípios da mecânica quântica.

**A Reconciliação integrativa:** Consiste no princípio segundo o qual a instrução deve também explorar relação entre ideias, apontar similaridades e diferenças importantes e reconciliar discrepâncias reais ou aparentes, onde os conceitos originais atingem associações entre si, interligando-se e expandindo-se. Segundo o próprio Ausubel, o uso de organizadores prévios adequados, representa uma alternativa para promover a reconciliação integrativa de maneira satisfatória.

## 4.8 Resultados esperados

O que se espera da teoria ausubeliana é que a compreensão genuína de um conceito ou proposição implica na apreensão de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis.

A presente dissertação reflete a descrição densa de um trabalho de intervenção pedagógica em aulas de física de uma turma de ensino médio, em uma

unidade escolar da rede pública estadual de ensino do Estado da Bahia, e pretende que os alunos partícipes desse processo instrucional, aqui relatado, apresentem indícios, evidências de Aprendizagem Significativa de conceitos da mecânica quântica que estão presentes no fenômeno do tunelamento quântico.

## **CAPÍTULO 5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

### **5.1 O Efeito Túnel**

A Mecânica Quântica representa uma das áreas mais importantes da Física Moderna e Contemporânea, e o seu sucesso decorre de sua capacidade em produzir explicações satisfatórias para fenômenos físicos, tais como, a radiação de corpo negro, o efeito fotoelétrico, o efeito Compton, dentre outros.

Porém de igual importância, semelhantemente a Teoria da Relatividade, são as rupturas que a mesma provocou no pensamento científico através de conceitos totalmente novos e estranhos em relação à Física Clássica, e tamanha são as mudanças de concepções provocadas por ela, a ponto da mesma estar presente no imaginário das pessoas comuns, as quais manifestam uma crescente curiosidade por esta área, e não são raras as situações nas quais essas pessoas a associam a concepções esotéricas, sem nenhum fundamento científico. Por fim, pode-se atribuir o seu enorme sucesso a sua presença marcante nos avanços tecnológicos, o que se traduz através de inúmeras invenções da eletrônica, microeletrônica, computação, microscópio de tunelamento, dentre outros.

Dada a sua importância, e com o propósito de introduzir um recorte de sua teoria para o ensino médio, através de alguns dos seus conceitos, elegemos o efeito túnel por ser considerado um fenômeno emblemático, que contradiz qualquer possibilidade de explicação através da física clássica, além de sua abrangência, que a sua explicação evidencia de forma clara, pilares da mecânica quântica como o Princípio da Incerteza, o Princípio da Complementaridade, e a natureza eminentemente probabilística da matéria em escalas atômicas ou subatômicas.

### **5.2 Justificativa**

Esta sequência didática foi elaborada tendo em vista a importância de se introduzir uma temática de física mais atual e contextualizada no ensino médio que aborda conteúdos de Física Moderna e Contemporânea (FMC) e visa auxiliar o desenvolvimento de competências e habilidades capazes de permitir a aprendizagem significativa de conceitos e proposições da mecânica quântica, culminando com a aprendizagem do fenômeno quântico conhecido como efeito túnel.

A escolha do tema Efeito Túnel como tema central da presente sequência didática torna-se adequada, na medida em que traz a lume alguns dos mais importantes princípios da mecânica quântica tais como, a noção de probabilidade, o princípio da incerteza e o princípio da complementaridade.

Espera-se que, com a abordagem de uma temática atual e instigante como o efeito túnel, seja possível promover a aprendizagem significativa, além de trabalharmos com um ensino mais rico e estimulante, pois, segundo Terrazan (1990):

Os nossos currículos de física, em termos de segundo grau são muito pobres, e todos muito semelhantes, usualmente a física escolar é “dividida” em temas como Mecânica Newtoniana, Física Térmica, Ondas, óptica e Eletromagnetismo [...]

Assim, os conteúdos que comumente abrigamos como denominação de Física Moderna não atingem nossos estudantes. Menos ainda os desenvolvimentos mais recentes da Física Contemporânea [...]

O que se pode esperar de uma física escolar tão descompassada/defasada no tempo?

Aparelhos e artefatos atuais, bem como fenômenos cotidianos em uma quantidade muito grande, somente são compreendidos se alguns conceitos estabelecidos a partir da virada deste século forem utilizados

A grande concentração de tópicos se dá na física desenvolvida aproximadamente entre 1600 e 1850.” (TERRAZAN, 1990)

Note-se que o autor refere-se ao Século XX, todavia muitas preocupações elencadas continuam pertinentes nos dias atuais, apesar de alguns esforços para a mudança do quadro. Um exemplo claro nessa direção é o advento do Mestrado Profissional em Ensino de Física (MNPEF) que traz consigo além da proposta de aperfeiçoamento profissional dos professores de física que atuam no ensino médio, a inserção de conteúdos de Física Moderna e Contemporânea (FMC) no ensino médio. Nesse contexto, o fenômeno do tunelamento quântico representa um tema rico de possibilidades e envolve muitos conceitos e proposições da mecânica quântica, que, para serem corretamente compreendidos, exigem a utilização de uma teoria da aprendizagem adequada, que dê ênfase à formação e tratamento dos conceitos físicos envolvidos em sua aprendizagem.

Outro aspecto relevante no presente trabalho consiste na compreensão de que a mecânica quântica consiste numa mecânica eminentemente probabilística, ao passo que a mecânica clássica ou newtoniana consiste numa física cartesiana causal, embora preservem ambas o determinismo. Tal diferença faz com que as

duas mecânicas apresentem características distintas e irreconciliáveis, representando aquilo que no campo da epistemologia foi chamado por Gaston Bachelard de obstáculo epistemológico (BACHELARD, 1938, p.21).

O nascimento da física quântica pode ser considerado a partir dos trabalhos pioneiros de Max Planck (1900), e corresponde àquilo que Bachelard designou como **corte epistemológico**, uma vez que as novas concepções daí surgidas não representaram uma continuidade dos conceitos e fundamentos da física clássica, ao invés disso, representam uma revolução, na medida em que as novidades não eram uma continuidade da termodinâmica e eletromagnetismo, e exigiram uma nova abordagem da energia e da matéria representando assim uma ruptura com conceitos bem estabelecidos na física clássica.

Devido a importância dos significados e proposições presentes no recorte da mecânica quântica que desejamos introduzir para uma turma de estudantes do ensino médio, adotamos a opção do referente pedagógico da Aprendizagem Significativa de Ausubel, uma vez que esta linha pedagógica dá uma ênfase especial aos significados e a sua construção durante o processo instrucional, ainda mais, considerando que muitos desses conceitos são totalmente novos para os alunos, e devem ficar claros e precisos e diferenciados, para que se produza uma aprendizagem satisfatória dos fenômenos físicos estudados.

### **5.3 Um recorte do conteúdo da Mecânica Quântica no Ensino Médio**

Quando se cogita a introdução de mecânica quântica no ensino médio uma das dificuldades que se pode vislumbrar é de saber quais conceitos, proposições e conhecimentos prévios são necessários para que possa ocorrer a aprendizagem significativa desta temática?

Igualmente importante: qual recorte se deve fazer da mecânica quântica, de maneira que o aluno do ensino médio possa aprender os conceitos e proposições pertinentes à aprendizagem do tema proposto?

Sabe-se de antemão da impossibilidade de se abordar muitos dos conceitos da mecânica quântica, seja devido à sua complexidade, seja pela limitação do tempo disponível para este projeto, ou ainda, como a temática deve ser abordada de maneira que a mesma possa ser aprendida respeitando-se as limitações de maturidade dos alunos. A possibilidade de se produzir uma aprendizagem

significativa requer inicialmente uma correta delimitação dos conteúdos a serem estudados, baseando-se no sentido do tema central da mecânica quântica, sem os quais a aprendizagem ficaria comprometida. Assim, delimitamos o tema ao estudo do princípio da incerteza, princípio da complementaridade e probabilidade. Essas seriam as fronteiras estabelecidas para o estudo da mecânica quântica, estes seriam os conteúdos necessários para a culminância com a abordagem do tema o Efeito Túnel para o ensino médio.

### 5.3.1 Objetivo Geral

Promover a Aprendizagem Significativa de tópicos de física quântica, dos conceitos e proposições da mecânica quântica relacionadas com o Efeito Túnel, para uma turma de alunos do ensino médio.

### 5.3.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo desta Sequência Didática, cumpre especificar e caracterizar as diversas etapas intermediárias necessárias ao desenvolvimento da proposta didática. Essa tarefa se desdobra nas seguintes atividades (MOREIRA, sd.):

- Levantar os conhecimentos prévios dos alunos, de modo que sejam aplicados organizadores prévios adequados para a aprendizagem significativa.
- Propiciar a diferenciação progressiva dos conceitos relacionados com o tema a ser ensinado.
- Propiciar a reconciliação integradora mediante a utilização dos simuladores, vídeos instrucionais, aulas expositivas e explanações teóricas.
- Promover a avaliação do processo ensino aprendizagem em todas as suas etapas, verificando se ocorreu a aprendizagem significativa.
- Investigar aspectos da Aprendizagem Significativa, capazes de influenciar a aprendizagem do Tunelamento Quântico por alunos do ensino médio;
- Promover a adequação dos conteúdos propostos ao nível de desenvolvimento intelectual.

- Testar a aplicação de material instrucional, tais como vídeos, experimentos, TIC's, textos, que sirvam de ponte entre o que os alunos já sabem e aquilo que eles precisam aprender para se apropriarem dos conteúdos de mecânica quântica relacionados com o recorte proposto.
- Propiciar uma avaliação quantitativa, sobre o processo aprendizagem da temática abordada.

### 5.3.3 Hipóteses

Com base no que se propões com esta Sequência Didática, relaciona-se as seguintes hipóteses:

- a) É possível que o aluno do ensino médio regular, respeitando-se as limitações de maturidade, e de natureza curricular, aprenda significativamente conceitos e proposições da mecânica quântica, que permita compreender o efeito túnel.
- b) É possível obter resultados satisfatórios, através da aplicação das propostas da teoria pedagógica da Aprendizagem significativa, para promover o ensino da temática da mecânica quântica, uma vez que esta possui como uma das suas premissas a construção conceitos e proposições de forma clara e precisa. Isto deve ocorrer uma vez que, alguns dos conceitos da física quântica são claramente distintos e diferenciados da física clássica, e esta teoria da aprendizagem evidencia uma preocupação com a construção de conceitos.
- c) Muitos dos conceitos da mecânica quântica são distintos e dissociáveis da física clássica, o que implica numa ruptura com a física clássica, aquilo que Bachelard denominou de obstáculos epistemológicos.

## 5.4 Referenciais Teóricos

### 5.4.1 Referencial Pedagógico

Esta sequência didática adota o referencial teórico pedagógico da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Esta teoria estabelece que:

(...) aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, ou simplesmente subsunçor, existente na estrutura de cognitiva do indivíduo. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. (MOREIRA, 199, p. 163.).

Para que ocorra a aprendizagem significativa é necessário que ocorra a presença dos conceitos subsunçores na estrutura cognitiva do aprendiz. Caso seja verificada a inexistência desses conceitos subsunçores, Ausubel recomenda que se adote uma estratégia, na perspectiva de construí-los, mediante a adoção dos organizadores prévios:

O uso de organizadores prévios é uma estratégia prevista por Ausubel para, deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva, a fim de facilitar a aprendizagem significativa.

(...). a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa, ou seja, organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como pontes cognitivas. (MOREIRA, 199, p.155).

Esta sequência terá no seu escopo a utilização de organizadores prévios, na medida descrita pela teoria da aprendizagem proposta, em todas as etapas que se fizerem necessárias.

O que se pretende com esta sequência didática, é que o processo instrucional ocorra segundo a abordagem ausubeliana, desde a construção dos conceitos subsunçores, e todos demais processos relacionados com a aprendizagem significativa, entre os quais são destacadas a Diferenciação Progressiva e a Reconciliação Integrativa:

Quando um novo conceito ou proposição é aprendido por subordinação, i.e., por um processo de interação e ancoragem em um conceito subsunçor, este também se modifica. A ocorrência desde processo uma ou mais vezes leva à difenciação progressiva do conceito subsunçor.

Na aprendizagem superordenada (ou na combinatória) idéias estabelecidas na estrutura cognitiva podem, no curso de novas aprendizagens, serem reconhecidas como relacionadas. Assim, novas informações são adquiridas e elementos existentes na estrutura cognitiva podem reorganizar-se e adquirir novos significados. Esta recombinação de elementos previamente existentes na estrutura cognitiva é referida por Ausubel como reconciliação integrativa. (MOREIRA, ano 1999, p.160).

Alem desses dois importantes processos, a sequência proposta traz os princípios da organização sequencial, e a consolidação como processos instrucionais necessários a aprendizagem significativa.

Para permitir uma avaliação externa que atenda aos objetivos do projeto, também serão propostas duas avaliações específicas:

- a) Uma pesquisa inicial do processo, para verificar os conhecimentos dos alunos pertinentes ao tema, a ser realizado na abertura do processo instrucional;
- b) Uma segunda pesquisa, a ser realizada na fase final do processo, para verificar se ocorreu a aprendizagem significativa.

Essas pesquisas servirão para que seja realizada uma avaliação quantitativa da sequência didática, em conformidade com a abordagem ausubeliana.

#### 5.4.2 Referente Epistemológico

O termo epistemologia refere-se ao ramo da filosofia que trata da natureza, etapas e limites do conhecimento humano, e trata essencialmente das relações que se estabelecem entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Refere-se ainda às condições sob as quais este conhecimento científico é produzido, avaliando as suas consistências.

O referencial epistemológico adotado neste trabalho do pensador da ciência Gaston Bachelard, o qual traz através de sua obra: “A formação do espírito científico”, a concepção de que a ciência não se desenvolve através de uma continuidade, e sim por rupturas.

O trabalho de Bachelard faz parte da revolução científica ocorrida a partir do início do século XX, principalmente devido aos nascimentos da teoria quântica e da teoria da relatividade. O seu trabalho acadêmico esteve voltado para a sua compreensão de que a física moderna então nascente rompe com a física anterior, em termos epistemológicos, sendo assim, o novo espírito científico, representa uma descontinuidade, uma ruptura com o senso comum. É esta ruptura que Bachelard identifica como uma das características da ciência moderna. Conforme as palavras do Bachelard (1972):

Várias vezes, nos diferentes trabalhos consagrados ao espírito científico, nós tentamos chamar a atenção dos filósofos para o caráter decididamente específico do pensamento e do trabalho da ciência moderna. Pareceu-nos cada vez mais evidente, no decorrer dos nossos estudos, que o espírito científico contemporâneo não

podia ser colocado em continuidade com o simples bom senso.  
(BACHELARD, 1938).

A obra O "novo espírito científico" traz consigo a marca da ruptura com o senso comum, uma nova ciência que descarta opiniões, o empirismo, o senso comum. A filosofia de Bachelard considera como sendo uma distinção entre a ciência produzida antes do início do século XX, notadamente a partir de 1905, com o surgimento da teoria da relatividade especial de Albert Einstein, assim como o surgimento da física quântica, ambas fazendo parte de uma nova ciência, que não aceita o empirismo e o senso comum, enfim descarta opiniões e considera mais uma formulação teórica consistente, e dá ênfase a uma formulação teórica consistente, a obra de Bachelard portanto, é antes de tudo uma retificação do saber científico.

Gaston Bachelard era um racionalista, e o mesmo distingue os tipos de racionalismo: o racionalismo clássico, e o racionalismo completo.

De acordo com o princípio da incerteza, não é possível simultaneamente, e com precisão arbitrária, conhecer a posição e o momento linear de uma partícula, portanto, a nossa capacidade de conhecer o mundo fica reduzida à metade, e a possibilidade de conhecimento é uma questão de natureza epistemológica, ou questão epistemológica. Os conteúdos da ciência estão descritos em diferentes tradições epistemológicas, entre a física clássica e a física contemporânea (relativística e quântica). Nas palavras de Bachelard (1977):

No fim do século passado, acreditava-se no caráter empiricamente unificado do nosso conhecimento do real [...] Eis, porém que a física contemporânea nos traz mensagens de um mundo desconhecido [...] No mundo desconhecido, o que é o átomo? Acaso haveria uma espécie de fusão entre o ato e o ser, entre a onda e o corpúsculo? [...] Acaso não se tratará de uma cooperação mais profunda do objeto e do movimento, de uma energia complexa em que convergem aquilo que é, e aquilo que se transforma? (BACHELARD, 1977, pg. 14).

O trabalho busca estabelecer as relações entre os modelos de racionalismo clássico, da física newtoniana, ao racionalismo completo, presente na teoria da relatividade restrita, na teoria de Maxwell, e na mecânica quântica. Isto nos importa porque na epistemologia, deve-se atentar para a transição de caráter determinístico da física clássica para o caráter probabilístico da física quântica. Esta necessidade ocorre a partir da estratégia que pretendemos adotar ao iniciar o processo instrucional partindo de modelos da física clássica representados pela onda clássica numa corda, a reflexão interna total, e finalmente o efeito túnel, o que conferem uma transição do racionalismo clássico ao racionalismo completo.

Esta delimitação entre os pressupostos da física clássica e da física quântica tem suas implicações epistemológicas e pedagógicas.

(...). delinear os fenômenos e ordenar em série os acontecimentos decisivos de uma experiência, eis a tarefa primordial em que se firma o espírito científico. De fato, é desse modo que se chega à *quantidade representada*, a meio caminho entre o concreto e o abstrato, numa zona intermédia em que o espírito busca conciliar matemática e experiência, leis e fatos.” [...]

Para isso, temos de provar que *pensamento abstrato* não é sinônimo de *má consciência científica*, como parece sugerir a acusação habitual. Será preciso provar que a abstração desobstrui o espírito, que ela o torna mais leve e mais dinâmica. Forneceremos essas provas ao estudar mais de perto as *dificuldades* das abstrações corretas, ao assinalar a insuficiência dos primeiros esboços, o peso dos primeiros esquemas, ao sublinhar também o caráter discursivo da coerência abstrata e essencial, que nunca alcança seu objetivo de um só golpe. E para mostrar que o processo de abstração não é uniforme, chegaremos até a usar um tom polêmico ao insistir sobre o caráter de *obstáculo* que tem toda experiência que se pretende concreta e real, natural e imediata. (BACHELARD, 1977.)

A necessidade de abstração citada por Bachelard é pertinente com a impossibilidade de visualizar diretamente grande parte dos fenômenos estudados pela física quântica, a qual se baseia em modelos teóricos, cuja observação não é realizada de maneira direta, e sim em previsões, limitando-se muitas vezes a detecção de alguns efeitos obtidos experimentalmente (fenomenotecnicamente, no dizer de G. Bachelard).

### 5.4.3 Referencial da Mecânica Quântica

O referencial teórico da mecânica quântica adotado nesta sequência didática segue a linha da chamada interpretação de Copenhague, desenvolvida por Niels Bohr e Werner Heisenberg, os quais trabalhavam em Copenhague nos anos 20 do século passado. Esta interpretação é a mais aceita atualmente nos meios científicos, e é caracterizada pela concepção de que a natureza probabilística da mecânica quântica não é um puro reflexo da falta de conhecimento de hipotéticas variáveis escondidas, mas próprias de sua natureza peculiar do mundo quântico, o qual é caracterizado não por falta de informação do fenômeno quântico, mas sim devido a sua natureza probabilística. Na mecânica quântica, a evolução dos eventos é regida pelas leis da probabilidade; assim, um processo mecânico é acompanhado por um processo ondulatório.

De início, a compreensão da estrutura matemática da teoria quântica passou por vários estágios de desenvolvimento. No início, Erwin Schrodinger não compreendeu a natureza da função de onda associada à partícula. Max Born foi o primeiro cientista a propor uma interpretação de distribuição de probabilidade no espaço para a posição da partícula associada à onda. Alguns cientistas enfrentaram dificuldades em aceitar as implicações da nova teoria, dentre eles Albert Einstein.

A mecânica quântica possui atualmente diversas interpretações, embora a maioria dos físicos considere que a mecânica quântica necessite apenas de uma interpretação instrumentalista. Outros mostram-se propensos a outras interpretações como a interpretação de Copenhague, a Interpretação das Histórias Consistentes, Interpretação dos muitos mundos.

Todas essas interpretações da mecânica quântica podem ser agrupadas em três escolas filosóficas: a realista, a ortodoxa e a agnóstica. As definições de cada escola são determinadas através da resposta a seguinte pergunta: Se medimos a partícula na posição “x”, onde ela estava antes da medida?

**A escola realista** defende que ela estava no ponto A; assim a mecânica quântica é uma teoria incompleta e que há, portanto, outras variáveis, as chamadas variáveis ocultas, que são necessárias para descrever o comportamento da partícula.

**A escola ortodoxa** considera que o ato da medida foi o responsável pelo colapso da função de onda, provocando que a partícula assumisse uma posição definida. Essa interpretação, defendida por N. Bohr, ficou conhecida como interpretação de Copenhague. Os procedimentos adotados nesta sequência didática levam em consideração a formulação da mecânica quântica na interpretação de Copenhague.

## 5.5 Modelo da Sequência Didática

Esta sequência tem como objetivo principal ajudar o aluno na aquisição do saber científico, e segue a linha de estrutura estabelecida por Méheut e Psillos (2004), onde duas dimensões são consideradas: uma epistemológica e outra pedagógica.

Na concepção de Méheut e Psillos (idem), quatro componentes básicos são considerados para a concepção de uma sequência didática: o professor, os alunos,

o conhecimento científico e o mundo material, os quais se interligam, em duas dimensões: a epistemológica e a pedagógica, conforme a figura abaixo.

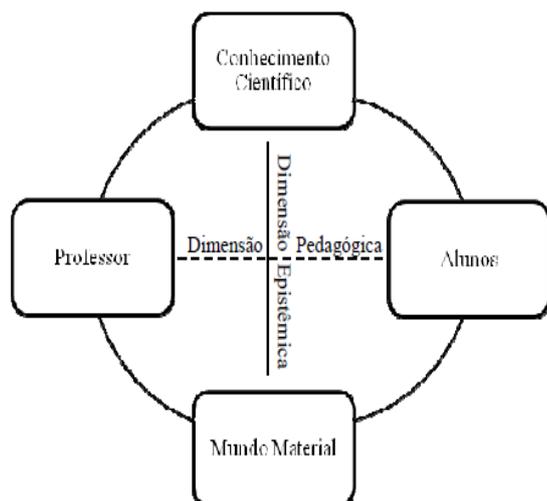


Figura 2: Esquema didático para descrever o desenho de uma TLS (MÉHEUT, 2005)

A dimensão epistemológica busca relacionar os conteúdos que constituem a dimensão do conhecimento científico e do mundo material. Para tanto esta sequência didática está orientada segundo o referencial teórico epistemológico de Gaston Bachelard, cuja teoria, considera que a ciência evolui segundo rupturas entre conceitos antigos e novos, assim torna-se oportuno esta linha teórica, na medida em que as concepções da mecânica quântica representam uma ruptura com as concepções da mecânica clássica. Segundo Bachelard, a ciência moderna procede por descontinuidade, onde cada novo avanço representa uma ruptura em relação ao saber passado, além do que, novos conhecimentos são produzidos pela da ciência contemporânea estão ligados cada vez mais a modelos teóricos, pensados e construídos a partir de problemas, ou seja, muitas vezes de construções teóricas e abstratas, próximo daquilo que consiste com a mecânica quântica.

Do ponto de vista da teoria pedagógica a sequência se fundamenta na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, a qual considera que o processo de aprendizagem na qual os conhecimentos prévios influenciam no processo de aprendizagem de novos conceitos.

A construção de conhecimentos se dará mediante diversos recursos, entre os quais os organizadores prévios, quanto da não existência de conceitos subsunçores necessários à construção da aprendizagem desejada dos conceitos de mecânica quântica, e que esta aprendizagem seja significativa.

Quanto à validação dos conhecimentos que seja realizada, iremos adotar o critério de justificação a priori, cujo objetivo é tornar a sequência clara, identificando as possíveis lacunas conceituais e conflitos cognitivos que deverão ser observados

e dificuldades vivenciadas. Por sua vez, os critérios de validação *a posteriori* consideram duas possibilidades distintas e complementares: a validação externa ou comparativa, que visa analisar os efeitos da sequência didática em relação ao ensino tradicional, através da realização de pré e pós-testes, e a validação interna, que busca analisar os resultados obtidos a partir dos objetivos propostos, buscando observar os caminhos de aprendizagem, ao longo das etapas e situações propostas, comparando a aprendizagem observada com aquela que seria a desejada, conforme identificação realizada nas avaliações prévias, realizadas antes e durante o processo da aprendizagem. Destaca-se ainda que em conformidade com o referencial pedagógico adotado, é necessário, o enfoque na compreensão clara e precisa dos conceitos do conteúdo abordado, desde no nível mais básico, ao mais abrangente.

Desde modo para verificar se a sequência funciona ou não, se faz necessária a aplicação de um pré-teste, sobre os conteúdos a serem apresentados, na sua forma mais básica, e um pós teste a ser aplicado ao término da mesma, sendo que a comparação dos resultados obtidos, destinado a avaliar se a ocorreu o processo aprendizagem, e se este ocorreu de maneira significativa.

Ao todo, esta sequência didática é composta de três etapas, cada etapa foca um conteúdo específico que se relaciona com o tema geral, e cada etapa está dividida em atividades, totalizando nove atividades.

## **5.6 Características contextuais**

### **5.6.1 Local de aplicação da Sequência Didática**

A sequência didática aqui apresentada tem como local de aplicação o colégio da rede pública de ensino do estado da Bahia, Colégio Estadual Governador Roberto Santos (CGRS), o qual está localizado no bairro do Cabula, Salvador Bahia.

O curso será realizado nas dependências da instituição de ensino, utilizando a sala de aula e auditória quando houver a necessidade de projeções, com a aplicação de vídeos instrucionais, experimentos, aulas expositivas e dialogadas, leitura de textos, tudo que estejam relacionados com o tema e sejam necessários para a construção dos conhecimentos pretendidos.

## **5.7 Nível Educativo**

A turma onde será aplicada a sequência didática é uma turma da terceira série do ensino médio regular, do turno vespertino, composta de uma média de trinta alunos frequentes, cuja idade se situa entre a média de dezessete aos vinte anos.

### **5.7.1 Tipo de Sequência Didática**

Esta sequência didática é o tipo losango didático que envolve tanto a dimensão pedagógica, que relaciona professor e aluno, colocada na diagonal horizontal, quanto a dimensão epistemológica no eixo vertical, que relaciona o conhecimento científico ao mundo material, e estas dimensões se interceptam, conforme prevê a geometria.

## **5.8 Enfoque ou ações curriculares maiores**

É comum entre os professores de física abordar-se sobre a necessidade maior da introdução da temática da mecânica quântica, entretanto pouco, ou quase nada se nota ter ocorrido. A sequência didática aqui proposta tem caráter de pesquisa, não pretendemos introduzir uma ação curricular maior com este nosso trabalho, e sim levantamento de dados sobre o tema abordado, e que possam servir de subsídio para pesquisas futuras.

## **5.9 Resultados esperados**

Espera-se que ao término da aplicação da sequência didática:

- a) Que os alunos aprendam significativamente conceitos de mecânica quântica.
- b) Que o material produzido possa servir de base para a realização outras pesquisas.
- c) Que se possam estabelecer avaliações quanto à validade da aplicação das metodologias aplicadas neste trabalho.

## **5.10 Estratégia da sequência didática**

A estratégia desta sequência para que estudar o fenômeno do efeito túnel, se inicia à partir de ondas mecânicas em meios elásticos, ressaltando os conceitos de reflexão e transmissão de pulso em pontos de descontinuidade da densidade. No caso da corda, a variação de densidade (mássica) em um ponto do meio elástico produz a reflexão de um pulso mecânico que se propaga nele. Dependendo da densidade do meio que recebe o pulso, a reflexão pode ser total (uma parede rígida, por exemplo). Em geral, há transmissão e reflexão do pulso.

Para a correta compreensão do fenômeno abordado, faz-se necessária a compreensão das grandezas físicas momento linear e energia.

Depois, explorar a ideia de reflexão interna total e total frustrada em prismas, usando uma caneta laser. O fenômeno quântico do efeito túnel não possui similar clássico, porém, este fenômeno representa uma boa aproximação do ponto de vista de ilustração. A presente sequência segue assim uma divisão gradativa, passando de conteúdos da física newtoniana para a física quântica, partindo daquilo que pode ser visualizado diretamente, para aquilo que somente pode ser “visualizado” por meio da teoria. Do ponto de vista da apresentação dos conteúdos, a sequência didática, sob este aspecto, ficou dividida em três etapas, as quais são compostas das atividades.

## **5.11 Etapas da Sequência Didática**

### **5.11.1 Seleção e apresentação de Organizadores Prévios**

Os Organizadores Prévios como recursos instrucionais potencialmente significativos, compreendem uma estratégia proposta para, manipular a estrutura cognitiva do aprendiz, a fim de facilitar a aprendizagem cognitiva, e são apresentados antes do material de aprendizagem em si. Segundo Ausubel (1980, p.525) organizador prévio é:

Material introdutório apresentado num grau mais elevado de generalidade, inclusão e abstração do que a própria tarefa de aprendizagem, e explicitamente relacionado tanto como ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva quanto à própria tarefa de aprendizagem; destinado à promover a aprendizagem subordinativa ao oferecer um arcabouço ideacional ou um esteio ou um esteio para a tarefa de aprendizagem e/ou ao aumentar a

discriminalidade das novas ideias a serem aprendidas em relação com as ideias já existentes na estrutura cognitiva;isto é preencher o hiato entre aquilo que ele já sabe e o que ele precisa saber para aprender o novo material de aprendizagem mais rapidamente. (AUSUBEL, 1980, p. 525)

Teremos dois organizadores prévios na Sequência Didática, os quais estão descritos sucintamente a seguir.

**Primeiro Organizador Prévio:** Um texto no qual é apresentado o fenômeno do tunelamento quântico Primeiro Organizador Prévio um Texto: “Novo estado das moléculas da água não se comporta como sólido líquido ou gás”. O texto apresenta o fenômeno do tunelamento das moléculas de água através de canais de berílio e serão apresentados como recurso instrucional potencialmente facilitador da aprendizagem significativa. Esta etapa será composta das seguintes atividades: apresentação do tema em Power Point, leitura de texto e resposta do questionário, relacionado com o mesmo.

**Segundo Organizador Prévio:** Experimento com ondas clássicas. Este organizador prévio está dividido em duas etapas:

- I) Propagação de ondas mecânicas em cordas. Através da visualização de pulsos/ondas mecânicas em cordas, serão explorados os fenômenos mais básicos da ondulatória visualizáveis numa primeira fase presentes numa corda.
- II) Em continuidade o experimento apresenta o que ocorre quando ondas ou pulsos se propagam em cordas com densidades diferentes e emendadas, ao passar de uma para a outra corda, com os fenômenos de reflexão e propagação, com e sem inversão de fase, destacando-se os fenômenos da Refração e Interferência, de uma onda que se propaga através de cordas de densidades distintas.

<b>Primeira Aula</b>	Leitura do texto “As duas nuvens de Lord Kelvin” e a apresentação de Power Point “Nasce uma nova física”.
<b>Segunda Aula</b>	Aplicação do Primeiro Organizador Prévio
<b>Terceira Aula</b>	Aplicação do Segundo Organizador Prévio
<b>Quarta Aula</b>	Propagação de ondas eletromagnéticas em prismas óticos.

	Apresentação da propagação da luz em prismas, no primeiro momento será exibido o fenômeno da reflexão interna, e num segundo momento o fenômeno da Reflexão Interna Total Frustrada, o qual servirá de ponte para a aprendizagem para o efeito túnel.
<b>Quinta Aula</b>	Apresentação do fenômeno do tunelamento quântico, como fenômeno da física quântica, através de vídeos, simuladores, etc. Espera-se que nesta etapa ocorra a aprendizagem do fenômeno do tunelamento, mediante o processo da Diferenciação Progressiva, a qual deverá ocorrer à partir aprendizagem adquirida à partir dos fenômenos presentes na etapa destinada à ondulatória.
<b>Sexta Aula</b>	Experimento de dupla fenda para a discussão de dualidade onda partícula, exibição do vídeo “Mecânica quântica: o experimento de fenda dupla 2. Retomada do texto Novos estado das moléculas da água não se comporta como sólido, líquido ou gás. Aplicação de questionários.

### 5.11.2 Simuladores PhET utilizados

- a) Simulador PhET: Ondas Mecânicas, através de uma corda;
- b) Simulador PhET: Reflexão, reflexão total no prisma;
- c) Simulador PhET: Efeito Túnel;
- d) Simulador PhET: Covalent-bonds.

### 5.11.3 Experimentos Físicos:

- a) Produção de vídeo com pulsos em uma mola longa;
- b) Produção de vídeo com molas de densidades diferentes.

### 5.11.4 Textos diversos.

## **CAPÍTULO 6. METODOLOGIA E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

### **6.1 Aplicação do produto educacional MNPEF**

No presente capítulo estão descritos aspectos e experiências vivenciadas durante a aplicação do produto educacional sob a forma de uma sequência didática na unidade escolar da rede pública estadual de ensino, por ocasião da aplicação da Sequência Didática (SD), para uma turma da terceira série do Ensino Médio (EM) da Educação Básica, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Física do Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, Polo 06, junto ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

### **6.2 A Turma e a Instituição de Ensino**

A turma da terceira série do ensino médio da Unidade Escolar, escolhida para a aplicação do produto educacional, no turno vespertino, designada como 3AV, é composta de quarenta alunos matriculados, cuja média de idade gira em torno de dezoito anos. Um aspecto a ser destacado é que foi verificado que apesar de existirem quarenta alunos matriculados, em média a frequência girou em torno de vinte alunos, portanto o número de alunos faltosos pode ser considerado elevado o que ocorreu também ao longo da sequência didática. Este elevado número de faltas que ocorre mais comumente na terceira série do vespertino é apontado como mais um fator que infelizmente contribui com o número de alunos reprovados a cada ano letivo.

A unidade escolar onde aplicamos a sequência didática é um colégio da rede estadual do ensino do estado da Bahia, que está situada no bairro do Cabula. Essa unidade escolar possui atualmente possui dois mil duzentos e trinta alunos matriculados no ano letivo de 2017, distribuídos nos três turnos. Destaca-se que é um colégio muito bem cuidado, isto se deve ao zelo permanente da sua diretoria, professores e funcionários de apoio que se sentem envolvidos pela unidade de corpo que foi desenvolvida nesta instituição de ensino ao longo dos anos. O corpo docente dessa unidade escolar é bem qualificado com professores, na sua maioria, possuidores dos títulos de especialização e mestrado.

A unidade possui uma grande área arborizada o que contribui para tornar o seu ambiente belo e agradável.

Apesar dessas condições citadas anteriormente, existem também algumas dificuldades para a prática do ensino a serem superadas. Por exemplo, a não disponibilidade de ferramentas tecnológicas para auxiliar os professores, ou a não disponibilidade de um sistema automatizado para que se possa realizar o controle de frequência e lançamento de notas das avaliações dos alunos, uma vez que o processo de atualização das cadernetas de frequência e lançamento de notas das avaliações dos alunos são realizadas através de registro manual, em cadernetas, representando uma demanda exaustiva de trabalho por parte dos professores, assim como prejuízos para os alunos, já que toda essa energia na realização desse trabalho manual representa, portanto, um grande prejuízo para todos.

Outro ponto a ser lembrado é a não disponibilidade de uma sala com computadores em número e qualidade suficientes para a utilização pelos alunos para realizarem pesquisas na rede mundial de computadores, utilização de aplicativos e simuladores computacionais como ferramentas auxiliares da aprendizagem. Soma-se a isto a inexistência de um laboratório de física onde poderiam ser ministradas aulas experimentais, o que potencializaria uma melhor qualidade da aprendizagem dos conteúdos de física.

### **6.3 Metodologia utilizada**

#### **Quanto a sua classificação**

No que diz respeito aos objetivos, a presente pesquisa é descritiva, como tal a pesquisa possui como proposta principal descrever as características de uma determinada população que é representada por uma turma de estudantes da terceira série do ensino médio, e tem como objetivo verificar se é possível promover a aprendizagem significativa de conceitos e proposições da mecânica quântica, presentes no fenômeno do tunelamento quântico. Este é o foco de nossa pesquisa, ou experiência tomado como amostra para a realização de estudo, e pretende-se com a mesma estabelecer, na medida do possível, as relações entre variáveis através da coleta de dados.

A pesquisa aqui relatada através da presente dissertação buscou considerar aspectos da formulação de perguntas destinadas a nortear a pesquisa, de modo que o pesquisador de posse dos dados obtidos pudesse identificar relações entre as variáveis estudadas no objeto de pesquisa, à partir do registro dos dados, seleção e a análise dos fatos provenientes da experiência. Segundo alguns autores, este tipo de pesquisa requer por parte do pesquisador conhecimento do problema a ser pesquisado, assim, “o pesquisador precisa saber exatamente o que pretende com a pesquisa, ou seja, quem ou o que, deseja medir, quando e onde o fará e por que deverá fazê-lo.” (MATTAR, 2001, p.23).

A pesquisa descritiva apresentada através da presente dissertação é documental com etapas de levantamento de dados, mediante a realização de testes e registro de resultados em cada uma dessas etapas.

### 6.3.1 Pesquisa Qualitativa

A pesquisa qualitativa, segundo Triviños. (TRIVIÑOS, 1987, p.132)., “trabalha os dados buscando seu significado, considerando como base a percepção do fenômeno dentro do seu contexto”(TRIVIÑOS, 1987, P.132).

A descrição qualitativa está mais preocupada em captar a essência do fenômeno do que a sua aparência, e assim explicar a origem desse fenômeno e suas relações.

Sobre o método qualitativo nota-se a sua preocupação a interpretação dos dados e seu conteúdo:

Preocupa-se em analisar e interpretar dados em seu conteúdo psicossocial. Considera-se que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzida em números. Na interpretação qualitativa a interpretação dos fenômenos e atribuição de significados são pontos fundamentais. É descritiva e não requer utilização de métodos e técnicas estatísticas. O pesquisador, considerado instrumento chave, tende a analisar seus dados indutivamente no ambiente natural. O processo e seu significado são os focos principais da abordagem. (ASSIS, 2016, p.14)

O conceito de pesquisa qualitativa apresenta algumas características básicas presentes nessa modalidade, algumas das quais estão elencadas a seguir:

- 1- A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. O autor supõe o contato direto do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada.

- 2- Os dados coletados são predominantemente descritivos, o material obtido é rico em descrições de pessoas, de entrevistas e depoimentos. Citações são frequentemente usadas para subsidiar uma informação ou esclarecer um ponto de vista.
- 3- A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. O interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas.
- 4- O "significado" que as pessoas dão às coisas e à vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. Nesses estudos há sempre uma tentativa de capturar a "perspectiva dos participantes", isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas. Ao considerar os diferentes pontos de vista dos participantes, os estudos qualitativos permitem iluminar o dinamismo interno das situações, geralmente inacessível ao observador externo.
- 5- A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. Os pesquisadores não se preocupam em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. As abstrações se formam ou se consolidam basicamente a partir da inspeção dos dados num processo de baixo para cima (LUDKE e MEDA, UNICAMP, 1986)

Foi objetivo do presente de pesquisa incorporar essas considerações, notadamente o ponto no qual se destaca a importância do significado que as pessoas dão às coisas, o que a nosso ver é condizente com a teoria significativa de Ausubel que busca promover a aprendizagem de significados.

### 6.3.2 Técnica de Coleta de dados

A técnica de coleta de dados adotada na presente pesquisa foi realizada através de questionários fornecidos para que os alunos participantes da pesquisa respondessem espontaneamente, e a partir das respostas desses o pesquisador promoveu a sua análise.

### 6.3.3 Análise de dados

De posse das respostas dos questionários respondidos pelos alunos a técnica de análise de dados adotada foi a de análise de conteúdo, cuja descrição encontra-se relatada nos capítulos seguintes.

## 6.4 Aplicação da Sequência Didática

### 6.4.1 Encontros da Sequência Didática

A Sequência Didática foi aplicada num total de seis horas-aula distribuídas no decorrer de três dias letivos, ocorrendo, portanto duas aulas por dia. Em cada

um dos encontros foram realizadas duas aulas da Sequência Didática, assim distribuídas:

#### 6.4.1.1 PRIMEIRO ENCONTRO

**Aula 1:** A alvorada da física moderna – leitura do Texto 1 e apresentação em Power Point.

**Aula 2:** leitura e discussão do Texto 2. Aplicação de questionário

#### 6.4.1.2 SEGUNDO ENCONTRO

**Aula 3:** fenômenos ondulatórios em meios elásticos com apresentação de vídeos, leitura de texto e questionário

**Aula 4:** Leitura do Texto sobre Reflexão interna total frustrada e apresentação de vídeo e aplicação de questionário.

#### 6.4.1.3 TERCEIRO ENCONTRO

**Aula 5:** O fenômeno do tunelamento a partir de apresentação de um vídeo. Uso do simulador PhET.

**Aula 6:** Uso do simulador PhET e aplicação de questionário.

#### 6.4.2 Registro da presença dos alunos

Nessas ocasiões foram registradas as presenças dos alunos mediante a assinatura de cada um dos presentes na lista de presença padrão da unidade escolar, sendo constatado que alguns alunos se fizeram presente em todos os encontros, enquanto que alguns participaram de dois ou um dos encontros. Abaixo colocamos uma tabela de presença dos alunos cuja identidade não será revelada aqui, para preservar a confidencialidade.

Tabela de frequência dos alunos

Aluno	Primeiro encontro	Segundo encontro	Terceiro encontro	Total de encontros	Termo de Consentimento
3	Presente	Presente	Presente	Três	
4	Presente	Presente	Presente	Três	

5	Presente	Presente	Presente	Três	
12	Ausente	Ausente	Presente	Um	não
15	Presente	Presente	Presente	Três	
16	Presente	Presente	Presente	Três	
17	Presente	Presente	Presente	Três	
18	Presente	Presente	Presente	Três	
19	Presente	Presente	Presente	Três	
24	Presente	Presente	Presente	Três	
26	Ausente	Ausente	Presente	Um	Não
27	Presente	Presente	Presente	Três	
28	Presente	Presente	Presente	Três	
30	Presente	Presente	Ausente	Dois	Não
32	Presente	Presente	Presente	Três	
33	Presente	Presente	Presente	Três	
36	Presente	Presente	Presente	Três	
37	Presente	Presente	Presente	Três	
38	Presente	Presente	Ausente	Dois	Não
39	Ausente	Ausente	Presente	Um	Não

Considerando que a pesquisa deve ser realizada somente com a concordância daqueles alunos que desejassem participar da mesma, o professor pesquisador, antes da realização dos encontros, informou a todos os objetivos da pesquisa, ficando claro que a participação seria voluntária, de sorte que quem não

desejasse teria plena liberdade para não participar. Entretanto, nenhum dos alunos dessa turma manifestou o desejo de não participar dos encontros.

Lembramos ainda que aqueles que manifestaram interesse em participar da investigação assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, entregue pelo professor regente, no caso de alunos maiores de dezoito anos, enquanto que os alunos de menor idade levaram o termo de Assentimento apropriado para menores, para conhecimento e a respectiva assinatura dos pais ou responsáveis. Deve-se assinalar que a maioria dos alunos desta turma é composta por cidadãos maiores de dezoito anos. Todos foram informados que a pesquisa ficaria restrita apenas à análise do material produzido em sala de aula, sendo preservado o anonimato dos mesmos.

Destaque-se também que transcrevemos para esta pesquisa apenas as questões mais relevantes à aprendizagem significativa do efeito túnel, pois algumas questões relacionadas aos conceitos de ondulatória foram tratadas anteriormente em sala de aula por se tratarem do conteúdo regular dos alunos. As questões foram colocadas a partir da segunda aula, uma vez que a primeira aula tratou-se de uma aula de abertura, com o objetivo de apresentar para os alunos a evolução da física ocorrida a partir do ano de 1900, que é comumente considerado um marco histórico do nascimento da Física Moderna, com o advento da Mecânica Quântica.

O relato a seguir está de acordo com aquilo que ocorreu em sala de aula e as respostas aos questionários foram transcritos exatamente de acordo com a escrita dos alunos.

## **6.5 Apresentação e tratamento de dados:**

### **6.5.1 Aula 01**

Abertura da Sequência: “As nuvens de Lorde Kelvin”.

Questionário sobre o tema. Objetivo: levantamento de conhecimentos prévios.

### **6.5.2 Aula 02**

“Novo estado das moléculas de água não se comporta como sólido líquido ou gás”. Esta aula teve por objetivo trazer para o aluno uma Situação Problema, que foi a descoberta e de um novo estado das moléculas de água trata-se, portanto de um Organizador Prévio (MOREIRA, 2010)

Questão: No seu entendimento, o que acontece com a água quando as suas moléculas ocupam um canal ultrapequeno em formato hexagonal dentro de um pedaço de berilo?	
ALUNO	RESPOSTA
3	“Segundo os pesquisadores, os canais induzem as moléculas de água a terem comportamento bem esquisito, comportam-se como se atravessassem barreiras, e segundo a física clássica isso é impossível”.
<b>Comentário</b>	<b>A barreira clássica como obstáculo intransponível A noção de comportamento parecer apontar para o animismo bachelardiano</b>
4	“Os canais induzem a água de forma estranha, agindo como se não houvesse barreira”.
<b>Comentário</b>	<b>Subjaz a ideia clássica de barreira, como obstáculo intransponível</b>
5	“Os canais induzem as moléculas a terem um comportamento bem estranho, agem como se atravessassem barreiras”
<b>comentário</b>	<b>Mesmas ideias presentes em 3</b>
12	“Durante o desenvolvimento do cristal as moléculas de água já introduzidas no cristal, de uma forma estranha, as moléculas puxam uma a outra atravessando de alguma forma as barreiras chegando a parte externa do cristal”.
<b>comentário</b>	<b>Note-se que as moléculas “puxam” umas às outras. Isso pode significar interação, genericamente, mas pode significar também animismo.</b>
15	“Bom, no meu ponto de vista, existe algum fenômeno com a água que faz com que ela consiga entrar dentro do berílio e também fora dele, de uma forma que suas moléculas entrem em um estado parecido com o sólido, e formando uma espécie de cristais ao redor do berílio”.
<b>comentário</b>	<b>Aqui aparece uma noção mais avançada. Embora a ideia ainda não esteja clara, há indícios de uma racionalização abstrata, uma reconstrução.</b>

16	<p>“A água sofre um tipo de fenômeno em que essa molécula caiba dentro do pedaço de berilo, e sendo observado por um equipamento eletrônico pode-se observar que nasce um novo estado além do líquido, sólido ou gasoso para a água”.</p>
<b>comentário</b>	<p><b>Esse texto parece ser uma repetição do material apresentado em sala de aula.</b></p> <p>A afirmação transcrita acima, ALUNO 16, leva ao entendimento de que átomos de oxigênio e de hidrogênio da molécula de água estão simultaneamente “presentes em todas as seis posições do canal do hexagonal ao mesmo tempo”.</p>
18	<p>“Durante o seu desenvolvimento as moléculas de água ocuparam o espaço. Os canais induzem as moléculas de água a terem um comportamento bem esquisito”.</p>
<b>comentário</b>	<p><b>Essa noção de canal pode lembrar a ideia de trajetória. Poderia estar associados com integrais de caminho, na leitura de Feynman.</b></p>
19	<p>“No meu entendimento a água não possui limite nos seus átomos assim podendo se transformar e diminuir dependendo do lugar ou estado”.</p>
<b>comentário</b>	<p><b>Essa fala revela a noção de molécula não corpuscular, mas como nuvem, distribuição de probabilidade. Algo próximo da noção de orbital molecular ou orbital atômico.</b></p>
22	<p>“...Então a água naturalmente por “está” em certas posições de armazenamento ela pode literalmente atravessar tais barreiras dividindo as suas moléculas fazendo ela se separar e “dá” certas origens e estados diferentes”</p>
<b>comentário</b>	<p><b>Aqui aparece a noção de probabilidade de encontrar a partícula em uma parte ou outra, quando diz “ela pode literalmente atravessar tais barreiras, dividindo as suas moléculas...”. A noção de estado parece também ligar-se ao conceito de distribuição.</b></p>
24	<p>“Porque ela está nessas condições em uma escala ultra pequena e em baixa temperatura, na qual ela precisa de bastante oxigênio e</p>

	não o possui ela se comporta de maneira estranha, pois precisa de espaço para desenvolver-se”
<b>comentário</b>	<b>Difícil de interpretar. A necessidade de oxigênio lembra respiração, animismo, no sentido de Bachelard.</b>
26	“A estrutura de berílio existe uma parcela muito pequena de quantidade de água que faz com que só um microscópio possa identificar”
<b>comentário</b>	<b>Parece fazer menção somente à tecnologia de medida. Melhor precisão, mais detalhes.</b>
27	“O mesmo material do qual são feitas as esmeraldas estes canais têm apenas 5 Angstroms”
<b>comentário</b>	<b>Coloca o problema na ordem de grandeza correta: 0,5 nanômetros.</b>
28	“Ela forma uma gota, de uma forma bem distinta”.
<b>comentário</b>	<b>O que há de distinto no problema é a possibilidade de tunelamento, de estar “presa” e estar “livre”, ao mesmo tempo.</b>
30	“Que a água pode ter um comportamento diferente dependendo do lugar que estiver contida, ela pode ter outro estado ou seja a ciência precisa estudar ainda mais o comportamento da água e seus estados são algo gradual e contínuo que pode ser mudado com a alteração da temperatura, insipidez e quantidade de armazenamento”.
<b>comentário</b>	<b>Essa fala transmite a ideia de quantização pelo confinamento. Os estados dependem da configuração do potencial. Leva à ideia de mudança de estado quântico como um contínuo.</b>
32	“Segundo informações obtidas, através de estudos científicos, pode-se notar um comportamento diferente da molécula de água em escala reduzida. A água apresenta um novo estado, a transposição, ao mesmo tempo em que a molécula está em um lugar ela pode se transportar para outro”.
	<b>Note-se que há uma compreensão de mudança de comportamento dos sistemas físicos quando confinados em escala reduzida. A fala deixa entender que as dimensões</b>

	típicas de átomos e moléculas podem alterar fundamentalmente as propriedades físicas das moléculas de água. Lembremo-nos que em poços largos há muitos níveis de energia bem próximos, lembrando um continuum, mas para poços muito estreitos os níveis de energia são poucos e muito espaçados.
33	<p>“Os canais induzem às moléculas de água a terem um comportamento esquisito, comportam-se como se atravessassem barreiras, isso é impossível porque se tem uma barreira ela seria impossibilitada de atravessar a parede, isso também vai de acordo com o estado da água”.</p> <p>“Mas a ciência tem que estudar mais sobre esse assunto, pois muitas coisas que parecem impossíveis, às vezes tomam um rumo muito diferente do que o esperado”</p> <p>“A ciência estudada profundamente ela tem e pode explicar qualquer coisa”</p>
<b>comentário</b>	<b>A menção à “parede” lembra o obstáculo verbal e o obstáculo substancialista em Bachelard.</b>
34	“No entanto, um novo estado. Segundo os pesquisadores os canais induzem as moléculas de água a terem um comportamento bem esquisito comportam-se como se atravessassem barreira e segundo a física clássica isso é impossível”.
<b>comentário</b>	<b>A ideia de canal como um “caminho privilegiado” aparece novamente entre as respostas. Todavia, as barreiras ainda são “paredes” clássicas.</b>
36	“Os canais induzem as moléculas de água a terem esse comportamento bem esquisito”.
<b>comentário</b>	<b>Citados anteriormente</b>
37	“O mesmo material do qual são feitas as esmeraldas. Estes canais têm largura de apenas 5 angstroms”.
<b>comentário</b>	<b>Citados anteriormente</b>

Quadro 1. Respostas por aluno para a questão posta no caput.

### 6.5.3 Aula 03

A terceira tem por objetivo a formação dos conceitos subsunçores necessária à Aprendizagem Significativa, presentes nas ondas mecânicas.

O material instrucional das aulas 3 é composto por um conjunto de dois textos e quatro vídeos, três deles produzidos na UEFS, com a finalidade de produzir a formação dos conceitos subsunçores necessário à aprendizagem significativa de conceitos da mecânica. O conjunto de textos e vídeos instrucionais abordam conceitos necessários à Aprendizagem Significativa, tiveram por finalidade desempenhar o papel de Organizadores Prévios, em conformidade com a teoria de Ausubel.

“Organizadores prévios são propostos como um recurso instrucional potencialmente facilitador da aprendizagem significativa, no sentido de servirem de pontes cognitivas entre novos conhecimentos e aqueles já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz”. (MOREIRA, 2012).

#### **Vídeo 1**

Exibe uma mola colocada sobre uma bancada de laboratório, a qual possui uma das suas extremidade fixa na bancada, e a outra extremidade livre de sorte que na extremidade livre o professor produz uma oscilação regular com a finalidade de produzir ondas, e mais especificamente ondas estacionárias. Através desse vídeo os alunos puderam observar a formação da onda estacionária. Lembrando que ondas estacionárias são produzidas através da superposição de duas ondas de mesma frequência, mesmo comprimento de onda, mesma direção que se propagam em sentidos opostos.

Durante a exibição desse vídeo os alunos foram incentivados a identificar os conceitos relacionados à ondulatória, tais como: frequência, amplitude, período, frequência, nós, etc. O procedimento adotado na Sequencia Didática está de acordo com a teoria da Aprendizagem significativa de Ausubel que prevê a formação dos conhecimentos prévios antes da aprendizagem da matéria de ensino desejada. Ausubel define este conhecimento prévio como “conceito subsunçor”, ou simplesmente subsunçor. Ainda de acordo com a teoria de Ausubel é que o aluno aprenda inicialmente os conceitos e proposições mais gerais e inclusivos e posteriormente adquira novos conhecimentos diferenciados e mais especializados, aumentando-se gradativamente o grau de complexidade da matéria de ensino, e isto

ocorre a partir daquilo definido pela teoria de Ausubel como diferenciação progressiva.

### **Vídeo 2**

Tem-se uma mola também presa na bancada em uma de suas extremidades, e a outra extremidade livre na qual o professor provocava movimentos perpendiculares ao comprimento da mola de sorte a produzir pulsos que eram refletidos na extremidade fixas. Destacou-se na ocasião que a inversão de fase ocorre de acordo com a terceira lei de Newton, ou A Lei da Ação e Reação, pois o pulso ao chegar até a outra extremidade da mola que é fixa, de maneira que exerce uma força perpendicular à sua extensão, força esta que atuando sobre o ponto fixo da mesa é devolvida como uma força de reação de mesma direção e intensidade e sentido contrário.

Esta foi uma das finalidades da utilização dos vídeos 1, 2 e 3, para que os fenômenos presentes no experimento servissem de subsunçores, para servir de âncora para novas aprendizagens a ocorrer nas etapas subsequentes da SD.

Os alunos foram incentivados a identificar os fenômenos ondulatórios presentes na mola, tais como amplitude, comprimento de onda, frequência, e etc. Nesse vídeo os alunos conseguiram perceber a formação de ondas estacionárias evidenciada pela presença dos nós fixos.

O vídeo também mostrou que ao ser colocado um corpo, na região de propagação da onda (no caso foi colocado um copo plástico próximo à mola) foi visto que o copo foi arremessado para longe o que significa que a mola transporta momento linear, ou se preferir, pode se dizer que uma onda ou um pulso são capazes de transportar energia.

### **Vídeo 3**

Este vídeo apresenta duas molas emendadas, sendo uma de menor densidade, e outra de maior densidade, formando um sistema de duas molas, com o mesmo arranjo dos sistemas anteriores, isto é, uma extremidade fixa na mesa, e outra livre onde o professor produzia as oscilações, que davam origem à formação de ondas. O vídeo mostra que o meio físico da primeira mola de menor densidade, unida a uma segunda mola de maior densidade, estando esse sistema com uma das extremidades presa na mesa e a outra livre de maneira que o professor pode

provocar movimentos transversais de modo a surgir ondas que se propagavam ao longo das duas molas.

Esse experimento é interessante porque através dele, os alunos puderam observar a formação de ondas nas molas, sendo que pelo fato de possuírem densidades diferentes as ondas que estavam sendo formadas apresentavam comprimento de onda distintos, com a mola de menor densidade apresentou um comprimento de onda menor do que a segunda mola. Na mola de menor densidade foi verificada a presença de  $3/4$  meios comprimento de onda e na segunda mola um comprimento de onda. Instigados pelo orientando, os alunos chegaram à conclusão que quando uma onda se propaga através de meios que possuem densidades diferentes ocorre o fenômeno da refração.

Após a exibição do vídeo os alunos receberam um questionário para ser respondido em sala de aula e em seguida serem devolvidos ao professor.

As respostas dos alunos ao questionário estão tabuladas na Tabela de respostas dos alunos correspondente a aula 3- Ondas mecânicas em molas.

Destaca-se que as respostas dos alunos foram transcritas exatamente da forma que foram expressas pelos mesmos.

Quadro 2. Aula 3 – Ondas mecânicas em molas: Respostas por alunos

ALUNO	<p>1- No vídeo 2 somente havia uma mola fixa em uma das extremidades. Em determinados instantes o operador dá um toque na mola de maneira que provoca o surgimento de um pulso que se propaga ao longo da mola. (a,b,c)</p> <p>2- No vídeo 3 existem duas molas de densidades distintas e que estão emendadas uma à outra, e são submetidas à mesma tensão, tente responder:</p> <p>a) O que acontece quando o pulso chega à extremidade fixa?</p> <p>b) Quanto à tensão da mola o que ocorre com o pulso?</p> <p>c) Você conseguiu enxergar o fenômeno da superposição?</p> <p>d) Quais os componentes de uma onda que você conseguiu identificar?</p>
-------	---

	e) As ondas que se propagam em molas distintas são iguais ou apresentam algumas características distintas? Se afirmativo quais?
3	Não participou/não compareceu
4	Não participou/não compareceu
5	a) Ondas são criadas. b) Três partes de onda são criadas. c) Sim. d) Reflexão e refração. e) Não são iguais.
10	a) Acontece a reflexão. b) Metade da onda. c) Sim, parece que havia pontos fixos. d) Não “enxerguei”. e) Sim a primeira trabalha mais que a segunda
15	Não participou/não compareceu
16	a) Ele volta de forma refletida, ou seja, acontece a reflexão. b) Aparecem mais metades de onda. c) Sim. Parecia que havia pontos fixos. d) Não identifiquei nenhuma; e) Sim a primeira mola trabalha mais do que a segunda.
18	f) Acontece a reflexão g) Sim, parece que haviam pontos fixos. h) Sim. Parecia que havia pontos fixos. i) Não identifiquei. j) Sim a primeira mola trabalha mais do que a segunda.
19	Não participou/não compareceu
22	Estava presente porém não respondeu nenhuma das questões
24	a) Acontece a reflexão b) Aumenta a metade da onda. c) Sim. Parecia que havia pontos fixos. d) Não identifiquei. e) Sim a primeira mola trabalha mais do que a segunda.

26	Não participou/não compareceu
27	<p>a) Ela vai com uma força e diminui quando chega à extremidade</p> <p>b) Aumenta a metade da onda.</p> <p>c) Sim. Parecia que havia pontos fixos.</p> <p>d) Não identifiquei nenhuma.</p> <p>e) Sim a primeira mola trabalha mais do que a segunda</p>
28	Não participou/não compareceu
30	Não participou/não compareceu
32	
33	<p>a) A extremidade oferece resistência refletindo e a onda volta com fase invertida.</p> <p>b) Aumenta junto com a propagação da onda.</p> <p>c) É quando as ondas passam em lados opostos.</p> <p>d) A onda menor tinha mais movimento com 1,5 de onda, a maior tinha 0,5 de onda.</p> <p>e) Apresentam características diferentes</p>
34	<p>a) Este volta de forma refletida, ou seja, acontece a reflexão invertida.</p> <p>b) Aparecem mais metades de onda.</p> <p>c) É quando as ondas passam em lados opostos.</p> <p>d) Não identifiquei nenhuma.</p> <p>e) Apresentam características diferentes</p>
36	Não participou/não compareceu
37	Não participou/não compareceu
38	<p>a) Ela é contida, ou se propaga inversamente.</p> <p>b) o pulso é potencializado</p> <p>c) Sim.</p> <p>d) Não identifiquei nenhuma.</p> <p>e) Sim, o material é diferente, então a onda se comporta de maneira diferente.</p>

De forma geral, as respostas não fornecem muitos elementos que permitam avaliar se houve minimamente diferenciação progressiva ou reconciliação integrativa. Com poucas exceções, pode-se garimpar algumas expressões do tipo “Sim, o material é diferente, então a onda se comporta de maneira diferente”, que poderia remeter à compreensão de que as características de propagação de ondas em meios elásticos depende das propriedades mecânicas dos mesmos, sendo, pois, uma aprendizagem conceitual importante. Esse comportamento foi observado pelos alunos 33, 34 e 38. Além disso, porém com argumento diverso, os alunos 10, 16, 18, 24, 27 perceberam ou noticiaram que “a mola a esquerda trabalha mais do que a segunda”. Pela posição das molas no vídeo, a primeira mola pode ser a da esquerda, espiral longa, e a segunda mola pode ser a slinky, à direita do vídeo. Vê-se que a mola da esquerda “trabalha mais” porque tem  $\frac{3}{4}$  de comprimento de onda enquanto a Slinky exibe meio comprimento de onda.

Outro resultado interessante vem do aluno 34, quando diz que “aparecem mais metades de onda” em resposta à pergunta “quando a tensão da mola é aumentada, o que acontece com o pulso”? Nota-se que, pelo menos no nível experiencial, há uma aprendizagem significativa, pois o aluno conseguiu estabelecer relações de sentido entre as situações distintas.

Também (o aluno 33 faz uma afirmação sobre a pergunta) que revela a construção de sentidos “A extremidade oferece resistência refletindo e a onda volta com fase invertida”. Essa é a reflexão com inversão de fase, presente em extremos fixos e explicada pelo princípio de ação e reação.

Uma proposição interessante vem do aluno 5, quando diz sobre a mesma pergunta: “ondas são criadas”. Essa resposta está correta, pois se não tivéssemos a visão da extremidade fixa, acreditaríamos que o pulso invertido observado foi da mesma maneira que criamos o primeiro pulso.

#### 6.5.4 Aula 04

Esta aula tem por objetivo explorar os fenômenos óticos que ocorrem nos meios transparentes como prismas, e destina-se a promover a Diferenciação Progressiva dos conceitos subsunçores explorados através da aula anterior que trata dos fenômenos oscilatórios presentes nos experimentos com molas. Nesta aula são estudados os fenômenos da Reflexão Total Interna, e a Reflexão Interna Total

Frustrada, as quais devem servir de ponte cognitiva para a aprendizagem significativa do tunelamento quântico.

Nesta aula utilizamos o texto 4, que trata da reflexão total da luz, fenômeno que ocorre quando a luz passa de um meio mais refringente para um meio menos refringente, e A reflexão interna total ocorre quando o raio incide na superfície de separação dos meios à partir de um certo ângulo com um determinado valor, denominado ângulo limite  $L$ , a refração deixa de existir, sendo a luz completamente refletida. Para que os alunos entendam como ocorre a reflexão interna total foi apresentado o vídeo: “O Mago da Física- Reflexão Total da Luz”, no qual é exibida de maneira muito clara como ocorre a reflexão interna total

Para ilustrar a parte teórica foi utilizado o vídeo: “O Mago da Física- Reflexão Total da Luz”. Em seguida tratamos da reflexão interna total frustrada, e feitas as devidas explicações teóricas dos possíveis motivos para a ocorrência do fenômeno. Infelizmente não foi possível montar ou filmar este fenômeno ficamos apenas na explicação teórica.

Tabela com as respostas do Questionário referente a aula 4

ALUNO QUESTÕES:

Partindo do princípio que a luz é um fenômeno ondulatório, quais os fenômenos que você conseguiu identificar no vídeo “O mago da Física- Reflexão total da luz?”

Seria possível relacionar este vídeo com os vídeos das molas ?

Quadro 3. Respostas dos alunos ao Questionário da Aula 4.

ALUNO	RESPOSTA 1	RESPOSTA 2
3	Reflexão e refração	Sim
4	Reflexão e refração	Sim
5	Reflexão e refração.	Sim, em parte.
16	Ele volta de forma refletida, ou seja, acontece a reflexão	

18	Refração e reflexão	Sim
19	Refração e reflexão	Sim
24	Refração e reflexão	Sim
27	Refração e reflexão	Sim porque tem a ver
28	A reflexão e o reflexo	Não
32	Refração e reflexão	Sim. Nos dois há um ciclo ondulatório
33	Refração e reflexão.	Sim, pois quando a onda ultrapassa o espaço a onda aumenta
34	Reflexão e refração	Sim.
36	Reflexão e refração	Sim
37	reflexão e refração	Sim
38	Reflexão e refração	Sim

Vê-se que esse instrumento produz poucos dados interessantes para a avaliação da SD. Na resposta do aluno 32 há um indicio de reconciliação integrativa, pois o mesmo associa comportamento ondulatório tanto para ondas mecânicas em meios materiais elásticos quanto para ondas eletromagnéticas.

### 6.5.5 Aula 05

Nesta aula se inicia a apresentação do fenômeno quântico do tunelamento, começamos com um vídeo, onde se verifica a passagem de uma partícula através de uma parede. Nessa ocasião os alunos tomam conhecimento da existência do Tunelamento quântico propriamente dito, por meio do professor que faz uma breve explanação após a apresentação de vídeo com duração 30 segundos.

Tabela com as respostas do Questionário referente à AULA 5: Manuseando o Simulador PhET- Pacotes de Onda e Tunelamento Quântico.

ALUNO Questões:

Quais as semelhanças existentes entre os fenômenos físicos presentes nos experimentos com molas, o experimento óticos, e os fenômenos quânticos retratados através do Simulador PhET?

ATIVIDADE: Releia o texto “Novo estado das moléculas de água não se comporta como sólido líquido ou líquido ou gás”

Agora você poderia dizer:

*O que acontece com a água quando ela ocupa um canal ultrapequeno em formato hexagonal dentro de um pedaço de berilo? Que fenômeno físico ocorre nessa situação?*

As respostas dos alunos estão sintetizadas no Quadro 4.

ALUNO	RESPOSTA 1	RESPOSTA 2
3	Reflexão	Ocorre o fenômeno chamado Tunelamento quântico
4	Reflexão	O Tunelamento quântico
5	Reflexão	
15	Reflexão	Ocorre um fenômeno chamado Tunelamento quântico
17	Reflexão	Efeito Túnel
18	Reflexão	Efeito Túnel
19	Reflexão	Efeito Túnel
22	Reflexão	Efeito Túnel
24	Reflexão	Efeito Túnel
27	Reflexão	Efeito Túnel
32	Todos eles apresentam fenômenos ondulatórios	A água apresenta um nova natureza de estado Efeito Túnel
36	Reflexão	Efeito túnel
37	Reflexão	Efeito túnel

Quadro 4. Respostas dos alunos ao questionário da aula 5.

Praticamente, não há diferença entre as respostas dos alunos. Aqui, provavelmente, estão operando dois efeitos. Um deles se deve ao fato de já terem alguma noção de ondulatória, pois estão no terceiro ano. Outro deles pode ser a própria forma de organização da SD.

### 6.5.6 Aula 06

Esta é a aula de encerramento da Sequência Didática. Nesta procuramos trazer para o alunos os conceitos do Princípio da Incerteza, a Complementaridade e

a Probabilidade presente na Mecânica Quântica, todos esses presentes no Tunelamento Quântico.

Neta linha de trabalho, para concluir a aplicação da Sequência Didática foram realizadas duas atividades:

Primeira atividade - a projeção do vídeo: “Mecânica Quântica O experimento da fenda dupla!” YouTube.

Endereço: <https://www.youtube.com/watch?v=GXAYW4a3OZY>

Segunda atividade - Releitura do texto: “Novo estado das moléculas da água não se comporta como sólido, líquido ou gás”.

Terceira atividade: os alunos responderam o questionário pertinente a aula.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma Sequência Didática que tem por objetivo promover a aprendizagem de conceitos de Mecânica Quântica a partir de conhecimentos prévios de ondulatória e óptica, chegando-se ao Tunelamento Quântico como tema central. As noções de reflexão e refração de ondas têm seus análogos na reflectância e na transmitância de ondas de probabilidade, calculadas para potenciais simples, via a equação de Schrödinger. Esses fenômenos foram visualizados em vídeos produzidos pelo autor quando tratou das aulas sobre ondas em meios elásticos, dando ênfase às condições de propagação das mesmas (densidade do meio e tensão a que está submetido) e às condições de fronteira. Particularmente, trabalhou-se cuidadosamente a questão da condição de contorno em meios de densidades diferentes, mostrando a diferença de velocidade de propagação em cada um deles. Esses conhecimentos foram avaliados em observações durante as aulas e em questionários.

Verificou-se indícios de aprendizagem significativa em relação às propriedades dos meios e às velocidades dos pulsos, bem como a relação dessas com condições de fronteira para meios de densidade diferentes unidos por um ponto, como se mostrou em um dos vídeos produzidos nesse trabalho. Os alunos concluíram que uma das molas “trabalha mais”, isto é, move-se mais que a outra, ou quando diz, a respeito do aumento de tensão, que “aparecem mais metades de onda”, provavelmente referindo-se a meios comprimentos de onda.

Sobre as questões de quântica, ficou patente a relação com racionalismo clássico, quando das considerações sobre a barreira, entendida até mesmo como uma “parede” intransponível. Em alguns casos, o tunelamento assumiu posições animistas, no sentido bachelardiano do termo. Posições substancialistas também estão presentes em algumas falas, mostradas no capítulo precedente, e, como Bachelard bem aponta, um obstáculo nunca está sozinho: o obstáculo verbal também aparece em cena.

Alguns alunos alcançaram as noções de distribuição, de densidade de probabilidade (alunos 19 e 22, por exemplo), associando-as ao confinamento ou à redução de escala, o Angstrom ou o nanômetro.

Ainda sobre noções de física quântica, subjaz a ideia de contínuo/discreto, de modificação de propriedades pela redução de escala. Nesse pormenor, a aplicação

da sequência PhET para partícula livre, degrau de potencial e barreira de potencial ajudaram a reconhecer, na releitura do texto sobre o comportamento da água confinada em berílio, que representava o fenômeno de tunelamento quântico.

Apesar dos avanços observados, fica evidente também a questão obstáculo verbal, notadamente nas respostas que usam a palavra canal. Parece-nos que estaria associada a um caminho particular, uma trajetória, um capilar através da barreira, por onde fluiriam as moléculas. Ou, ainda, as “moléculas que puxam umas às outras. É normal que seja assim, por tratar-se de ideias que desafiam a intuição, que segundo Bachelard, são númenos e não fenômenos.

Em resumo, defendemos que:

- a sequência didática apresentada pode ser usada para introduzir conceitos de física quântica no ensino médio.
- Os conceitos clássicos são úteis como ideia ancora dos conhecimentos prévios de ondas em meios elásticos são subsunções para as novas ideias.
- Os organizadores prévios escolhidos podem promover a aprendizagem significativa e foram escolhidos de acordo com a teoria de Ausubel, a saber
  - Texto recente sobre o tunelamento quântico da água aprisionada em estruturas do berílio
  - Vídeos produzidos pelo autor sobre a propagação de pulsos e ondas em meios elásticos
  - Sequência de atividades no simulador PhET, cobrindo vários sistemas quânticos simples.

Esperamos ter dado uma contribuição para a introdução de conceitos de física quântica no ensino médio.

# Referências Bibliográficas

AUSUBEL, David P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos**: Uma Perspectiva Cognitiva. 2002.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph. D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. Tradução de Eva Nick et al.. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BERNAL, A. G. A.; OSORIO, R. S. B. - Estudio de superficies usando un microscopio de efecto túnel (STM). **Ingeniería e Investigación**; 29(3); 121-127; 2009-12

BERNAL, Rodrigo; ÁVILA, Alba.. Reproducible Fabrication of Scanning Tunneling Microscope Tips. **Revista de Ingeniería**; (27); 43-48; 2008-05.

BORN, Max. **Física atômica**. Lisboa : Fundação Calouste Gulbenkian.

CARUSO, Francisco. OGURI, Vítor. **Física Moderna**: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos. Rio de Janeiro : Elsevier, 2006.

CASTRILLÓN, Jhonny; FREIRE JR., Olival; RODRÍGUEZ, Boris. Mecânica quântica fundamental, una propuesta didáctica - **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.36, n.1, p.1-12, 2014.

CONDLIFFE, Jamie. Novo estado das moléculas da água não se comporta como sólido, líquido ou gás. [online], 2016. Disponível em: <http://gizmodo.uol.com.br/novo-estado-moleculas-agua/> . Acesso em: 08/07/2017.

EISBERG, Robert; RESNICK, Robert. **Física Quântica**. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas. São Paulo : Campus/Elsevier, 1979.

FEYNMAN, R. P. , LEIGHTON, R.B., SANDS, M. **The Feynman Lectures in Physics** vol.3, Quantum Mechanics p.9-3, Perseus Books Group, 2008).

FORBES, R. G.; DEANE, J. H. B.. Reformulation of the standard theory of Fowler–Nordheim tunnelling and cold field electron emission. **Proc. R. Soc. A** (2007) 463, 2907–2927, doi:10.1098/rspa.2007.0030.

GOMES, Gerson G.; PIETROCOLA, Maurício. O experimento de Stern-Gerlach e o spin do elétron: um exemplo de quasi-história. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.33, n.2, p.2604, 2011.

GRIFFITHS, David, J. **Mecânica Quântica**. 2.ed. São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2011.

<http://www.walter-fendt.de/download/ph14dl.htm> Acesso em: 27/06/2017.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. Física 2.

KNIGHT, Randall D. **Física** – Uma Abordagem Estratégica, vol 4. São Paulo: Editora Bookman, 2ª edição, 2009.

KOLESNIKOV, A.I.; REITER, G.F.; CHOUDHURY, N.; PRISK, T.R.; MAMONTOV, E.; PODLESNYAK, A.; EHLERS, G.; SEEL, A.G.; WESOLOWSKI, D.J.; ANOVITZ, L.M. Quantum Tunneling of Water in Beryl: A New State of the Water Molecule, published 22 April 2016)

KYRITSAKIS, A; XANTHAKIS, J. P.. 2015 Derivation of a generalized Fowler–Nordheim equation for nanoscopic field-emitters. **Proc. R. Soc. A** 471: 20140811, 2015. <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2014.0811>.

LA ROSA, J. **Psicologia e educação**: o significado do aprender. Porto Alegre: EDIPUCR, 2003.

LEÃO, Márcia R. M.; PERES, Orlando. **Reflexão interna total frustrada**.

LEMES, M. A. M.; GOMES, H. B.. Ondas internas e níveis de transição. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.35, n.1, p.1315, 2013. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v35n1/v35n1a15.pdf>. Acesso em: 03/09/2017.

LOBATO, Teresa; GRECA, Ileana María. Análise da inserção de conteúdos de teoria quântica nos currículos de física do ensino médio. **Ciência e Educação**, Bauru [online], v.11, n.1, pp.119-132, 2005.

MARTÍNEZ, J.A.; VALENZUELA, J.; HERNÁNDEZ, M.P.; HERRERA, J. Automatización de un microscopio de barrido por efecto túnel utilizando una tarjeta OMB-DaqBoard/2000 y LabVIEW - **Revista Mexicana de Física**; 62(1); 45-50; 2016-02

Matter (physics): McGraw-Hill's Access Science: Encyclopedia of Science and Technology Online.

MÉHEUT, M; PSILLOS, D. Teaching-learning sequences: aims and tools for science education research. **International Journal of Science Education**, 26:5, 515-535, 2004.

MERZBACHER, Eugen, The Early History of Quantum Tunneling, American Institute of Physics, **Physics Today**, p.44-49, August 2002.

MONTEIRO, M. A.; NARDI, R.; BASTOS FILHO, J. B. **Dificuldades dos professores em introduzir a física moderna no ensino médio**: a necessidade de superação da racionalidade técnica nos processos formativos. In: NARDI, R. (org.) *Ensino de ciências e matemática, I: temas sobre a formação de professores* [online]. São Paulo: Editora UNESP; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2009. 258 p. ISBN 978-85-7983-004-4.

MOREIRA, Marco Antonio. **A Teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora da UnB, 2006.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa**: um conceito subjacente. 1997.

MOREIRA, Marco Antonio. **Grandes desafios para o ensino da física na educação contemporânea**. Anais CICLO DE PALESTRAS DOS 50 ANOS DO INSTITUTO DE FÍSICA DA UFRJ. Rio de Janeiro, Brasil, março de 2014. Disponível em: <[http://www.if.ufrj.br/~pef/aulas\\_seminarios/seminarios/2014\\_Moreira\\_Desafios\\_EnsinoFisica.pdf](http://www.if.ufrj.br/~pef/aulas_seminarios/seminarios/2014_Moreira_Desafios_EnsinoFisica.pdf)>. Acesso em: 27/06/2017.

MOREIRA, Marco Antonio. **O que é afinal aprendizagem significativa?** Porto Alegre, 2010. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/oqueeafinal.pdf> Acesso em: 08/09/2017.

MOREIRA, Marco Antonio. Organizadores prévios e aprendizagem significativa. **Revista Chilena de Educación Científica**, Santiago, v.7, n.2, 2008, pp. 23-30. ISSN 0717-9618.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo : E.P.U, 1999.

MOREIRA, Marco Antonio. Organizadores prévios e aprendizagem significativa. **Revista Chilena de Educación Científica**, ISSN 0717-9618, Vol. 7, Nº. 2, 2008 , pp. 23-30. Revisado em 2012

MOURA, Tiago dos Santos; RICOTTA, Regina Maria. **Corrente em microscopia de varredura por tunelamento segundo a tentativa WKB**. In: 10º Simpósio de Iniciação Científica e Tecnológica, 2008, São Paulo. Boletim Técnico da Faculdade de Tecnologia de São Paulo. São Paulo : Boletim Técnico da Faculdade de Tecnologia de São Paulo, 2008. v. 25. p. 39-39.

NUSSENZVEIG, H. M.. **Curso de Física Básica**, v. 2. Fluidos; Oscilações e ondas; Calor. São Paulo : Edgard Blücher, 1981.

OSTERMANN, F.; MOREIRA, M. A. Uma Revisão Bibliográfica sobre a Área de pesquisa Física Moderna e contemporânea no Ensino Médio. **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, 2000. Disponível em: [http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol5/n1/v5\\_n1\\_a2.htm](http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol5/n1/v5_n1_a2.htm) Acesso em: 03/09/2017.

PLANCK, Max. Sobre a lei de distribuição de energia no espectro normal. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.22, n.4, p.538, 2000b.

PLANCK, Max. Sobre um aperfeiçoamento da equação de Wien para o espectro. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.22, n.4, p.536, 2000a.

QUANTUM TUNNELING. Disponível em: <<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/quantum-tunneling>>. Acesso em: 27/06/2017.

R. Penrose (1991). «*The mass of the classical vacuum*». In: S. Saunders, H.R. Brown. *The Philosophy of Vacuum* Oxford University Press.

REZENDE JÚNIOR; M. F.; CRUZ, F. F. de S. Física moderna e contemporânea no ensino médio: do consenso de temas à elaboração de propostas. **Atas do IV Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**. Bauru, 2003.

SCHARFF, Morten. **Elementary quantum mechanics**. London : Wiley – Interscience, 1969.

SENA, Cleidilane de Oliveira; OLIVEIRA, Glaura Caroena Azevedo de; ALCÂNTARA JÚNIOR, Petrus Agippino de. Uma demonstração simples sobre a analogia clássica do efeito de tunelamento quântico. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, XVI, Rio de Janeiro, 2005. **Anais...** Rio de Janeiro: SNEF, 2005. Disponível em: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/resumos/T0461-1.pdf> Acesso em: 27/06/2017.

SERIDONIO, A. C.; OLIVEIRA, L.N.; YOSHIDA, M.. STM probing of local oscillations of the Fano-Kondo effect: a Doniach-Sunjic approach for the Kondo peak. **Brazilian Journal of Physics**; 39(1a); 226-229; 2009-04

SILVA JÚNIOR, N. L.; ANDRADE NETO, A. V. Expressões analíticas para a probabilidade de tunelamento em fenômeno de emissão por campo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v., n., p.-, 2014.

SILVA, Ariel Almeida Abreu; ANDRADE-NETO, A.V. Cálculo da taxa de ionização do átomo de hidrogênio em campo elétrico uniforme via método WKB. **Revista Brasileira de Ensino Física**, São Paulo , v. 32, n. 2, p. 1-6, June 2010 .

SILVA, J.; SOUZA, J. O ensino de Física em Botucatu. **Revista Botucatuense de Ensino de Física**, Botucatu, v. 97, n. 4, p. 1103-1125, 2010.

SISMANOGLU, Bogos Nubar; NASCIMENTO, Janaína Correa do; ARAGÃO, Eduardo Cezar Barbosa de Barros. Visualizando tunelamento quântico através da geração de micropasmas. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.37, n.1, Epub, mar. 2015.

STUDART, Nelson. A invenção do conceito de quantum de energia segundo Planck. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.22, n.4, p.523, 2000.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. Vol. 3, 6. ed. LTC, 2009.

USHIODA, S.; TSURUOKA, T.; OHIZUMI, Y.; HASHIMOTO, H.. STM light emission spectroscopy of individual quantum wells: measurement of transport parameters in real space. **Brazilian Journal of Physics**; 34(2b); 547-549; 2004-06

WATSON, J. B. Psychology as the behaviorist views it. **Psychological Review**, n. 20, p. 158-177, 1913.

WIKIPÉDIA: *Termodinâmica*. Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Termodinâmica>>. Acesso em: 27/06/2017.