

MODELAGEM NUMÉRICA DA FLEXÃO DE VIGAS DE CONCRETO  
RECICLADO ARMADO

Magno Teixeira Mota

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL.

Aprovada por:

---

Prof. Anderson de Souza Matos Gadéa, D.Sc.  
UEFS

---

Prof. Koji de Jesus Nagahama, D.Sc.  
UEFS

---

Prof. Marcos Martinez Silvosso, D.Sc.  
UFRJ

---

Prof. Washington Almeida Moura, D.Sc.  
UEFS

FEIRA DE SANTANA, BA – BRASIL  
SETEMBRO DE 2012

**Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado**

Mota, Magno Teixeira

M871m Modelagem numérica da flexão de vigas de concreto reciclado armado / Magno Teixeira Mota. – Feira de Santana, 2012.  
111 f. : il.

Orientadores: Anderson de Souza Matos Gadéa, Koji de Jesus Nagahama.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2012.

1. Concreto reciclado armado. 2. Vigas de concreto – Avaliação estrutural. 3. Modelagem numérica. I. Gadéa, Anderson de Souza Matos, orient. II. Nagahama, Koji de Jesus, orient. III. Universidade Estadual de Feira de Santana. IV. Título.

CDU: 624.012.45

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Izabel, pelo carinho, dedicação e ensinamentos morais que foram fundamentais na formação de meu caráter.

A Michelle, pela compreensão, principalmente na etapa final deste trabalho.

Aos meus orientadores, Anderson Gadéa e Koji Nagahama, pela confiança e inestimável acompanhamento.

Ao grande amigo Marcelo Pedreira pela parceria nos artigos e enriquecedoras conversas.

Aos amigos e colegas de mestrado Rogério, Saulo, Glaydson, Julia, Amistander e Maria Elane.

Aos professores e funcionários do PPGECEA/UEFS por terem proporcionado um ambiente de estudo agradável.

À COPPE/UFRJ por ter cedido a licença para uso do *software* DIANA<sup>®</sup>.

À CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGECEA/UEFS como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## MODELAGEM NUMÉRICA DA FLEXÃO DE VIGAS DE CONCRETO RECICLADO ARMADO

Magno Teixeira Mota

Setembro/2012

Orientadores: Prof. Dr. Anderson de Souza Matos Gadéa

Prof. Dr. Koji de Jesus Nagahama

Programa: Engenharia Civil e Ambiental

Uma consequência do desenvolvimento econômico e do crescimento populacional é a utilização, cada vez mais intensa, de recursos naturais não renováveis, provocando o crescente aumento da geração de resíduos, dentre os quais os resíduos de construção e demolição (RCD). A utilização de agregados reciclados de RCD na produção de concretos é uma alternativa para a diminuição dos problemas ambientais causados por estes resíduos. Diversos estudos têm demonstrado que, de maneira geral, esses agregados causam alterações em importantes propriedades de engenharia, como redução da resistência à compressão e módulo de elasticidade. Apesar disso, algumas pesquisas apontam para a possibilidade de utilizá-los na produção de elementos estruturais com desempenho mecânico satisfatório. Com o intuito de contribuir para a previsão segura do comportamento de elementos estruturais de concreto reciclado produzido com esses agregados, neste trabalho, realizou-se modelagem numérica da flexão de vigas de concreto reciclado armado, utilizando-se como ferramenta computacional o *software* DIANA<sup>®</sup>. Os resultados numéricos indicaram que, de maneira geral, é possível prever satisfatoriamente o comportamento à flexão de vigas de concreto reciclado armado.

Abstract of Dissertation presented to PPGECEA/UEFS as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

## NUMERICAL MODELING OF THE BENDING OF REINFORCED RECYCLED CONCRETE BEAMS

Magno Teixeira Mota

September/2012

Advisors: Prof. Dr. Anderson de Souza Matos Gadéa

Prof. Dr. Koji de Jesus Nagahama

Department: Civil and Environment Engineering

The economic development and population growth cause the intense use of nonrenewable natural resources, causing the increasing in waste generation, such as the construction and demolition waste (CDW). The use of recycled aggregates from CDW in the production of concrete is one alternative to reducing the environmental problems caused by these waste. Several studies have shown that, in general, these aggregates cause changes in important engineering properties, such reduction of the compressive strength and modulus of elasticity. Nevertheless, some researches indicate the possibility of their use in the production of structural elements with satisfactory mechanical performance. In order to contribute to the safe prediction of the behavior of structural concrete made with recycled aggregates from CDW, in this work was carried out numerical modeling of the bending of reinforced recycled concrete beams, using the DIANA<sup>®</sup> software. The numerical results indicate that, in general, it is possible to predict satisfactorily the flexural behavior of reinforced recycled concrete beams.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1	OBJETIVOS .....	4
1.2	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	4
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	6
2.1	CONCRETO COM AGREGADOS RECICLADOS.....	6
2.1.1	Influência dos Agregados Reciclados em Propriedades Mecânicas do Concreto .....	6
2.1.2	Modelos Constitutivos para Concretos Reciclados .....	10
2.1.3	Desempenho à Flexão de Vigas de Concreto Reciclado Armado.....	14
2.2	MECÂNICA DA FRATURA .....	19
2.2.1	Mecânica da Fratura Linear Elástica .....	22
2.2.2	Mecânica da Fratura Não-Linear para Materiais Quase-Frágeis.....	25
2.2.3	Aplicação da Mecânica da Fratura a Vigas de Concreto Armado.....	33
2.3	MODELAGEM NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO .....	36
2.3.1	Modelos de Fissuração .....	36
2.3.1.1	Modelos de Fissuração Distribuída .....	37
2.3.1.1.1	Modelo Fixo de Fissuração Distribuída .....	39
2.3.1.1.2	Modelo Multidirecional de Fissuração Distribuída.....	43
2.3.1.1.3	Modelo rotacional de Fissuração Distribuída.....	46
2.3.1.1.4	Considerações sobre os Modelos de Fissuração Distribuída.....	47
2.3.2	Modelos de Comportamento do Concreto na Compressão .....	49
2.3.3	Modelos de Comportamento do Concreto na Tração.....	51
2.3.4	Representação da Armadura.....	53
2.3.5	Método dos Elementos Finitos com Procedimentos Iterativos .....	55

2.3.6	Análise Numérica de Vigas de Concreto Convencional Armado .....	59
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO DE MODELO NUMÉRICO PARA VIGAS DE CONCRETO RECICLADO ARMADO .....</b>	<b>65</b>
3.1	PARÂMETROS EXPERIMENTAIS REFERENTES ÀS VIGAS ANALISADAS.....	65
3.1.1	Vigas Ensaçadas por Maruyama <i>et al.</i> (2004) e Sato <i>et al.</i> (2007).....	65
3.1.2	Vigas Ensaçadas por Larrañaga (2004).....	67
3.1.3	Vigas Ensaçadas por Carneiro (2011).....	68
3.2	PROCEDIMENTOS DE MODELAGEM .....	69
<b>4</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>74</b>
4.1	RESULTADOS PARA VIGAS ENSAÇADAS POR MARUYAMA <i>et al.</i> (2004) E SATO <i>et al.</i> (2007).....	74
4.2	RESULTADOS PARA VIGAS PRODUZIDAS POR LARRAÑAGA (2004) .....	82
4.3	RESULTADOS PARA VIGAS ENSAÇADAS POR CARNEIRO (2011).....	88
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>91</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>93</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b>	Composição do agregado reciclado utilizado em algumas pesquisas. ....	6
<b>Figura 2</b>	Resistência à compressão (a) e módulo de elasticidade (b) de concretos reciclados para diferentes teores de substituição de agregados graúdos e miúdos naturais por agregados graúdos e miúdos reciclados. ....	7
<b>Figura 3</b>	Modelos de comportamento do concreto reciclado sob compressão uniaxial: (a) Xiao <i>et al.</i> (2005); (b) González-Fonteboa <i>et al.</i> (2011). ....	12
<b>Figura 4</b>	Modelo de comportamento na tração proposto por Xiao e Lan (2006 <i>apud</i> LI, 2008). ....	13
<b>Figura 5</b>	Comportamento à flexão de vigas sem armadura transversal em um trecho (LARRAÑAGA, 2004). ....	14
<b>Figura 6</b>	Comportamento à flexão de vigas com quantidade mínima de armadura transversal (LARRAÑAGA, 2004). ....	15
<b>Figura 7</b>	Padrão de fissuras: (a) vigas de concreto convencional armado; (b) vigas de concreto reciclado armado (LARRAÑAGA, 2004). ....	16
<b>Figura 8</b>	Seção transversal das vigas (dimensões em <i>cm</i> ) ensaiadas por Aragão (2007) (ARAGÃO, 2007). ....	17
<b>Figura 9</b>	Diagrama momento-deflexão para a seção central das vigas ensaiadas por Aragão (2007) (ARAGÃO, 2007). ....	17
<b>Figura 10</b>	Geometria (dimensões em milímetros) das vigas ensaiadas por Sato <i>et al.</i> (2007) (SATO <i>et al.</i> , 2007). ....	18
<b>Figura 11</b>	Diagramas momento-deflexão na seção central de vigas de concreto convencional e reciclado obtidas por Sato <i>et al.</i> (2007): (a) cura ao ar; (b) cura úmida. ....	18
<b>Figura 12</b>	Padrão de fissuras de vigas de concreto convencional e reciclado armado ensaiadas por Sato <i>et al.</i> (2007) (SATO <i>et al.</i> , 2007). ....	19
<b>Figura 13</b>	Modos de deformação da fissura: (a) modo I; (b) modo II; (c) modo III (LIMA, 2009). ....	19
<b>Figura 14</b>	Comportamento tensão-deformação na tração para diferentes tipos de materiais: (a) frágil; (b) dúctil; (c) quase-frágil. ....	20
<b>Figura 15</b>	Mecanismo de falha em uma placa infinita, com abertura elíptica, para diferentes tipos de materiais: (a) frágil; (b) dúctil; (c) quase-frágil (SHAH <i>et al.</i> , 1995). ....	21



<b>Figura 16</b>	Componentes de tensão e deslocamento em um sistema de coordenadas cartesiano. ....	23
<b>Figura 17</b>	(a) Placa fissurada, produzida com material frágil, sob tração; (b) Tensão normal nas proximidades da ponta da fissura (D'AVILA, 2003). ....	24
<b>Figura 18</b>	Curva tensão deformação para materiais quase-frágeis (SHAH <i>et al.</i> , 1995)..	26
<b>Figura 19</b>	Alguns mecanismos de enrijecimento na zona de processo de fratura: (a) <i>crack shielding</i> ; (b) desvio da fissura; (c) <i>aggregate bridging</i> ; (d) atrito entre superfícies de fissura; (e) encontro da ponta da fissura com um poro; (f) ramificação da fissura (SHAH <i>et al.</i> , 1995). ....	26
<b>Figura 20</b>	Aspectos gerais da zona de processo de fratura do concreto: (a) considerando-se as microfissuras na ponta da fissura principal; (b) desprezando-se as microfissuras na ponta da fissura principal (SHAH <i>et al.</i> , 1995).....	27
<b>Figura 21</b>	Modelagem do processo de fratura do concreto no modo I: (a) pressão de coesão com as superfícies da fissura fictícia em contato; (b) pressão de coesão com superfícies da fissura fictícia parcialmente separadas (SHAH <i>et al.</i> , 1995).....	28
<b>Figura 22</b>	Diagrama carga-deslocamento para um corpo de prova de concreto submetido à tração uniaxial com medidores de deformação em diferentes trechos (HORDIJK, 1991). ....	30
<b>Figura 23</b>	Separação da completa curva tensão-deformação na tração do concreto, de acordo com modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg <i>et al.</i> (1976) (HORDIJK, 1991). ....	30
<b>Figura 24</b>	Modelo de banda de fissura proposto Bažant e Oh (1983) (SHAH <i>et al.</i> , 1995). ....	32
<b>Figura 25</b>	Resposta carga-deflexão típica de vigas de concreto armado sob flexão (KWAK e FILIPPOU, 1990).....	33
<b>Figura 26</b>	Modos de falha de vigas de concreto armado para diferentes taxas de armadura longitudinal: (a) falha por escoamento do aço e esmagamento do concreto, para vigas normalmente armadas; (b) falha por esmagamento do concreto, para vigas superarmada; (c) falha por escoamento do aço, para vigas com a taxa de reforço mínima (SHAH <i>et al.</i> , 1995).....	34
<b>Figura 27</b>	Aplicação da Mecânica da Fratura a modelos de fissuração distribuída: (a) Concreto fissurado; (b) malha de elementos finitos com dimensões mínimas (BAŽANT e OH, 1983). ....	38

<b>Figura 28</b>	Sistema de coordenadas local e tensões locais atuantes na superfície de fissura (ROTS, 1988).....	40
<b>Figura 29</b>	Modelo multidirecional de fissuração (DIANA, 2005).....	44
<b>Figura 30</b>	Critérios de abertura de fissura para o modelo multidirecional: (a) constante; (b) linear (DIANA, 2005).....	45
<b>Figura 31</b>	Comportamento do painel de concreto armado para modelos de fissuração distribuída. (FEENSTRA; DE BORST, 1995).....	48
<b>Figura 32</b>	Padrões de fissura obtidos com os modelos fixo e rotacional (CERVENKA; CERVENKA, 1996 <i>apud</i> GAMINO, 2007).....	49
<b>Figura 33</b>	Modelos de comportamento do concreto sob compressão (DIANA, 2005).....	49
<b>Figura 34</b>	Modelo parabólico de compressão (DIANA, 2005).....	50
<b>Figura 35</b>	Modelos de comportamento do concreto sob tração (DIANA, 2005).....	52
<b>Figura 36</b>	Modelos de amolecimento disponíveis no DIANA (DIANA, 2005).....	52
<b>Figura 37</b>	Forma discreta de representação das armaduras (LIMA, 2009).....	53
<b>Figura 38</b>	Forma incorporada de representação das armaduras (LIMA, 2009).....	54
<b>Figura 39</b>	Modelos constitutivos pré-definidos para o comportamento do aço (DIANA, 2005).....	55
<b>Figura 40</b>	Discretização em elementos finitos (PROENÇA, 1988).....	55
<b>Figura 41</b>	Resposta carga-deslocamento para um problema unidimensional sem uso de procedimento iterativos de correção.....	58
<b>Figura 42</b>	Resposta carga-deslocamento para um problema unidimensional com uso do método Newton-Raphson: (a) regular; (b) modificado. ....	59
<b>Figura 43</b>	Resposta carga-deslocamento para um problema unidimensional com uso do método Quasi-Newton.....	59
<b>Figura 44</b>	Viga modelada por Menin <i>et al.</i> (2009). ....	60
<b>Figura 45</b>	Curvas carga-deslocamento obtidas a partir da modelagem numérica e do ensaio experimental (MENIN <i>et al.</i> , 2009). ....	61
<b>Figura 46</b>	Dimensões, em milímetros, e condições de apoio e carregamento das vigas modeladas por Araújo <i>et al.</i> (2010) (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2010).....	62

<b>Figura 47</b>	Resultados numéricos e experimental para vigas produzidas sem armadura transversal (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2010). .....	63
<b>Figura 48</b>	Resultados numéricos e experimental para vigas produzidas com armadura transversal (ARAÚJO <i>et al.</i> , 2010). .....	63
<b>Figura 49</b>	Geometria, posicionamento das armaduras e condições de carregamento das vigas ensaiadas por Sato <i>et al.</i> (2007) e Maruyama <i>et al.</i> (2004).....	65
<b>Figura 50</b>	Geometria, posicionamento das armaduras e condições de carregamento de vigas ensaiadas por Larrañaga (2004) (dimensões em cm).....	67
<b>Figura 51</b>	Geometria, posicionamento das armaduras e condições de carregamento das vigas ensaiadas por Carneiro (2011). .....	68
<b>Figura 52</b>	Elemento finito Q8MEM utilizado nas análises.....	72
<b>Figura 53</b>	Malha de elementos finitos e condições de contorno utilizadas nas análises das vigas produzidas por: (a) Maruyama <i>et al.</i> (2004) e Sato <i>et al.</i> (2007); (b) Larrañaga (2004); (c) Carneiro (2011). .....	73
<b>Figura 54</b>	Resposta carga-deflexão para a viga V-01-13WB usando-se diferentes modelos de fissuração.....	74
<b>Figura 55</b>	Diagrama carga-deflexão obtida para a viga V-01-13WB adotando-se o modelo rotacional de fissuração distribuída. ....	75
<b>Figura 56</b>	Resposta carga-deflexão obtida para a viga CFR-01-13WB usando-se o modelo rotacional. ....	75
<b>Figura 57</b>	Padrão de fissuração da viga VC45: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25 $\mu$ m; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.....	80
<b>Figura 58</b>	Padrão de fissuração para a viga CRC45: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25 $\mu$ m; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.....	80
<b>Figura 59</b>	Padrão de fissuração para a viga CFRC45: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25 $\mu$ m; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.....	81
<b>Figura 60</b>	Respostas força cortante-deslocamento obtidas numericamente com diferentes modelos de fissuração distribuída para a viga de referência HC-3 em comparação com a resposta experimental. ....	83

- Figura 61** Diagrama força cortante-deslocamento do modelo numérico desenvolvido com o modelo rotacional para a viga de referência HC-3. .... 85
- Figura 62** Diagrama carga-deslocamento do modelo numérico desenvolvido com o modelo rotacional para a viga HR100-3. .... 85
- Figura 63** Padrão de fissuração para a viga HC-3: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25  $\mu\text{m}$ ; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais. .... 87
- Figura 64** Padrão de fissuração para a viga HR100-3: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25  $\mu\text{m}$ ; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais. .... 87
- Figura 65** Respostas carga-deflexão obtidas numericamente para a viga de referência REF, usando-se diferentes modelos de fissuração distribuída. .... 88
- Figura 66** Respostas carga-deflexão obtida numericamente com o modelo rotacional de fissuração em comparação com as obtidas experimentalmente para as vigas ensaiadas por Carneiro (2011): (a) viga REF; (b) Viga AMR; (c) viga AGR; (d) viga AMGR. .... 89

## 1 INTRODUÇÃO

Uma das principais características do desenvolvimento econômico e do crescimento populacional é a utilização, cada vez mais intensa, de recursos naturais não renováveis, colocando em risco a possibilidade de um desenvolvimento sustentável. Um exemplo é a extração desenfreada de recursos naturais utilizados como matérias-primas da construção civil, como areia, arenoso e rochas britadas, que além de provocar a escassez dos mesmos na natureza, pode causar graves impactos ambientais.

A remoção de sedimentos aluviais de rios modifica seu perfil e equilíbrio natural, podendo alterar o quadro geológico e hidrogeológico da região na qual este se localiza. A remoção de materiais inertes de áreas montanhosas e formações rochosas também pode ser perigosa para o meio ambiente, alterando a paisagem e potencializando problemas de estabilidade (BIANCHINI *et al.*, 2005). Além disso, parte dos recursos naturais explorados, depois de processados pelas indústrias, transforma-se em resíduos, os quais, quando não gerenciados ou reciclados adequadamente, podem também acarretar sérios problemas ao meio ambiente e à saúde pública.

Neste cenário, a indústria da construção civil possui grande importância, pois é atualmente a maior consumidora de recursos naturais da sociedade, utilizando de 20 a 50% desses recursos explorados no mundo, gerando, durante o processo construtivo, mais de 50% dos resíduos sólidos urbanos. No Brasil, estima-se que a geração per capita de resíduos da indústria da construção civil, ou resíduos de construção e demolição (RCD), seja de 510 kg/hab/ano (SANTOS, 2007).

A deposição de RCD em locais inadequados acarreta mais consequências danosas ao meio ambiente, como assoreamento de rios, lagos e córregos, entupimento de galerias e bueiros, degradação de áreas urbanas e proliferação de animais que ameaçam a saúde pública, como escorpiões, aranhas e roedores. Além disso, apesar de ser considerado inerte pela NBR 10.004 (ABNT, 2004a), em levantamento bibliográfico internacional constatou-se que componentes orgânicos, como plásticos, tintas, óleos, asfaltos, madeiras, o amianto e algumas substâncias inorgânicas, como manganês, podem contaminar aterros e colocar em risco a saúde da população (ANGULO, 2005).

Estes problemas, aliados à grande possibilidade de escassez de matérias-primas naturais para a construção civil, tornam imprescindível o gerenciamento, o reaproveitamento e a reciclagem de RCD. No Brasil, o Conselho Nacional do Meio

Ambiente (CONAMA), por meio da resolução nº 307 de 2002, estabelece diretrizes, critérios e procedimentos para a gestão desses resíduos, considerando como resíduos da Construção Civil aqueles provenientes de construções, reformas, reparos e demolições, e os resultantes da preparação e da escavação de terrenos tais como tijolos, blocos cerâmicos, concreto em geral, solos, rochas, metais, resinas, tintas, madeiras e compensados, forros, argamassa, gesso, telhas, pavimento asfáltico, vidros, plásticos, tubulações, fiação elétrica, etc.

O CONAMA categoriza como Classe A os resíduos que podem ser utilizados, por meio da reciclagem, como agregados miúdos ou graúdos na produção de concretos. Esses resíduos são de origem mineral, tais como produtos à base de cimento, como blocos, concretos e argamassas, produtos cerâmicos, como tijolos e telhas, além de rochas, solos, entre outros. Embora exista essa especificação, em levantamento realizado por Miranda *et al.* (2009), verificou-se que apenas 3,6% dos resíduos de construção e demolição gerados no Brasil estariam sendo reciclados. Este índice é considerado modesto quando comparado com os de outros países, como Holanda, Dinamarca e Alemanha, que possuem índices de reciclagem entre 50% e 90% (ANGULO, 2005).

Viabilizar o uso de agregados reciclados de RCD Classe A em concretos é um dos maiores desafios para a reciclagem em massa desses resíduos, uma vez que estes apresentam elevada variabilidade em sua composição. Além disso, diversos estudos têm demonstrado que, de maneira geral, os agregados reciclados de RCD são mais porosos, menos densos e menos resistentes que os agregados naturais, o que causa alterações em importantes propriedades de engenharia do concreto, como redução da resistência à compressão e do módulo de elasticidade (BAIRAGI *et al.*, 1993; GÓMES-SABERÓN, 2002; BRITO *et al.*, 2005; KHATIB, 2005; RAHAL, 2007; EVANGELISTA e BRITO, 2007; CORINALDESI, 2010; KUMUTHA e VIJAI, 2010; YANG *et al.*, 2011). Apesar disso, Leite (2001) e Cabral (2007) concluíram em seus trabalhos que, de maneira geral, é possível utilizar agregados reciclados na produção de concretos com desempenho mecânico satisfatório. Cabral (2007) ainda destacou a possibilidade de utilização de concretos reciclados com durabilidade aceitável.

Alguns países, como Dinamarca, Holanda, Alemanha, Inglaterra e Brasil, já possuem normas técnicas para uso de concretos reciclados (ANGULO, 2005). Dessas, a norma brasileira NBR 15116 (ABNT, 2004c) é a mais conservadora, recomendando sua

utilização apenas em concreto sem função estrutural, com resistência máxima de 15 MPa, enquanto que as demais normas permitem o uso de concretos reciclados com resistência acima de 25 MPa.

Para que o campo de aplicação do concreto reciclado seja ampliado no Brasil, são necessários diversos estudos referentes à sua aplicabilidade na produção de elementos estruturais. Neste sentido, resultados obtidos por Aragão (2007) e Carneiro (2011) contribuem sinalizando a possibilidade de viabilidade técnica do emprego desses concretos na produção de vigas de concreto reciclado armado. Nas pesquisas realizadas por esses autores, vigas produzidas com concretos contendo agregados reciclados de RCD, submetidas à flexão, apresentaram desempenho estrutural satisfatório.

Resultados obtidos por Larrañaga (2004) e Sato *et al.* (2007), para vigas de concreto reciclado armado à flexão, também apresentaram boas perspectivas para a aplicação estrutural do concreto reciclado. O primeiro autor observou que a aderência reforço-concreto reciclado foi eficaz, mesmo empregando-se um elevado teor de agregados reciclados. Sato *et al.* (2007) concluíram que agregados reciclados podem ser utilizados na produção de concretos estruturais, embora a deflexão deva ser controlada, modificando-se as propriedades físicas dos concretos reciclados, se necessário.

Para que o concreto reciclado seja incorporado à construção civil de forma difundida, seu comportamento estrutural precisa ser previsto com segurança. Para isso, além de pesquisas experimentais, são necessárias investigações analíticas e numéricas. Entre estas, a modelagem numérica computacional destaca-se como importante procedimento, pois prevê, com confiabilidade, otimização de tempo e redução de custo, o comportamento de elementos estruturais.

As pesquisas sobre modelagem numérica de elementos construtivos de concreto reciclado apresentam-se em fase inicial, pois necessitam de significativa quantidade de resultados experimentais para sua validação. Dentre os trabalhos publicados, pode-se citar a pesquisa desenvolvida por Xiao *et al.* (2009), na qual um modelo numérico não-linear foi utilizado para analisar o comportamento de articulações de pórticos de concreto reciclado submetido a cargas sísmicas. Nesta análise, foram encontrados resultados condizentes com os testes experimentais, considerando-se, entre outras variáveis, a aderência do concreto reciclado às barras de aço.

Diversos programas computacionais comerciais, baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF), têm sido utilizados associadamente a conceitos da mecânica da fratura para a análise numérica do desempenho estrutural de novos materiais. Dentre estes, pode-se citar o *software* DIANA<sup>®</sup> (*Displacement method ANalyser*), desenvolvido pela TNO *Building and Construction Research* do *Department of Computational Mechanics* (Holanda) desde 1972, muito utilizado para análise de estruturas de concreto armado.

Com o intuito de contribuir para os estudos sobre o comportamento estrutural de elementos construtivos produzidos com concreto reciclado, para que no futuro possam ser determinados critérios de dimensionamento seguro desses elementos, neste trabalho foi simulado numericamente o comportamento de vigas de concreto reciclado armado, produzidas com agregados reciclados de RCD, utilizando-se como ferramenta computacional o *software* DIANA<sup>®</sup>, versão 9.0.

## 1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral do presente trabalho é modelar, numericamente, a flexão de vigas de concreto reciclado armado. Como objetivos específicos, têm-se:

- avaliar a aplicabilidade de diferentes modelos de fissuração distribuída;
- avaliar a influência dos agregados reciclados nos modelos numéricos obtidos.

## 1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos. O Capítulo 1 é composto por uma breve introdução ao tema da pesquisa, com apresentação da justificativa e dos objetivos da mesma.

O Capítulo 2 apresenta a fundamentação teórica do trabalho, destacando-se propriedades e aplicações estruturais do concreto contendo agregados reciclados de RCD. Além disso, também são abordados conceitos da Mecânica da Fratura e aspectos da modelagem numérica de estruturas de concreto armado.

No Capítulo 3, são apresentados os programas experimentais dos quais foram obtidos os parâmetros experimentais utilizados na pesquisa, bem como os procedimentos de modelagem utilizados.



O Capítulo 4 apresenta a análise e discussão dos resultados das simulações numéricas, comparando-os com os resultados experimentais.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho, avaliando-se, de modo geral, os resultados da pesquisa.

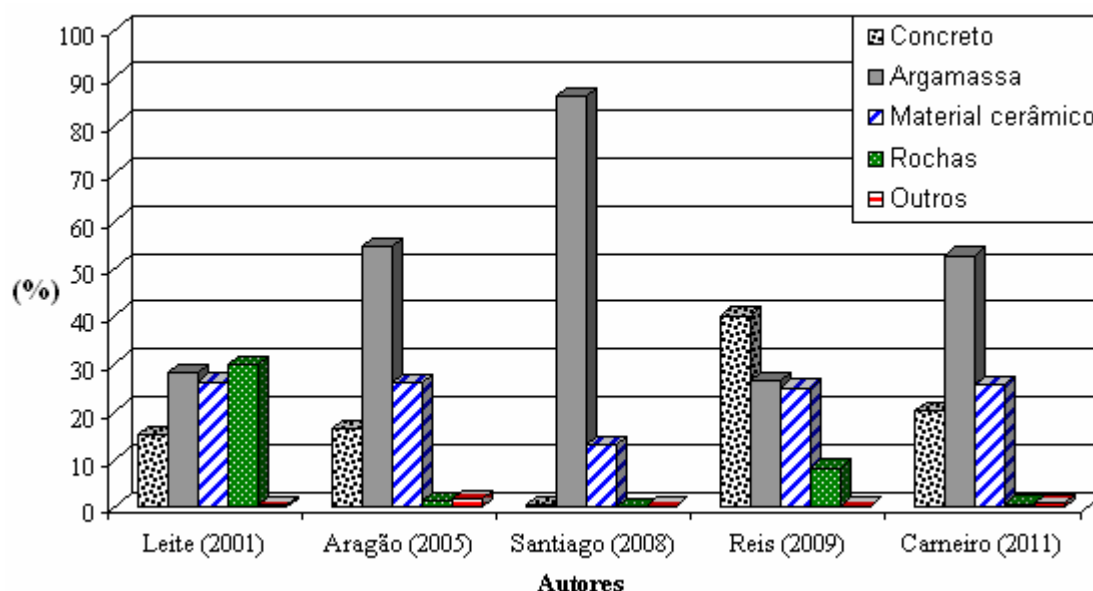
## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção, são apresentados aspectos importantes referentes às características do concreto contendo agregados reciclados, aos conceitos da mecânica da fratura e à modelagem numérica de estruturas de concreto armado.

### 2.1 CONCRETO COM AGREGADOS RECICLADOS

#### 2.1.1 Influência dos Agregados Reciclados em Propriedades Mecânicas do Concreto

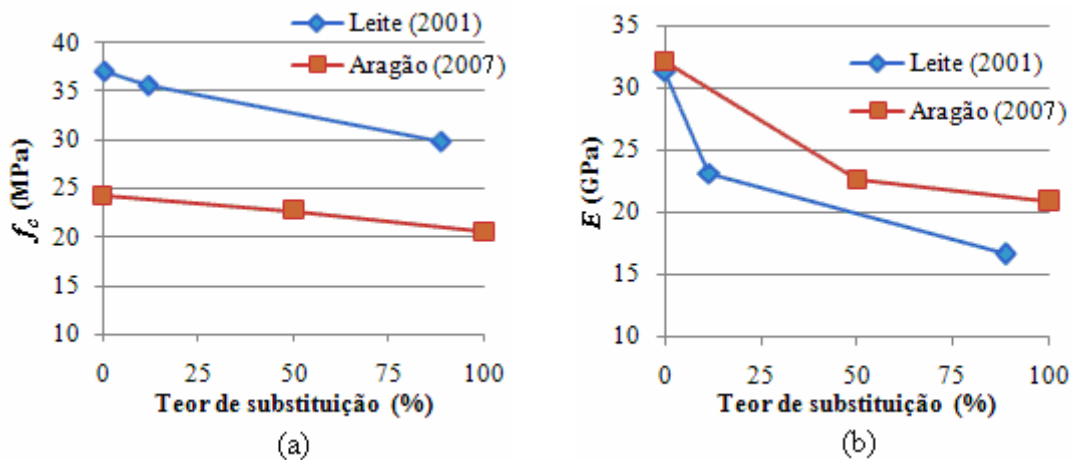
Uma característica dos resíduos de construção e demolição é a elevada variabilidade em sua composição, mesmo depois do processo de beneficiamento, o que influencia as características do agregado reciclado (BIACHINI *et al.*, 2005). Considerando-se este fato, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas com concreto produzido com agregados reciclados de RCD com composição variada, como mostrado na Figura 1. A grande variabilidade observada na composição do RCD está associada a diversos fatores, como localização geográfica, tipo e estágio da obra que originou os resíduos (POON *et al.*, 2001; CABRAL, 2007).



**Figura 1** Composição do agregado reciclado utilizado em algumas pesquisas.

Nos trabalhos mencionados na Figura 1, os agregados naturais foram substituídos por agregados reciclados em diferentes teores. Na Figura 2, são

apresentados os resultados de resistência à compressão ( $f_c$ ) e módulo de elasticidade ( $E$ ), aos 28 dias, de concretos reciclados obtidos por Leite (2001) e Aragão (2007), para diferentes teores de substituição de agregados graúdos e miúdos naturais por agregados graúdos e miúdos reciclados. Verifica-se, com o aumento do teor de agregados reciclados, uma redução tanto nos valores de resistência à compressão (Figura 2a) quanto no módulo de elasticidade (Figura 2b) do concreto reciclado. Porém, a redução é mais acentuada no módulo de elasticidade, fato este que também resulta no aumento da deformação de pico do material.



**Figura 2** Resistência à compressão (a) e módulo de elasticidade (b) de concretos reciclados para diferentes teores de substituição de agregados graúdos e miúdos naturais por agregados graúdos e miúdos reciclados.

Cabral *et al.* (2010) modelaram, a partir da análise estatística, resultados experimentais referentes à resistência à compressão e módulo de elasticidade de concretos produzidos com agregados reciclados de três importantes componentes dos RCD: argamassa, concreto e cerâmica vermelha. Os teores de substituição de agregados naturais por agregados reciclados foram 0%, 25%, 33%, 50% e 100%. Os modelos obtidos também têm como parâmetro independente a relação água-cimento ( $a/c$ ) e são definidos pela Equação (1) e Equação (2).

$$f_c = \left( \frac{115}{7,2^{a/c}} \right) \cdot [1 - (0,306 \cdot agr + 0,164 \cdot amr + 0,195 \cdot cgr + 0,058 \cdot cmr + 0,344 \cdot vgr - 0,136 \cdot vmr)] \quad (1)$$

$$E = \left( \frac{21}{(a/c)^{0,5}} \right) [1 - (0,344 \cdot agr + 0,150 \cdot amr + 0,214 \cdot cgr + 0,098 \cdot cmr + 0,438 \cdot vgr + 0,102 \cdot vmr)] \quad (2)$$

onde *agr*, *cgr* e *vgr* são os teores de substituição de agregados graúdos naturais por agregados graúdos reciclados de argamassa, concreto e cerâmica vermelha, respectivamente, enquanto que *amr*, *cmr* e *vmr* são os percentuais de agregados miúdos reciclados de argamassa, concreto e cerâmica vermelha, respectivamente.

Na pesquisa realizada por Cabral *et al.* (2010), o coeficiente de determinação, referente ao ajuste do modelo aos resultados experimentais, foi 96,5% para a resistência à compressão e 96,6% para o módulo de elasticidade, respectivamente, valores estes considerados satisfatórios. Observa-se nos modelos obtidos por esses autores que todos os agregados reciclados causaram redução no módulo de elasticidade do concreto. Em relação à resistência à compressão, apenas o agregado miúdo reciclado de cerâmica vermelha (*vmr*) contribuiu para o aumento dos valores dessa propriedade. Verifica-se ainda que os agregados graúdos reciclados de argamassa e cerâmica vermelha (*agr* e *vgr*) causaram as maiores reduções na resistência à compressão e módulo de elasticidade dos concretos reciclados.

Em relação à resistência à tração do concreto reciclado, em vários trabalhos, como os de Bairagi *et al.* (1993), Gómez-Saberón (2002) e Kumutha e Vijai (2010), foi observado que o aumento do teor de agregados reciclados causa a redução nos valores obtidos para essa propriedade, principalmente quando os agregados graúdos naturais são substituídos por agregados graúdos reciclados. Porém, Ravindrarajah e Tam (1987) e Leite (2001) produziram concretos contendo agregados miúdos reciclados com resistência à tração maior que os concretos convencionais de referência, indicando que o agregado miúdo reciclado pode contribuir para o aumento da resistência à tração do concreto reciclado. Segundo Leite (2001), é possível que a maior rugosidade, forma mais irregular e granulometria mais contínua do agregado miúdo reciclado contribua para a melhoria da zona de transição pasta/agregado do concreto, diminuindo eventuais microfissurações e aumentando a rigidez da matriz do mesmo.

Leite (2001) ainda concluiu que a razão entre a resistência à tração e a resistência à compressão ( $f_t/f_c$ ) do concreto reciclado é maior que as geralmente conhecidas para os concretos convencionais. Portanto, em situações de mesma resistência à compressão, concretos reciclados podem apresentar resistência à tração maior que a de concretos convencionais. Isso pode ser observado na Tabela 1, na qual são apresentados resultados obtidos por Larrañaga (2004) para concretos produzidos

com 0%, 25%, 50% e 100% de agregados graúdos reciclados, representados, respectivamente, por CREF, CR25, CR50 e CR100, com aproximadamente a mesma resistência à compressão. Verifica-se que a resistência à tração por compressão diametral dos concretos reciclados foi 8 a 19% maior que a do concreto convencional. Estes resultados são importantes principalmente para o comportamento mecânico de alguns elementos estruturais, como vigas e lajes, nas quais a fissuração e ruptura são significativamente influenciadas pela resistência à tração do concreto.

**Tabela 1** Valores de resistência à tração por compressão diametral para concretos reciclados e convencional com aproximadamente a mesma resistência à compressão (LARRAÑAGA, 2004).

Concreto	Resistência à compressão (MPa)	Resistência à tração (MPa)
CREF	29	2,49
CR25	28	2,97
CR50	29	2,7
CR100	28	2,72

Outra importante propriedade que deve ser considerada, principalmente para aplicações estruturais, é a aderência entre barras de aço e o concreto reciclado. Com o objetivo de avaliar esta propriedade, Xiao e Falkner (2007) e Reis (2009) realizaram ensaios de arrancamento de barras de aço lisas e nervuradas em concretos reciclados.

Xiao e Falkner (2007) utilizaram agregados graúdos reciclados de resíduos de concreto, com teores de substituição iguais a 0%, 50% e 100%. Para barras de aço lisas, tais autores verificaram uma redução de 12% na resistência ao arrancamento para concretos com 50% de agregados graúdos reciclados e uma redução de 6% para os concretos com 100% agregados reciclados. Entretanto, quando os ensaios foram realizados com barras de aço nervuradas, a variação do teor de agregados reciclados não causou diferença apreciável na tensão máxima de aderência.

Reis (2009) utilizou agregados miúdos reciclados de RCD com composição variada (Figura 1) e teores de substituição iguais a 0%, 25% e 50%. Na pesquisa realizada por essa autora, a variação do teor de agregado reciclado causou redução da resistência ao arrancamento de barras lisas e nervuradas. Para barras lisas, a redução máxima foi de 30%, enquanto que para nervuradas a redução máxima foi de 21%.

Apesar disso, de modo geral, o comportamento de aderência entre as barras nervuradas e o concreto reciclado apresentou-se em conformidade com prescrições normativas.

### 2.1.2 Modelos Constitutivos para Concretos Reciclados

A partir de resultados experimentais, Xiao *et al.* (2005) e González-Fonteboa *et al.* (2011), baseados em modelos constitutivos desenvolvidos para o concreto convencional, propuseram modelos analíticos para o comportamento de concretos reciclados sob compressão uniaxial. Para o comportamento à tração, destaca-se o modelo proposto por Xiao e Lan (2006 *apud* LI, 2008). É importante ressaltar que esses modelos são referentes a concretos produzidos apenas com agregados graúdos reciclados de resíduos de concreto.

Xiao *et al.* (2005), que utilizaram como base o modelo constitutivo proposto por Guo e Zhang (1982 *apud* XIAO *et al.*, 2005) para a compressão uniaxial de concreto convencional, propuseram, para concretos reciclados, a expressão

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = \begin{cases} a \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + (3-2a) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 + (a-2) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^3, & \text{para } \varepsilon < \varepsilon_0 \\ \frac{\varepsilon}{b \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right)^2 + \varepsilon}, & \text{para } \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\sigma_c$  e  $\varepsilon$  são a tensão e a deformação na compressão, respectivamente,  $f_c$  é a resistência à compressão do concreto reciclado. Os parâmetros  $a$  e  $b$  foram obtidos por meio de análise de regressão de dados e dependem do teor de agregados graúdos reciclados ( $r$ ), seus valores são calculados a partir das Equações (4) e (5). A deformação de pico do concreto reciclado ( $\varepsilon_0$ ) é definida pela Equação (6), que foi determinada utilizando-se como base a Equação (7), proposta por Nicolo (1994 *apud* XIAO *et al.*, 2005) para a deformação de pico do concreto convencional ( $\varepsilon_0^n$ ).

$$a = 2,2(0,748r^2 - 1,231r + 0,975) \quad (4)$$

$$b = 0,8(7,6483r + 1,142) \quad (5)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^n \cdot \left(1 + \frac{r}{\beta}\right) \quad (6)$$

$$\varepsilon_0^n = 0,00076 + \left[ (0,626f_c - 4,33) \cdot 10^{-7} \right]^{0,5} \quad (7)$$

onde o parâmetro  $\beta$  é calculado via a expressão  $\beta = 65,715r^2 - 109,43r + 48,989$ .

Em pesquisa realizada por González-Fonteboa *et al.* (2011), utilizou-se como base a Equação (8), que é a lei constitutiva recomendada pelo Eurocode 2 (EUROCODE 2, 1992) para o concreto convencional com resistência à compressão inferior ou igual a 50 MPa, até a deformação última de 3,5‰.

$$\sigma_c = f_{cm} \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \quad (8)$$

onde  $\sigma_c$  é a tensão na compressão e  $f_{cm}$  é a resistência à compressão do concreto. Os parâmetros  $\eta$  e  $k$  são determinados pelas expressões  $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$  e  $k = 1,05 \cdot E_{cm} \cdot |\varepsilon_{c1}| / f_{cm}$ , nas quais a deformação de pico  $\varepsilon_{c1}$  e o módulo de elasticidade secante  $E_{cm}$  são definidos como função da resistência à compressão do concreto, de tal forma que  $\varepsilon_{c1} = 0,7 \cdot (f_{cm})^{0,31}$  e  $E_{cm} = 22 \cdot (f_{cm}/10)^{0,3}$ .

De acordo com González-Fonteboa *et al.* (2011), a Equação (8) pode ser utilizada para concretos reciclados estabelecendo-se três coeficientes de transformação: um para o módulo secante ( $\phi_{cm}^{rec}$ ), outro para a deformação de pico ( $\alpha_c^{rec}$ ) e outro para a deformação última ( $\beta_u^{rec}$ ). Esses coeficientes foram ajustados por meio de análise de regressão de dados e dependem da porcentagem de agregados graúdos reciclados (%AGR), seus valores são definidos pelas Equações (9), (10) e (11). Com a adoção desses coeficientes, o módulo de elasticidade secante ( $E_{cm}^{rec}$ ), a deformação de pico ( $\varepsilon_{c1}^{rec}$ ) e a deformação última ( $\varepsilon_u^{rec}$ ) do concreto reciclado são calculados, respectivamente, pelas Equações (12), (13) e (14). Usando-se este modelo, o parâmetro  $f_{cm}$  da Equação (8) representa a resistência à compressão do concreto reciclado.

$$\phi_{cm}^{rec} = -0,0020 \cdot (\%AGR) + 1 \quad (9)$$

$$\alpha_c^{rec} = 0,0021 \cdot (\%AGR) + 1 \quad (10)$$

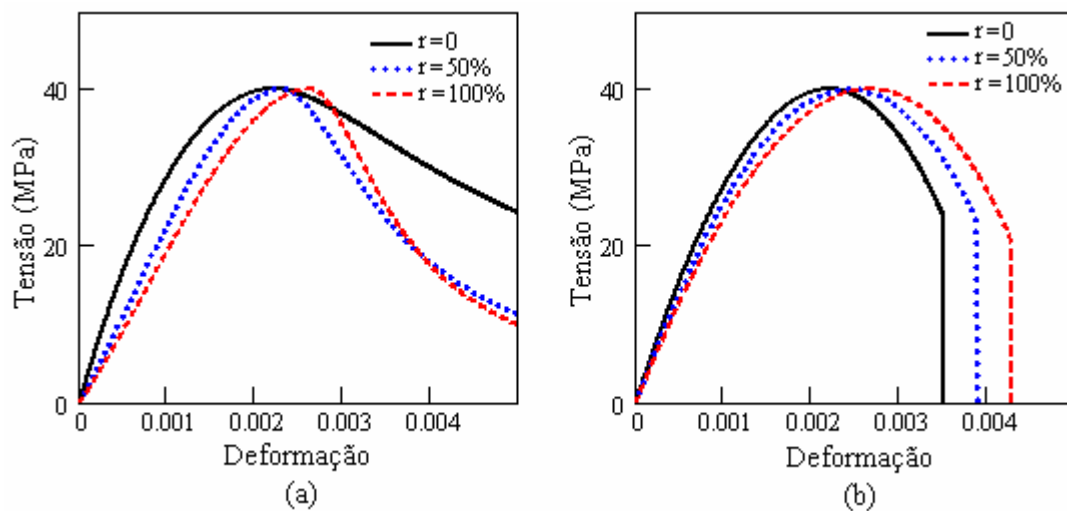
$$\beta_u^{rec} = 0,0022 \cdot (\%AGR) + 1 \quad (11)$$

$$E_{cm}^{rec} = E_{cm} \cdot \phi_{cm}^{rec} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{c1}^{rec} = \varepsilon_{c1} \cdot \alpha_c^{rec} \quad (13)$$

$$\varepsilon_u^{rec} = \varepsilon_u \cdot \beta_u^{rec} \quad (14)$$

A Figura 3 apresenta curvas correspondentes aos modelos propostos por Xiao *et al.* (2005) e González-Fonteboa *et al.* (2011) para concretos com mesma resistência à compressão e diferentes percentuais de agregados graúdos reciclados. Observa-se que, com o aumento do teor de substituição desses agregados ( $r$ ), ocorre uma redução do módulo de elasticidade e um aumento da deformação de pico. Para o modelo proposto por Xiao *et al.* (2005), verifica-se uma acentuada alteração na forma da curva no ramo descendente.



**Figura 3** Modelos de comportamento do concreto reciclado sob compressão uniaxial: (a) Xiao *et al.* (2005); (b) González-Fonteboa *et al.* (2011).

Xiao e Lan (2006 *apud* LI, 2008), a partir de experimentos que avaliaram a influência do teor de agregados reciclados na relação tensão-deformação do concreto reciclado sob tração uniaxial, desenvolveram um modelo analítico para descrever a relação tensão-deformação de concretos reciclados com uma resistência na classe C30. Nos experimentos mencionados, devido à limitação da rigidez da máquina de ensaio, foi

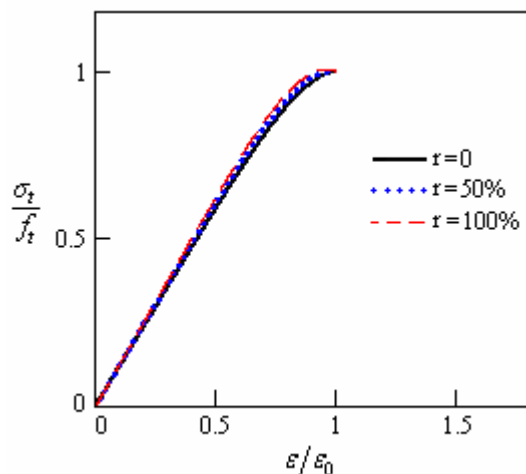


obtido somente o ramo ascendente da curva tensão-deformação na tração, observando-se, com o aumento do teor de agregados reciclados, um pequeno aumento da deformação de pico e uma acentuada diminuição da resistência à tração e do módulo de elasticidade. Utilizou-se como base o modelo tensão-deformação proposto por Guo e Zhang (1988 *apud* LI, 2008) para a tração uniaxial do concreto convencional, definido por

$$\frac{\sigma_t}{f_t} = \gamma \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - (\gamma - 1) \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^6 \quad (15)$$

onde  $\sigma_t$  e  $\varepsilon$  são, respectivamente, a tensão e a deformação na tração,  $f_t$  e  $\varepsilon_0$  são a resistência à tração e a deformação de pico, respectivamente, e  $\gamma = 1,2$ . Por meio de análise de regressão de dados, Xiao e Lan (2006 *apud* LI, 2008) propuseram que, para o concreto reciclado, o valor do parâmetro  $\gamma$  seja estimado pela expressão  $\gamma = 0,07 \cdot r + 1,19$ , onde  $r$  é o teor de agregados reciclados.

Como pode ser observado na Figura 4, no modelo proposto por esses autores, a variação do teor de agregados reciclados praticamente não altera a forma da curva tensão-deformação na tração.

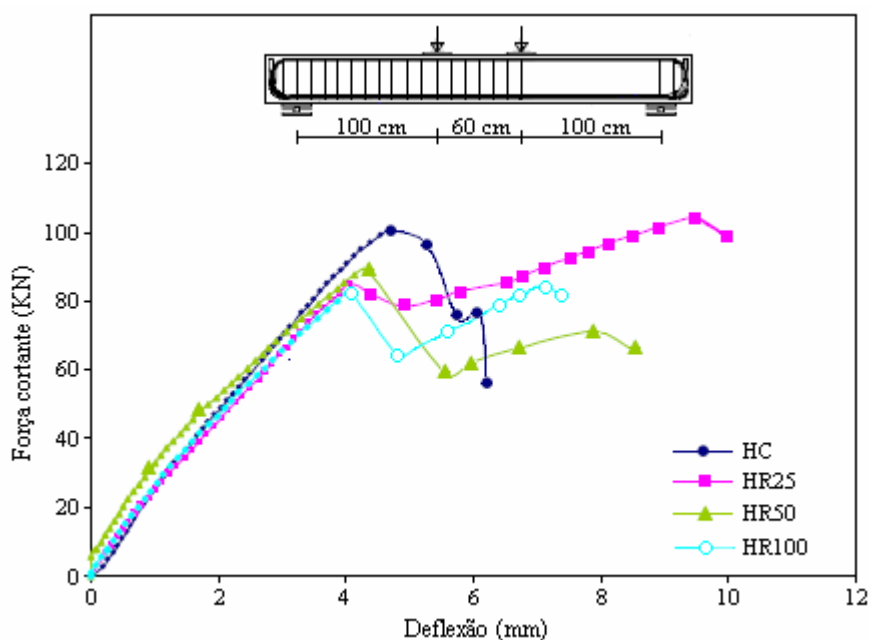


**Figura 4** Modelo de comportamento na tração proposto por Xiao e Lan (2006 *apud* LI, 2008).

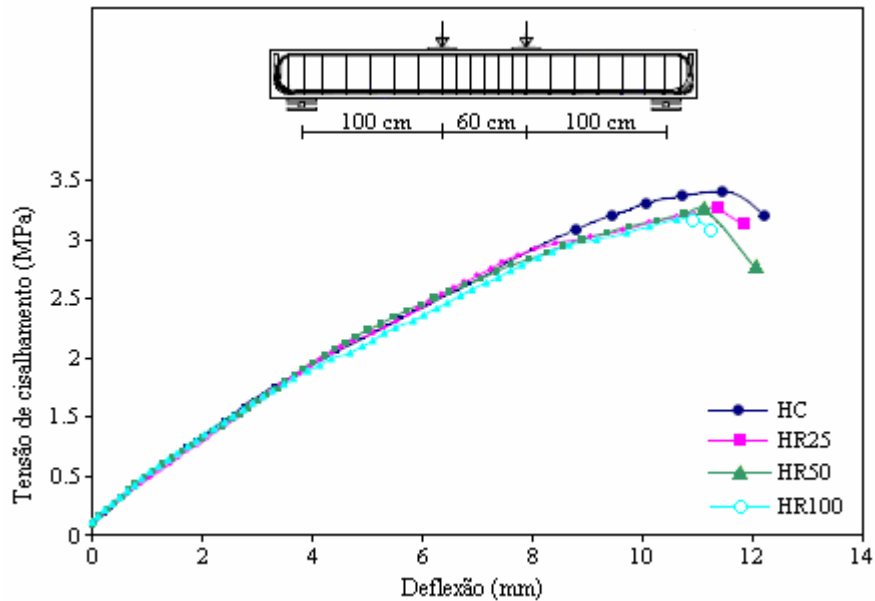
### 2.1.3 Desempenho à Flexão de Vigas de Concreto Reciclado Armado

Com o intuito de avaliar o comportamento estrutural de vigas de concreto reciclado armado, diversos estudos experimentais, como os realizados por Larrañaga (2004), Aragão (2005), Sato *et al.* (2007) e Carneiro (2011), vêm sendo desenvolvidos, utilizando-se como principal parâmetro variável o teor de agregados reciclados.

Larrañaga (2004) realizou ensaios de flexão em quatro pontos em vigas nas quais os concretos reciclados foram produzidos com os teores de 25, 50 e 100% de agregados graúdos reciclados de resíduos de concreto. Também foram variadas a distribuição e a taxa de reforço transversal. Todos os concretos, convencionais e reciclados, foram dosados de maneira a se obter a mesma resistência à compressão, aproximadamente 40 MPa. As vigas, com dimensões iguais a 20 x 35 x 305 cm, foram reforçadas com a mesma quantidade de armadura longitudinal, sendo estas calculadas com o objetivo de assegurar a ruptura por cisalhamento, evitando a ruptura prévia por flexão. Na Figura 5 e Figura 6, são apresentados resultados referentes ao comportamento mecânico, sob flexão, das vigas produzidas. As terminologias HC, HR25, HR50 e HR100 são referentes aos concretos produzidos, respectivamente, com 0%, 25%, 50% e 100% de agregados graúdos reciclados.



**Figura 5** Comportamento à flexão de vigas sem armadura transversal em um trecho (LARRAÑAGA, 2004).

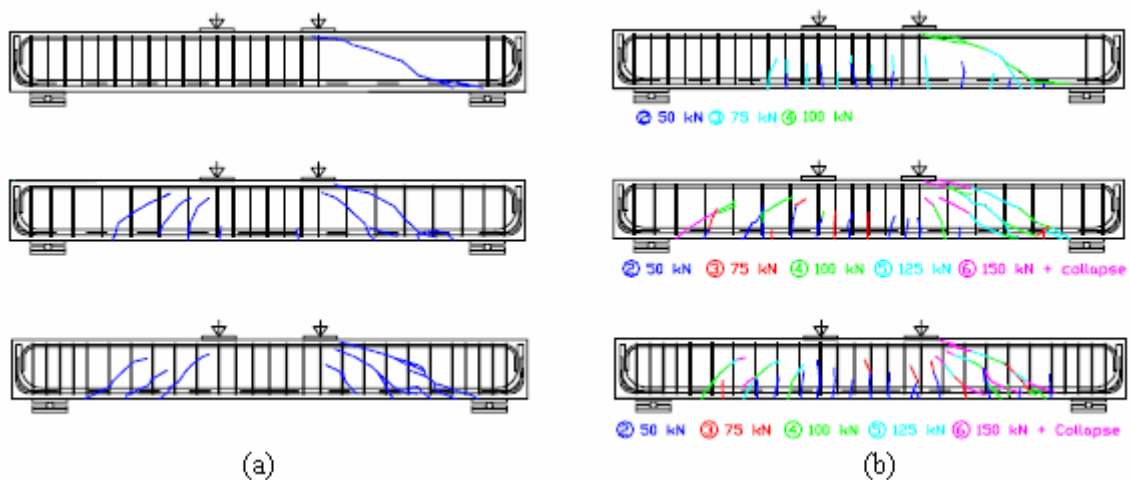


**Figura 6** Comportamento à flexão de vigas com quantidade mínima de armadura transversal (LARRAÑAGA, 2004).

Para vigas sem armadura transversal em um trecho (Figura 5), verifica-se que a viga de referência HC apresentou ruptura brusca, resultante, segundo Larrañaga (2004), do aparecimento de uma única fissura de cisalhamento no trecho sem armadura transversal. Já as vigas de concreto reciclado, após o aparecimento da fissura de cisalhamento, apresentaram enrijecimento, causado, segundo o autor, pelo esmagamento da parte superior mais comprimida da viga. Verifica-se também que, exceto para a viga HR25, a resistência ao cisalhamento diminuiu com o aumento do teor de agregados reciclados. Para vigas com a quantidade de armadura mínima estabelecida pela norma espanhola de concreto estrutural EHE-99 (Figura 6), os comportamentos das vigas divergiram apenas quando estas se aproximaram da ruptura. Observa-se, com a variação do teor de agregados, um decréscimo máximo de 10% no valor da tensão máxima de cisalhamento.

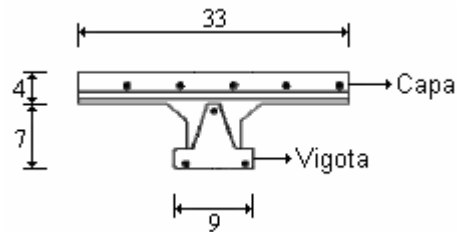
Na Figura 7, apresenta-se o padrão de fissuras de vigas ensaiadas por Larrañaga (2004), produzidas com concreto convencional (Figura 7a) e concreto contendo 100% de agregados reciclados (Figura 7b), para três diferentes taxas de armadura transversal. Verifica-se que as vigas de concreto reciclado armado apresentaram número de fissuras significativamente maior que as de concreto convencional armado. Apesar disso, segundo o autor, exceto para a viga sem estribos em um trecho, não foram observadas grandes diferenças no modo de ruptura das vigas,

que foi caracterizado pelo esmagamento do concreto na parte superior das mesmas devido à combinação de tensões de compressão e cisalhamento.

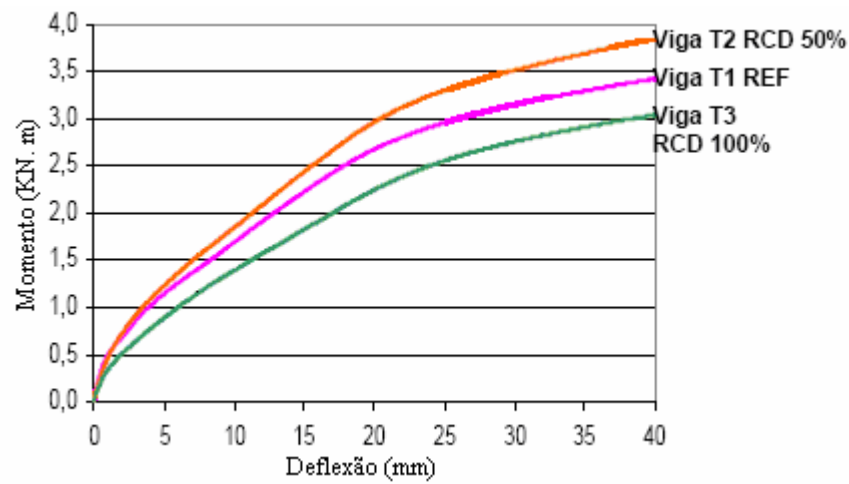


**Figura 7** Padrão de fissuras: (a) vigas de concreto convencional armado; (b) vigas de concreto reciclado armado (LARRAÑAGA, 2004).

Em pesquisa desenvolvida por Aragão (2007), foram realizados ensaios de flexão em quatro pontos em vigas de seção T produzidas com concretos contendo teores de 0%, 50% e 100% de agregados miúdos e graúdos reciclados, provenientes de RCD com composição variada (Figura 1). As vigas, com 300 *cm* de comprimento, foram compostas por uma vigota de concreto convencional e uma capa na qual foram utilizados os concretos reciclados (Figura 8). Os resultados experimentais obtidos pelo autor são apresentados na Figura 9, onde T1, T2 e T3 representam as vigas produzidas com teores de agregados reciclados iguais a 0%, 50% e 100%, respectivamente. Observa-se que a viga T2 obteve desempenho mecânico superior ao da viga de referência T1, apresentando menor deflexão central para o mesmo momento fletor. Segundo o autor, uma possível explicação para este resultado é o fato de o agregado reciclado apresentar maior absorção, textura mais rugosa, forma mais irregular e granulometria mais contínua que os agregados naturais, o que pode ter aumentado consideravelmente a aderência pasta/agregado na viga T2. Entretanto, considerando-se o módulo de elasticidade dos concretos utilizados nas vigas, este resultado não era o esperado, pois o valor deste parâmetro para o concreto da viga T2 foi 29% menor que o encontrado para a viga de referência. Para a viga T3, sob o mesmo momento fletor das demais vigas, observou-se considerável aumento na deflexão central.

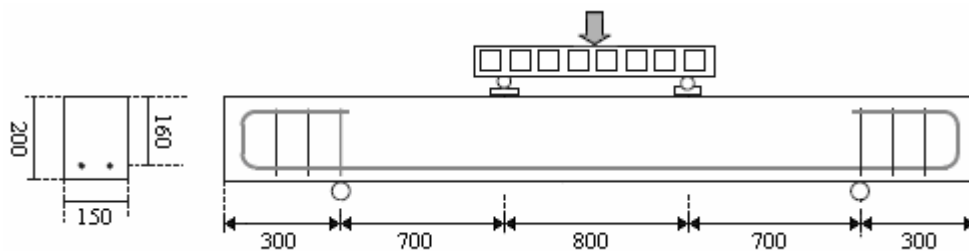


**Figura 8** Seção transversal das vigas (dimensões em *cm*) ensaiadas por Aragão (2007) (ARAGÃO, 2007).

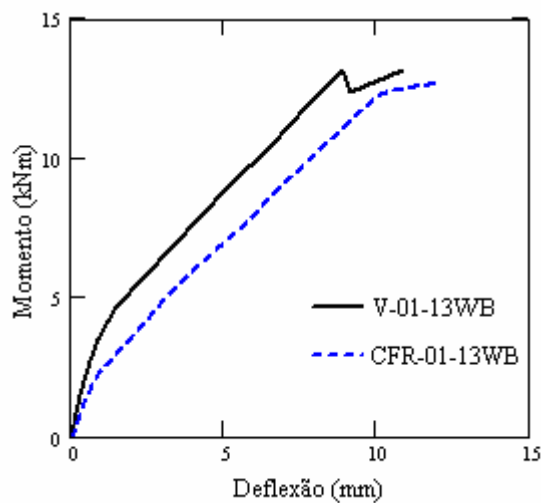


**Figura 9** Diagrama momento-deflexão para a seção central das vigas ensaiadas por Aragão (2007) (ARAGÃO, 2007).

Sato *et al.* (2007) avaliaram o comportamento à flexão de vigas de concreto reciclado armado, com geometria mostrada na Figura 10, variando parâmetros como o teor de agregados miúdos e graúdos reciclados de resíduos de concreto e a condição de cura dos espécimes. Os teores de agregados miúdos e graúdos reciclados foram 0% e 100%, enquanto que as condições de cura foram úmida e ao ar. A Figura 11 apresenta diagramas momento-deflexão obtidos para a seção central de vigas de concreto convencional (V-01-13WB) e reciclado (CFR-01-13WB) submetidas à condição de cura úmida. Observa-se que as deflexões das vigas de concreto reciclado foram maiores que as observadas nas vigas de concreto convencional, o que, segundo Sato *et al.* (2007), pode ser consequência da elevada retração do concreto reciclado, que causa maior número de microfissuras, prejudicando a aderência aço-concreto reciclado. De acordo com os autores, para o momento fletor associado ao início do escoamento do aço das armaduras, as taxas de aumento da deflexão, para as condições de cura úmida e ao ar, foram 17% e 19%, respectivamente.

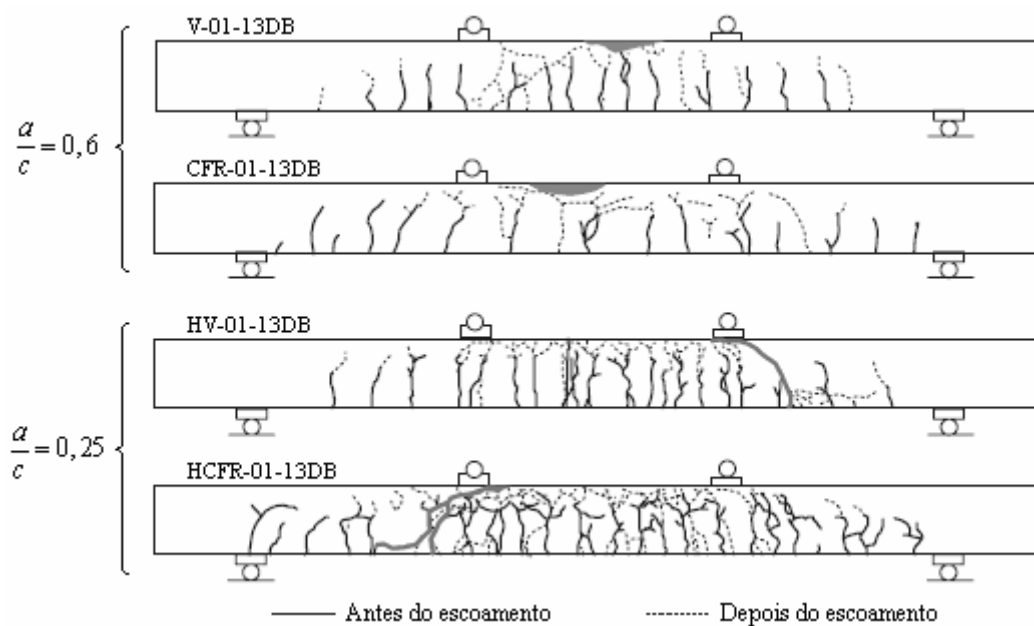


**Figura 10** Geometria (dimensões em milímetros) das vigas ensaiadas por Sato *et al.* (2007) (SATO *et al.*, 2007).



**Figura 11** Diagramas momento-deflexão na seção central de vigas de concreto convencional e reciclado obtidas por Sato *et al.* (2007).

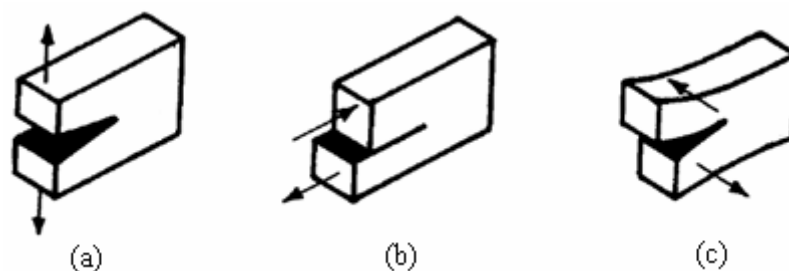
A Figura 12 apresenta o padrão de fissuras de vigas produzidas por Sato *et al.* (2007), submetidas à cura ao ar, para diferentes fatores água-cimento ( $a/c$ ). Para as vigas V-01-13DB e CFR-01-13DB, produzidas, respectivamente, com concreto convencional e reciclado, foi utilizado fator  $a/c$  igual a 0,60. Para as vigas HV-01-13DB e HCFR-01-13DB, produzidas, respectivamente, com concreto convencional e reciclado, o fator  $a/c$  utilizado foi 0,25. Observa-se que o fator  $a/c$  teve influência na quantidade de fissuras e na forma de ruptura. Para o fator  $a/c$  de 0,60, as vigas de concreto convencional e reciclado apresentaram relativamente poucas fissuras e ruptura por flexão pura. Por outro lado, para este fator igual a 0,25, a ruptura ocorreu por flexão e cisalhamento, com notável diferença na quantidade de fissuras das vigas de concreto convencional e reciclado.



**Figura 12** Padrão de fissuras de vigas de concreto convencional e reciclado armado ensaiadas por Sato *et al.* (2007) (SATO *et al.*, 2007).

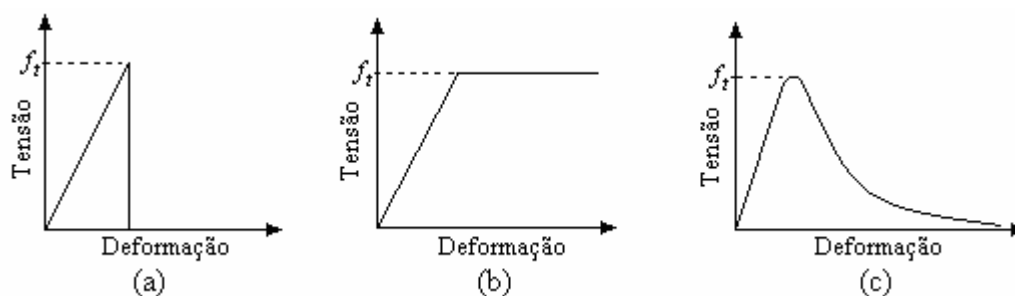
## 2.2 MECÂNICA DA FRATURA

Segundo Shah *et al.* (1995), a Mecânica da Fratura é o estudo da resposta e falha de estruturas em consequência do início e propagação de fissuras, que podem ser deformadas de três modos distintos e independentes, conforme as condições de carregamento da estrutura (Figura 13). No modo I, conhecido como modo de tração ou modo de abertura, ocorre a separação das superfícies de fissura, como ilustra a Figura 13a. No modo II (Figura 13b), também conhecido como modo de deslizamento ou cisalhamento planar, as superfícies da fissura deslizam uma sobre a outra. Já no modo III (Figura 13c), conhecido também como modo de rasgamento ou cisalhamento antiplanar, as superfícies da fissura movem-se paralelamente uma em relação à outra e em relação à aresta de propagação.



**Figura 13** Modos de deformação da fissura: (a) modo I; (b) modo II; (c) modo III (LIMA, 2009).

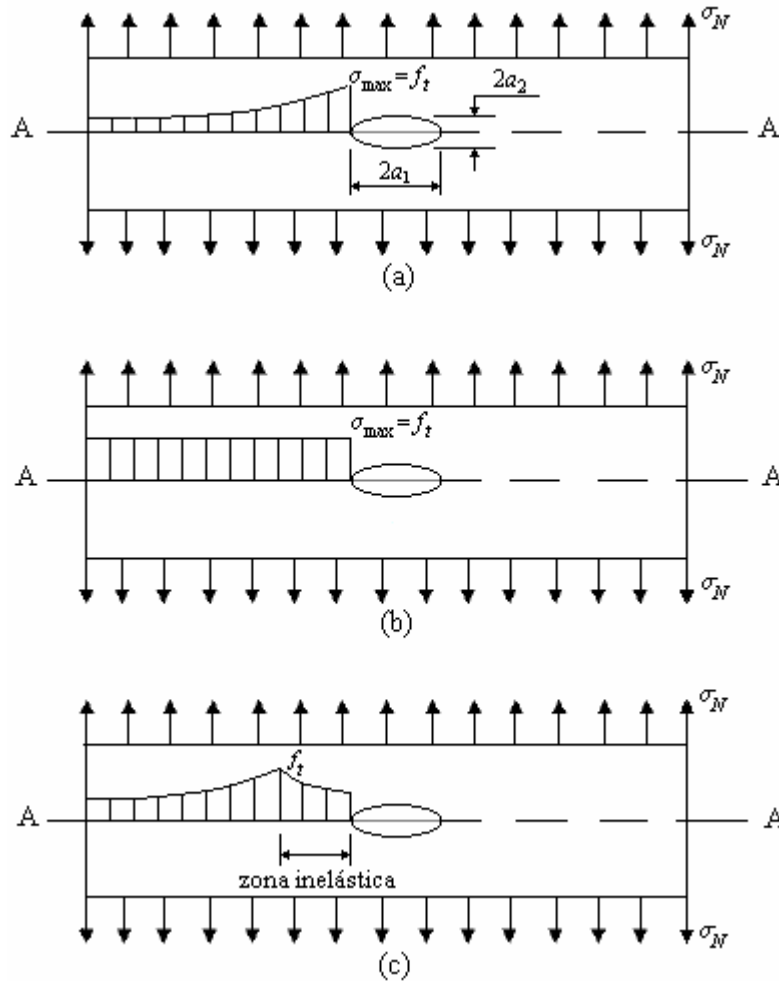
O mecanismo de falha de estruturas, de acordo com Shah *et al.* (1995), é notavelmente influenciado pelos materiais utilizados, os quais, em sua maioria, podem ser classificados como frágeis, dúcteis ou quase-frágeis, com base em sua resposta tensão-deformação na tração (Figura 14). Para materiais frágeis (Figura 14a), a tensão reduz-se a zero após a resistência à tração ( $f_t$ ) ser atingida. Em materiais dúcteis (Figura 14b), a tensão permanece constante após a tensão de pico ser alcançada. Por outro lado, em materiais quase-frágeis (Figura 14c), verifica-se que, após resistência à tração ter sido alcançada, a tensão suportada diminui gradualmente.



**Figura 14** Comportamento tensão-deformação na tração para diferentes tipos de materiais: (a) frágil; (b) dúctil; (c) quase-frágil.

Para uma compreensão conceitual da relação entre a falha das estruturas e o tipo de material, pode-se considerar uma placa infinita, com um defeito modelado por uma abertura elíptica, submetida a uma tensão axial  $\sigma_N$ , conforme mostrado na Figura 15 (SHAH *et al.*, 1995). Devido à presença da abertura elíptica na placa, a distribuição de tensões é alterada de tal forma que a máxima tensão na borda da abertura ( $\sigma_{\max}$ ) é maior que a tensão aplicada  $\sigma_N$ . Para um material perfeitamente elástico (Figura 15a), sempre que  $\sigma_{\max}$  atingir a resistência à tração do material, ocorrerá falha catastrófica, ou seja, haverá a ruptura da placa mesmo que a tensão  $\sigma_N$  seja anulada, processo este associado à Mecânica da Fratura Linear Elástica. Neste caso, a relação entre  $\sigma_{\max}$  e  $\sigma_N$  é estabelecida pela Equação (16) (SHAH *et al.*, 1995).





**Figura 15** Mecanismo de falha em uma placa infinita, com abertura elíptica, para diferentes tipos de materiais: (a) frágil; (b) dúctil; (c) quase-frágil (SHAH *et al.*, 1995).

$$\sigma_{\max} = \left(1 + \frac{2a_1}{a_2}\right) \sigma_N = K_t \sigma_N \quad (16)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são, respectivamente, o semi-eixo maior e menor da elipse, e  $K_t$  é o fator de concentração de tensões.

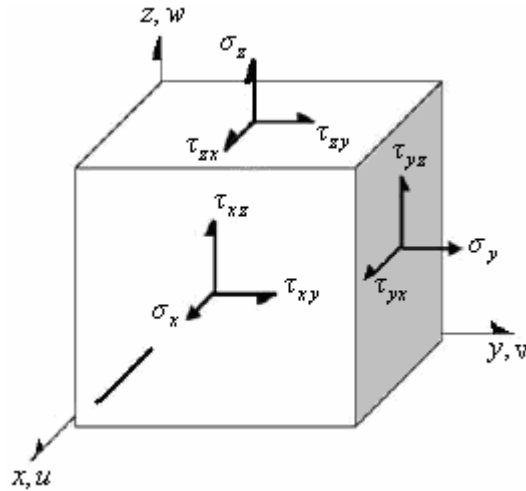
Em placas produzidas com material dúctil (Figura 15b), a tensão aplicada  $\sigma_N$  pode aumentar continuamente depois que  $\sigma_{\max}$  alcançar a resistência à tração do material, devido à redistribuição de tensões plásticas. Apenas ocorrerá a ruptura da placa quando a tensão normal em toda a seção A-A atingir a resistência à tração. Para uma placa produzida com material quase-frágil (Figura 15c), verifica-se o desenvolvimento de uma zona inelástica, ou zona de processo de fratura, na região em que a máxima tensão alcança a resistência à tração do material. À medida que o processo de fratura é realizado, a tensão normal na borda da abertura elíptica diminui,

resultando em um comportamento na resposta tensão-deformação denominado de amolecimento. O mecanismo de fratura apresentado para esses dois materiais estão associados à Mecânica da Fratura Não-Linear, aplicada a materiais com comportamento não-linear (SHAH *et al.*, 1995).

### 2.2.1 Mecânica da Fratura Linear Elástica

A primeira aplicação de conceitos da Mecânica da Fratura foi realizada por Griffith, no início do século XX, ao analisar o comportamento de estruturas com uma fissura pontual. A partir das idéias de Griffith, foi desenvolvida uma formulação da Mecânica da Fratura para materiais frágeis, com comportamento considerado puramente linear-elástico, como vidro e alguns tipos de metais cujas falhas, inseridas acidental ou deliberadamente, promovem o aparecimento de uma única fissura (PROENÇA, 1988; SHAH *et al.*, 1995). Tal formulação é conhecida como Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) e tem como base a teoria da elasticidade.

Na Figura 16, é ilustrado um elemento infinitesimal de volume em um ponto qualquer  $(x, y, z)$ , não fissurado, de um corpo sob tensão. As componentes de tensão  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  estão associadas às componentes de deformação  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$ , respectivamente. De acordo com a teoria da elasticidade, para materiais homogêneos, isotrópicos e elástico-lineares no estado plano de tensão, onde se considera  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , as componentes de tensão relacionam-se com as componentes de deformação por meio das equações apresentadas, de forma matricial, na Equação (17).



**Figura 16** Componentes de tensão e deslocamento em um sistema de coordenadas cartesiano.

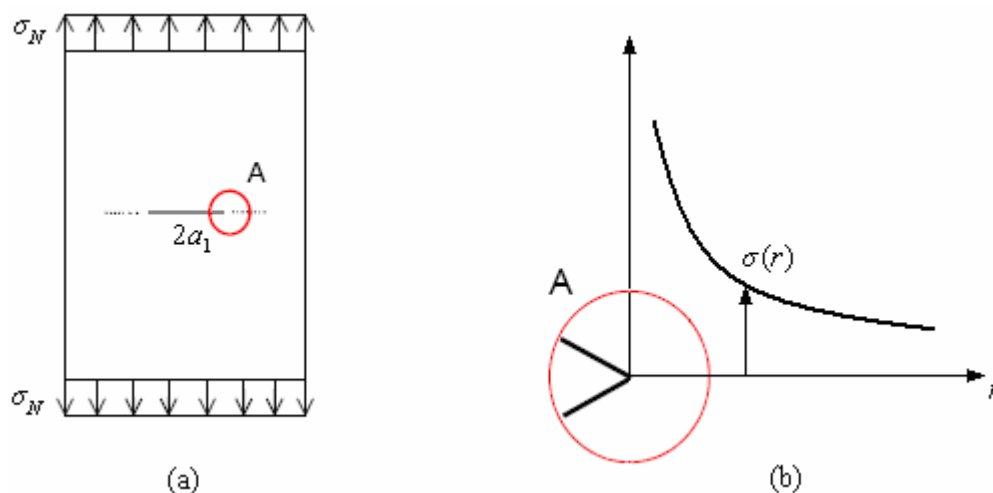
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

onde  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do material. Esta equação pode ser escrita na forma  $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ , onde  $\{\sigma\}$  e  $\{\varepsilon\}$  são as matrizes que reúnem as componentes de tensão e deformação, respectivamente, e  $[C]$  é a matriz constitutiva elástica para o estado plano de tensões. As relações entre as componentes de deformação e os deslocamentos  $u$  e  $v$  são estabelecidas, em notação matricial, pela Equação (18).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Quando se inicia a fissuração do material, uma idéia básica da MFLE, proveniente da teoria da elasticidade, é a consideração de que, a tensão na ponta da fissura é infinita, o que pode ser verificado na Equação (16), na qual  $\sigma_{\max}$  tende ao

infinito quando a relação  $a_2/a_1$  tende à zero. Nesta situação, a abertura elíptica da Figura 15 pode ser considerada como uma fissura, como mostra a Figura 17a, que se propagará mesmo para valores muito pequenos de  $\sigma_N$ . De acordo com a solução obtida por Westergaard, em 1939, em um material frágil fissurado, a tensão normal nas proximidades da ponta da fissura,  $\sigma(r)$ , para o modo I de deformação da fissura, em estado plano de tensões, é definida pela Equação (19) e ilustrada graficamente na Figura 17b (SHAH *et al.*, 1995; D'AVILA, 2003).



**Figura 17** (a) Placa fissurada, produzida com material frágil, sob tração; (b) Tensão normal nas proximidades da ponta da fissura (D'AVILA, 2003).

$$\sigma(r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (19)$$

onde  $r$  é a distância até a ponta da fissura. O coeficiente  $K_I$  é denominado de fator de intensidade tensão para o modo I de deformação e depende da geometria da peça, da dimensão da fissura e da carga aplicada (D'AVILA, 2003). Verifica-se nesta equação que, na ponta da fissura ( $r=0$ ), a tensão é infinita, o que não tem possibilidade de ocorrência em materiais reais. Porém, segundo Cedolin (1986 *apud* D'AVILA, 2003), se a zona em que o material se afasta do comportamento linear elástico é pequena, torna-se aceitável a aproximação realizada.

Em materiais frágeis, para o modo I de deformação, a relação entre o fator de intensidade de tensão e a taxa de energia de deformação dissipada na propagação de

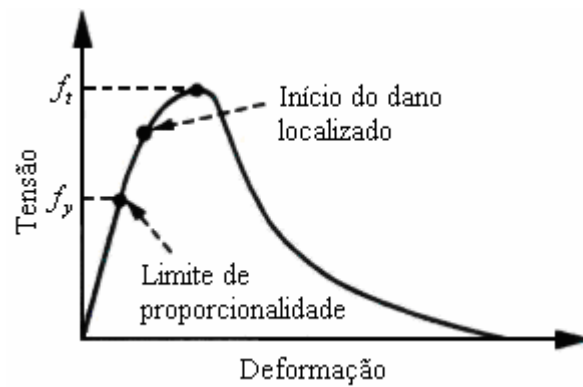
uma unidade de área de superfície de fissura ( $G_I$ ), equivalente à energia de superfície do material, é estabelecida pela Equação (20) (SHAH *et al.*, 1995).

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (20)$$

Segundo d'Avila (2003), os conceitos da MFLE podem ser aplicados se o tamanho da zona de processo de fratura for negligenciável, o que ocorre se o tamanho desta for menor que 1% da distância da ponta da fissura até um ponto que possa causar uma perturbação local no campo de tensões. Caso a zona de processo de fratura não possa ser desprezada, esta deve ser modelada explicitamente usando-se os conceitos da Mecânica da Fratura Não-Linear. Segundo a autora, o tamanho da zona de processo de fratura do concreto é superior a 30 cm e a distância da ponta da fissura até um ponto que possa causar uma perturbação local no campo de tensões, para a maioria das estruturas de concreto, é menor que 1 m. Dessa forma, a fissuração em grande parte das estruturas de concreto deve ser modelada aplicando-se a Mecânica da Fratura Não-Linear. A autora ainda observa que somente em estruturas de concreto muito grande, como barragens, é possível utilizar a MFLE.

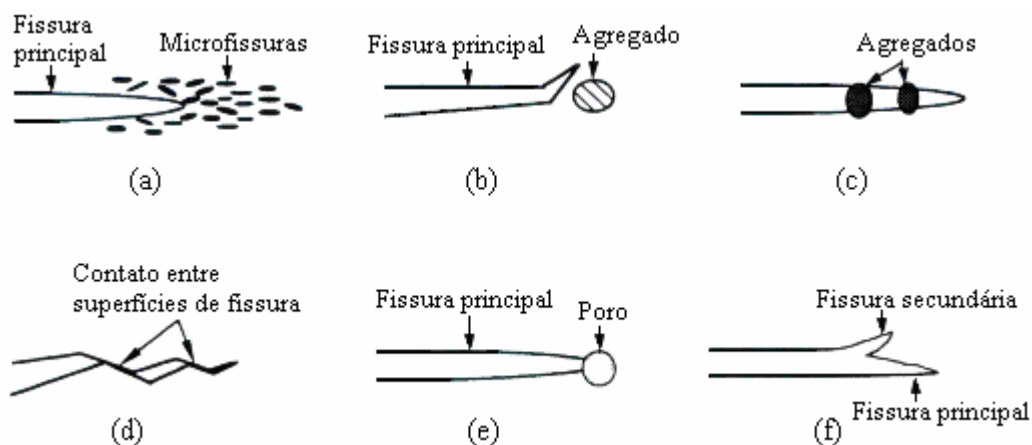
### 2.2.2 Mecânica da Fratura Não-Linear para Materiais Quase-Frágeis

De acordo com Shah *et al.* (1995), um material quase-frágil, como o concreto, sob tração uniaxial, apresenta comportamento linear elástico até determinada tensão  $f_y$ , que corresponde a aproximadamente 30% da tensão de pico e define seu limite de proporcionalidade, conforme ilustrado na Figura 18. Após este valor, segundo os autores, devido a pequenos poros formados durante processo de produção e às microfissuras resultantes do fenômeno de retração, desenvolvem-se, no material, microfissuras distribuídas com certo grau de uniformidade até um nível de tensão próximo a 80% de sua resistência à tração. Depois deste nível de tensão, ocorre a concentração e união de microfissuras em determinada região do material, a zona de processo de fratura, iniciando-se o dano localizado, que ocorre de forma estável até a tensão de pico. Após o material ter atingido sua resistência à tração, a fissura principal da zona de processo de fratura propaga-se continuamente até a ruptura do mesmo.



**Figura 18** Curva tensão deformação para materiais quase-frágeis (SHAH *et al.*, 1995).

Quando a zona de processo de fratura do concreto é formada, verificam-se complicados mecanismos de enrijecimento (*toughening mechanisms*) devido ao fato de este material ser heterogêneo, composto por diferentes fases, resultando no comportamento não-linear verificado antes e após a tensão de pico da curva mostrada na Figura 18 (SHAH *et al.*, 1995). Alguns desses mecanismos são ilustrados na Figura 19.

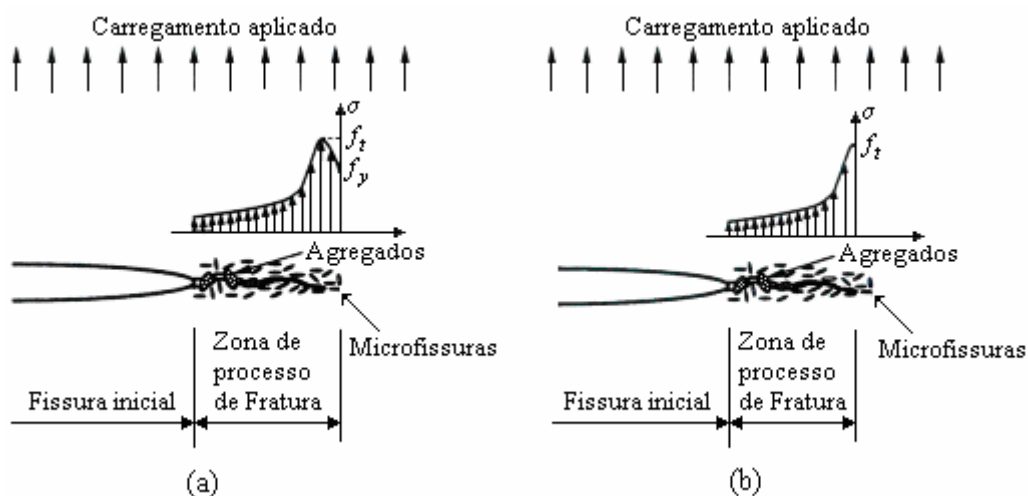


**Figura 19** Alguns mecanismos de enrijecimento na zona de processo de fratura: (a) *crack shielding*; (b) desvio da fissura; (c) *aggregate bridging*; (d) atrito entre superfícies de fissura; (e) encontro da ponta da fissura com um poro; (f) ramificação da fissura (SHAH *et al.*, 1995).

Durante o processo de fratura, o estado de elevada tensões próximo à ponta da fissura principal causa microfissuras que consomem parte da energia transmitida pelo carregamento, resultando no fenômeno conhecido como *microcrack shielding* (Figura 19a). Quando o agregado possui resistência elevada, ocorre um desvio na trajetória da fissura, que passa a se propagar em uma direção de menor resistência, conforme ilustrado na Figura 19b. Segundo Shah et al. (1995), um importante mecanismo de enrijecimento é o *aggregate bridging* (Figura 19c), no qual a fissura principal avança

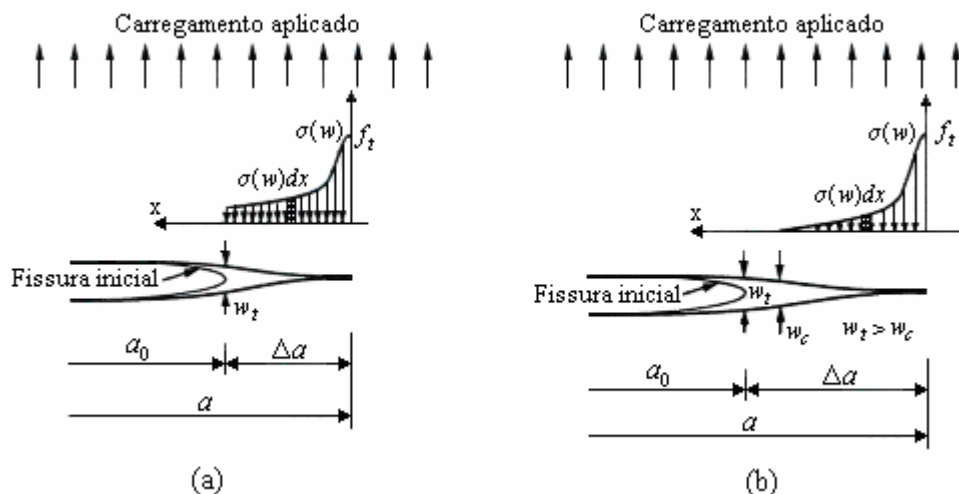
além do agregado, que continua ligado à matriz, transmitindo tensões transversalmente à fissura até que ocorra seu arrancamento da matriz ou a ruptura do material. Com a propagação de tortuosas fissuras no material, pode ocorrer o contato e, conseqüentemente, o atrito entre superfícies de fissuras (Figura 19d), dissipando parte da energia transmitida pelo carregamento. Também é possível ocorrer o encontro entre a ponta da fissura principal e um poro (Figura 19e), situação esta em que é requerida uma energia adicional para a propagação da fissura. Outro mecanismo de possível ocorrência, que também consome parte da energia, é a ramificação da fissura principal, ilustrada na Figura 19f.

A modelagem explícita da zona de processo de fratura do concreto, com os efeitos dos mecanismos de enrijecimento, depende da definição do ponto no qual é iniciado o comportamento não-linear do material. Se as microfissuras à frente da ponta da fissura principal forem consideradas, a tensão normal de tração na zona de processo de fratura aumenta gradualmente até alcançar, na ponta desta fissura, a resistência à tração do material e, em seguida, diminui até o limite de proporcionalidade  $f_y$ , conforme a distribuição de tensões apresentada na Figura 20a. Por outro lado, se a zona de processo de fratura for definida de tal forma que o efeito das microfissuras à frente da fissura principal não seja considerado, a tensão normal de tração aumenta gradualmente até atingir a resistência à tração do material, como mostrado na Figura 20b (SHAH *et al.*, 1995). Neste caso, o comportamento tensão-deformação do concreto é considerado linear-elástico até sua resistência à tração ser alcançada.



**Figura 20** Aspectos gerais da zona de processo de fratura do concreto: (a) considerando-se as microfissuras na ponta da fissura principal; (b) desprezando-se as microfissuras na ponta da fissura principal (SHAH *et al.*, 1995).

Segundo Shah *et al.* (1995), alguns fatores dificultam a aplicação dos conceitos da Mecânica da Fratura à descrição da falha do concreto, como a trajetória tortuosa das fissuras, conforme explicado anteriormente, a difícil determinação da ponta da fissura principal, devido ao mecanismo de enrijecimento *aggregate bridging* (Figura 19c), e a variação da zona de processo de fratura ao longo da direção associada à espessura do corpo tracionado. Por isso, a maioria dos modelos disponíveis tenta simular a fratura do concreto no modo I com uma fissura efetiva de trajetória linear, desprezando-se a variação da zona de processo de fratura ao longo da direção associada à espessura. Para a modelagem dos mecanismos de enrijecimento, considera-se uma pressão de coesão  $\sigma(w)$ , que atua nas superfícies da fissura e diminui gradativamente com o aumento da abertura da fissura  $w$ . Essas considerações sobre a modelagem da fissuração do concreto são ilustradas na Figura 21a, negligenciando-se o efeito das microfissuras que torna a resposta tensão-deformação não-linear antes da resistência à tração ser alcançada. A fissura efetiva, de comprimento  $a$ , é formada pela associação da fissura inicial com uma fissura fictícia (*fictitious crack*) que representa a zona de processo de fratura, as quais possuem comprimentos iguais a  $a_0$  e  $\Delta a$ , respectivamente.



**Figura 21** Modelagem do processo de fratura do concreto no modo I: (a) pressão de coesão com as superfícies da fissura fictícia em contato; (b) pressão de coesão com superfícies da fissura fictícia parcialmente separadas (SHAH *et al.*, 1995).

Para materiais quase-frágeis submetidos à tração uniaxial, a taxa de energia de deformação dissipada na propagação de uma unidade de área de fissura fictícia ( $G_q$ ), como destacado na Equação (21), pode ser dividida em duas partes (SHAH *et al.*, 1995): uma taxa de energia dissipada durante a criação das duas superfícies de fissura



( $G_{Ic}$ ) e outra necessária para superar a pressão de coesão na separação das superfícies ( $G_{\sigma}$ ).

$$G_q = G_{Ic} + G_{\sigma} \quad (21)$$

A taxa de energia  $G_{Ic}$  equivale à energia de superfície do material e pode ser estimada por meio da aplicação dos conceitos da MFLE. Já a taxa de energia  $G_{\sigma}$  é equivalente ao trabalho realizado pela pressão de coesão sobre uma unidade de comprimento de fissura fictícia para uma estrutura com espessura unitária e pode ser calculada pela expressão

$$G_{\sigma} = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \int_0^{w_t} \sigma(w) dx dw = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} dx \int_0^{w_t} \sigma(w) dw = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (22)$$

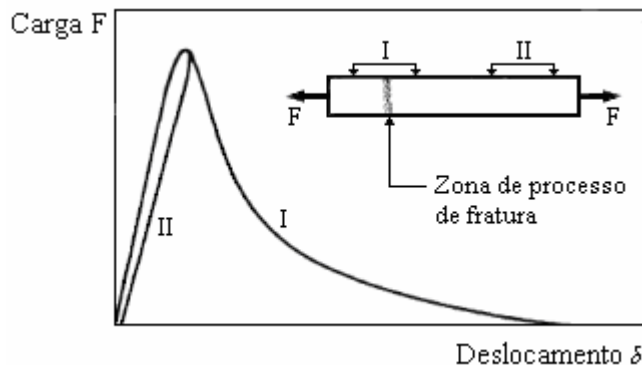
onde  $w_t$  é a abertura da fissura na ponta da fissura inicial. Quando a pressão de coesão for nula para uma determinada abertura de fissura  $w_c$ , com  $w_t > w_c$ , como verificado na Figura 21b, o limite superior  $w_t$  na integral da Equação (22) deverá ser substituído por  $w_c$ .

Dentre os modelos da Mecânica da Fratura Não-Linear para materiais quase-frágeis, pode-se destacar o modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg *et al.* (1976) para a fratura do concreto. Neste modelo, considera-se que a energia necessária para a criação de superfícies de fissura fictícia é muito menor que a energia necessária para a separação das mesmas, o que torna aceitável a desconsideração de  $G_{Ic}$  na Equação (21). Dessa forma, assumindo-se  $G_{Ic} = 0$  nesta equação, a taxa de energia  $G_q$ , para o modo I de deformação, passa a ser calculada via a Equação (23) (SHAH *et al.*, 1995).

$$G_q = G_{\sigma} = \int_0^{w_t} \sigma(w) dw \quad (23)$$

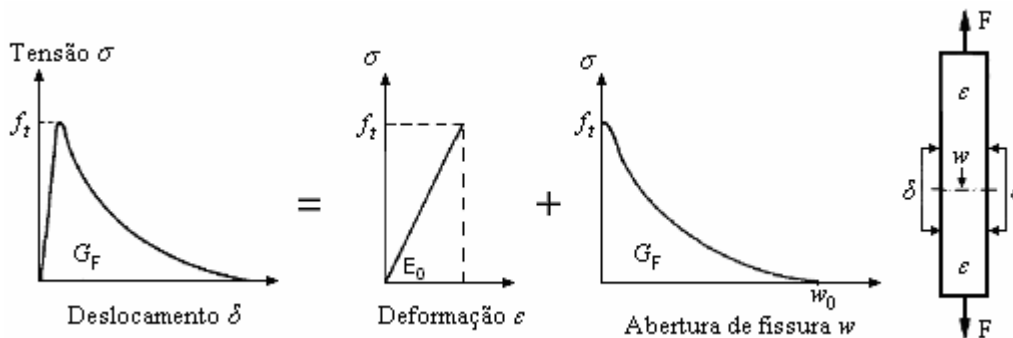
Segundo Hordijk (1991), quando um corpo de prova de concreto é submetido à tração uniaxial, com medidores de deslocamento nos trechos I e II, como mostrado na Figura 22, verifica-se que a resposta carga-deslocamento pós-pico detectada pelos medidores depende da localização da zona de processo de fratura. Se esta se

desenvolver no trecho I, o medidor que monitora este trecho detectará o contínuo aumento do deslocamento até a ruptura (curva I), enquanto que no trecho II ocorrerá o descarregamento do concreto (curva II). Isso indica que, quando é formada a zona de processo de fratura, apenas nesta há a contribuição para o aumento do deslocamento na região do concreto tracionada.



**Figura 22** Diagrama carga-deslocamento para um corpo de prova de concreto submetido à tração uniaxial com medidores de deformação em diferentes trechos (HORDIJK, 1991).

Tendo-se como base os comportamentos ilustrados na Figura 22, no modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg *et al.* (1976), a completa resposta tensão-deslocamento do concreto tracionado é composta, como verificado na Figura 23, por duas partes: uma relação tensão-deformação linear-elástica em toda a região não fissurada e uma relação tensão-abertura de fissura fictícia na zona de processo de fratura. Neste modelo, a área sob a curva tensão-abertura de fissura, comumente chamada de energia de fratura  $G_F$ , representa a quantidade de energia dissipada por unidade de área de fissura e pode ser calculada, de forma geral, pela Equação (24).



**Figura 23** Separação da completa curva tensão-deformação na tração do concreto, de acordo com modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg *et al.* (1976) (HORDIJK, 1991).

$$G_F = \int_0^{w_0} \sigma(w) dw \quad (24)$$

onde o limite superior da integral  $w_0$  é o valor da abertura de fissura quando a tensão no pós-pico é igual a zero. De acordo com o Código Modelo CEB-FIP de 1990 (CEB-FIP, 1991), na ausência de dados experimentais, o valor de  $G_F$  pode ser estimado usando-se a Equação

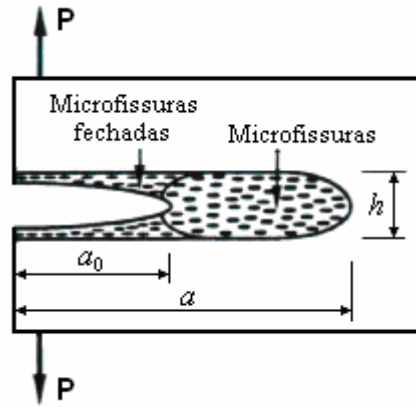
$$G_F = G_{F_0} \left( \frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right) \quad (25)$$

Onde  $f_{cm} = f_{ck} + \Delta f$ , sendo que  $f_{ck}$  é a resistência à compressão característica e  $\Delta f = 8 \text{ MPa}$ ,  $f_{cmo} = 10 \text{ MPa}$  e o parâmetro  $G_{F_0}$  depende do diâmetro máximo do agregado ( $d_a$ ) e pode ser determinado utilizando-se a Tabela 2.

**Tabela 2** Valores do parâmetro  $G_{F_0}$  (CEB-FIP, 1991).

$d_a$ (mm)	$G_{F_0}$ (N/m)
8	25
16	30
32	58

Outra importante contribuição para a aplicação da Mecânica da Fratura ao concreto foi o modelo de banda de fissura (*crack band model*), proposto por Bažant e Oh (1983). Neste modelo, ilustrado na Figura 24, a zona de processo de fratura é representada por microfissuras paralelas, densamente distribuídas com uniformidade em uma faixa com largura fixa  $h$ , conhecida como largura da banda de fissura (*width of the crack band*). O valor de  $h$  pode ser estimado usando-se a Equação (26).



**Figura 24** Modelo de banda de fissura proposto Bažant e Oh (1983) (SHAH *et al.*, 1995).

$$h = n_a \cdot d_a \quad (26)$$

onde  $d_a$  é o diâmetro máximo do agregado e  $n_a$  é uma constante empírica. Bažant e Oh (1983), a partir de modelagem numérica com dados experimentais, sugeriram  $n_a \cong 3$  para concreto.

De acordo com o modelo de banda de fissura, a abertura de fissura é definida pela relação

$$w = h \varepsilon^{cr} \quad (27)$$

onde  $\varepsilon^{cr}$  é a deformação na zona de processo de fratura ou deformação de fissura. Assim, considerando-se uma curva tensão-deformação na zona de processo de fratura ( $\sigma - \varepsilon^{cr}$ ), a quantidade de energia dissipada na fissuração por unidade de área da banda de fissura, ou energia de fratura  $G_f$ , é igual ao produto da área sob esta curva e a largura da banda de fissura (SHAH *et al.*, 1995). Logo, o valor de  $G_f$  pode ser estimado, de maneira geral, pela expressão

$$G_f = h \int_0^{\varepsilon_u^{cr}} \sigma d\varepsilon^{cr} \quad (28)$$

onde o limite superior da integral  $\varepsilon_u^{cr}$  é a máxima deformação na zona de processo de fratura.

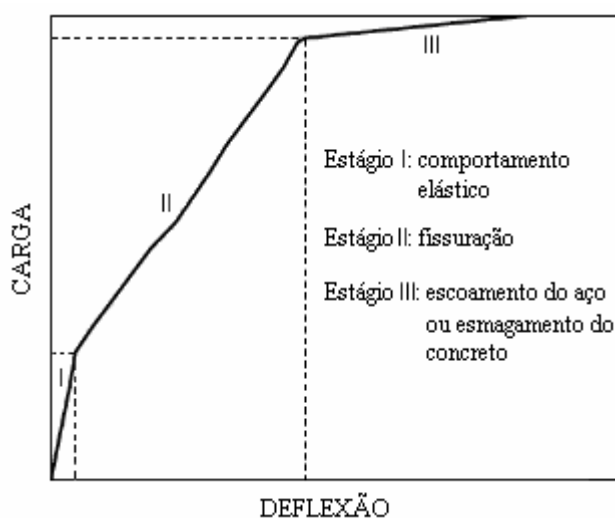
Segundo Shah *et al.* (1995), o modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg *et al.* (1976) e o modelo de banda de fissura proposto por Bažant e Oh (1983)

podem ser combinados com uma análise de elementos finitos para a predição do comportamento de fratura de diversas estruturas de concreto. Nesses modelos, a energia de fratura é considerada como uma propriedade do material, pois, em ensaios experimentais, este parâmetro independe do tamanho e da geometria do espécime (ROTS, 1988; SHAH *et al.*, 1995).

### 2.2.3 Aplicação da Mecânica da Fratura a Vigas de Concreto Armado

Devido ao fato de a resistência à tração do concreto corresponder a valores que variam em torno de 8 a 15% de sua resistência à compressão, a falha de grande parte das estruturas de concreto simples é ocasionada pela propagação de fissuras na tração, a níveis de carregamento relativamente baixos. Para se melhorar o desempenho mecânico dessas estruturas, são utilizados, em associação com o concreto, diferentes tipos de reforço, os quais, apesar de terem pouca interferência na formação das fissuras, oferecem grande resistência à propagação e abertura das mesmas. Para vigas, o reforço é, geralmente, constituído por armaduras de aço longitudinais e transversais que promovem considerável aumento de sua capacidade de carregamento (SHAH *et al.*, 1995).

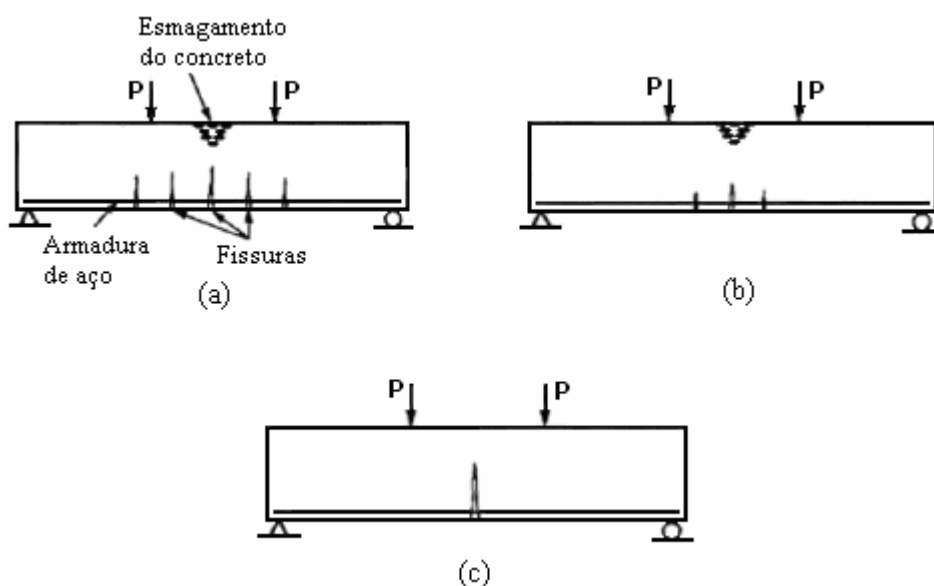
De acordo com Kwak e Filippou (1990), a resposta carga-deflexão típica de vigas de concreto armado, em ensaios de flexão, é composta por três estágios, como pode ser visto na Figura 25.



**Figura 25** Resposta carga-deflexão típica de vigas de concreto armado sob flexão (KWAK e FILIPPOU, 1990).

No estágio I, a estrutura não apresenta fissuras e seu comportamento é considerado linear-elástico até o nível de carregamento em que o concreto da região tracionada atinge sua resistência à tração, quando se formam as primeiras fissuras. Neste nível de carregamento, verifica-se uma redução da rigidez da estrutura, caracterizando o início do estágio II, onde ocorre a fissuração gradual da estrutura. Devido à transferência de tensões de tração do concreto fissurado para o aço da armadura, no estado II, a estrutura continua suportando os esforços decorrentes do aumento do carregamento. Quando o aço da armadura longitudinal atinge sua tensão de escoamento e/ou o concreto da região comprimida alcança sua resistência à compressão, verifica-se uma acentuada redução da rigidez da estrutura, indicando o início do estágio III, no qual a deflexão aumenta consideravelmente até o colapso da estrutura. Os estágios I e II estão associados aos chamados estados limites de serviço, enquanto que o estágio III corresponde ao estado limite último da estrutura.

O modo de falha e a capacidade de carregamento de vigas de concreto armado dependem de diversos fatores, como geometria da viga, configuração de carregamento e quantidade, localização e orientação das armaduras. Considerando-se apenas a relação entre o modo de falha e a taxa geométrica de armadura longitudinal, são ilustradas, na Figura 26, vigas submetidas à flexão em quatro pontos com diferentes taxas de armadura.



**Figura 26** Modos de falha de vigas de concreto armado para diferentes taxas de armadura longitudinal: (a) falha por escoamento do aço e esmagamento do concreto, para vigas normalmente armadas; (b) falha por esmagamento do concreto, para vigas

superarmadas; (c) falha por escoamento do aço, para vigas com a taxa de reforço mínima (SHAH *et al.*, 1995).

Para vigas normalmente armadas (Figura 26a), ocorre falha por escoamento do aço e esmagamento do concreto, pois o aço das armaduras atinge sua tensão de escoamento no mesmo nível de carregamento que o concreto da região comprimida alcança sua resistência à compressão, favorecendo a formação do maior número de fissuras possível. Em vigas superarmadas (Figura 26b), devido à grande quantidade de armaduras, não há o escoamento do aço e a falha ocorre apenas por esmagamento do concreto. Neste caso, como o aço não apresenta deformações significativas, são formadas poucas fissuras sem grandes comprimentos e aberturas. Para uma viga com a taxa de reforço mínima, representada na Figura 26c, não há o controle da fissuração e a falha ocorre apenas por escoamento do aço a um nível relativamente baixo de carregamento. Em tal situação, o colapso da estrutura ocorre devido ao desenvolvimento de uma única fissura que na seção de momento fletor máximo (KWAK e FILIPPOU, 1990; SHAH *et al.*, 1995).

Para vigas de concreto simples ou com taxa de armadura longitudinal abaixo do valor mínimo, devido ao desenvolvimento de uma única fissura principal, a mecânica da fratura pode ser diretamente aplicada à análise das mesmas. Para vigas normalmente armadas, onde se tem o desenvolvimento de algumas fissuras durante o carregamento, a Mecânica da Fratura, desenvolvida para uma única fissura, pode ser modificada para incluir a interação de múltiplas fissuras. Além disso, em algumas situações, é necessário considerar também as interações que ocorrem na zona de interface entre o concreto e as armaduras, bem como alguns aspectos referentes à falha do concreto na compressão. Para vigas superarmadas, como a falha ocorre apenas por esmagamento do concreto, é necessária grande compreensão da correlação entre a mecânica da fratura e o modo de falha do concreto durante seu esmagamento, caso contrário os métodos da mecânica da fratura devem ser modificados com o uso de constantes empíricas (SHAH *et al.*, 1995).

## 2.3 MODELAGEM NUMÉRICA DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

A seguir, serão destacados importantes fatores que influenciam a modelagem numérica do comportamento de estruturas de concreto armado, como modelos de fissuração e modelos de comportamento do concreto e do aço. Além disso, será realizada uma breve abordagem do método dos elementos finitos com procedimentos iterativos e serão relatadas pesquisas que utilizaram o *software* DIANA<sup>®</sup> em simulações computacionais do comportamento de vigas de concreto armado.

### 2.3.1 Modelos de Fissuração

O fato de a resistência à tração do concreto ser consideravelmente menor que sua resistência à compressão faz com que elementos estruturais produzidos com este material, como vigas e lajes, sob flexão, apresentem fissuras e, conseqüentemente, comportamento não-linear físico em níveis de carregamento relativamente baixos, influenciando significativamente seu desempenho estrutural. Dessa forma, modelar adequadamente a fissuração é uma importante etapa para a modelagem satisfatória do comportamento desses elementos estruturais.

Segundo d'Avila (2003), em simulações via MEF, as fissuras podem ser modeladas de forma discreta, distribuída ou incorporada. Na forma discreta, a propagação da fissura é representada pela separação das arestas dos elementos, o que significa, em casos que a trajetória da fissura não é previamente conhecida, redefinir a malha de elementos finitos sempre que houver desenvolvimento de fissuras. Esta redefinição de malha tem elevado custo computacional, inviabilizando o uso desta forma de representação em casos que se têm muitas fissuras espalhadas ao longo da estrutura (SHAH *et al.*, 1995; GAMINO, 2007). Na forma distribuída, o material fissurado é considerado contínuo e fissura é representada pela alteração da equação constitutiva do material, mantendo-se a malha de elementos finitos inalterada. No início de sua utilização, resultados obtidos com essa forma de representação apresentaram-se muito dependentes da malha utilizada, o que foi solucionado com a aplicação direta de conceitos da Mecânica da Fratura (BAŽANT e OH, 1983; SHAH *et al.*, 1995; D'AVILA, 2003). Na representação das fissuras de forma incorporada, utiliza-se o conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrão, não é



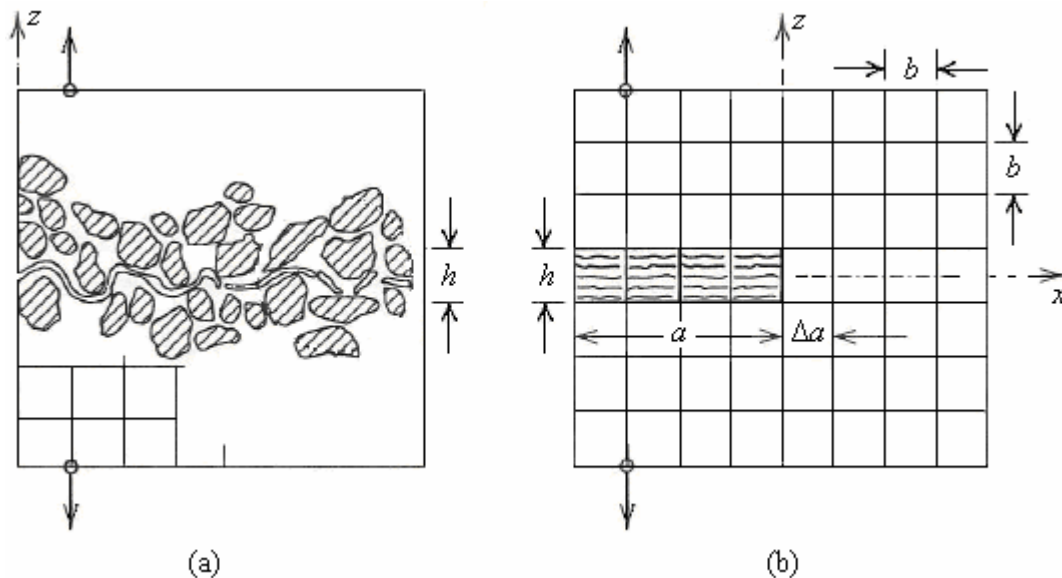
necessária redefinição de malha e os resultados são independentes da malha utilizada (D'AVILA, 2003).

No *software* DIANA<sup>®</sup>, é possível representar as fissuras tanto de forma discreta quanto distribuída, em ambos os casos com aplicação de conceitos da Mecânica da Fratura. Neste trabalho, utilizou-se a forma distribuída, devido a sua eficácia em modelagem de vigas de concreto armado com relativa simplicidade na consideração das fissuras (SHAH *et al.*, 1995; D'AVILA, 2003; MENIN *et al.*, 2009; ARAÚJO *et al.*, 2010).

#### 2.3.1.1 Modelos de Fissuração Distribuída

Em modelos de fissuração distribuída (*smearred cracking models*) que utilizam conceitos da Mecânica da Fratura, as propriedades do concreto fissurado são definidas pela resistência à tração, largura da banda de fissura  $h$  e energia de fratura  $G_f$  deste material. De modo geral, quando a resistência à tração é alcançada, forma-se a zona de processo de fratura para a qual é estabelecida uma lei tensão-deformação que depende dos parâmetros  $G_f$  e  $h$  (BAŽANT e OH, 1983; SHAH *et al.*, 1995). Com isso, em simulações numéricas de estruturas de concreto via MEF, de acordo com Bažant e Oh (1983), não há sentido em se utilizar elementos finitos cujo valor da menor dimensão seja menor que a largura da banda de fissura, cujo valor sugerido pelos autores, definido pela Equação (26), é aproximadamente três vezes o diâmetro máximo do agregado.

Em concordância com Bažant e Oh (1983), Bédard e Kotsovovs (1986) constataram que a menor dimensão do elemento finito da malha deve ser maior que duas ou três vezes o tamanho do maior agregado do concreto. Segundo Shah *et al.* (1995), devido ao fato de existir um tamanho mínimo para o elemento finito (Figura 27), os modelos de fissuração distribuída apresentam a desvantagem de não permitirem a verificação da convergência da solução para malhas muito refinadas.



**Figura 27** Aplicação da Mecânica da Fratura a modelos de fissuração distribuída: (a) Concreto fissurado; (b) malha de elementos finitos com dimensões mínimas (BAŽANT e OH, 1983).

Rots (1988) realizou uma série de análises numéricas via MEF sem considerar diretamente o diâmetro máximo do agregado. Por meio de análises inversas realizadas em peças de concreto que apresentavam entalhe que induzia a fissuração localizada no material, foi proposta por este autor relações entre a largura da banda de fissura e o tamanho da aresta do elemento finito ( $b$ ) utilizado na representação do concreto fissurado. Tais relações foram recomendadas para elementos quadrados do estado plano de tensão. Para elementos com interpolação linear foi sugerido  $h = b\sqrt{2}$ , enquanto que para elementos com interpolação quadrática sugeriu-se  $h = b$ .

No *software* DIANA<sup>®</sup>, as relações propostas por Rots (1988) podem ser consideradas automaticamente de uma forma generalizada. Em casos de omissão, o *software* adota, para análises bidimensionais,  $h = \sqrt{2A}$  para elementos com interpolação linear e  $h = \sqrt{A}$  para interpolação quadrática, onde  $A$  é a área do elemento. Para elementos sólidos, em casos de omissão, o programa adota a expressão  $h = \sqrt[3]{V}$ , com  $V$  representando o volume do elemento. Usando-se essas equações, o tamanho do elemento finito pode assumir qualquer valor, o que pode ser um problema em simulações numéricas com modelos de fissuração distribuída que utilizam conceitos da Mecânica da Fratura. Segundo d'Avila (2003), nestes modelos, quando a malha de elementos finitos é extremamente refinada, os resultados divergem da solução exata, ao contrário do que era de se esperar de uma análise via MEF.

Nos modelos de fissuração distribuída, podem ser utilizados os conceitos de fissura fixa (modelo fixo), fissura rotacional (modelo rotacional) ou fissura fixa multidirecional (modelo multidirecional). No modelo fixo (*fixed crack model*), a orientação das fissuras é mantida constante durante o processo computacional. No modelo rotacional (*rotating crack model*), a orientação das fissuras rotaciona coaxialmente com os eixos de deformação principal. Já o modelo multidirecional (*multi-directional fixed crack model*) é um modelo intermediário entre os dois anteriores, possibilitando a abertura de várias fissuras em um mesmo ponto (ROTS e BLAAUWENDRAAD, 1989).

### 2.3.1.1.1 Modelo Fixo de Fissuração Distribuída

De acordo com Rots (1988), um importante procedimento que pode ser aplicado ao modelo fixo é a decomposição da deformação total do concreto fissurado em deformação elástica e deformação de fissura. Com isso, o vetor de incrementos de deformação total  $\{\Delta\varepsilon\}$  do concreto fissurado é decomposto em um vetor de incrementos de deformação elástica  $\{\Delta\varepsilon^{el}\}$ , referente ao concreto íntegro, e um vetor de incrementos de deformação de fissura  $\{\Delta\varepsilon^{cr}\}$ , como definido na Equação (29).

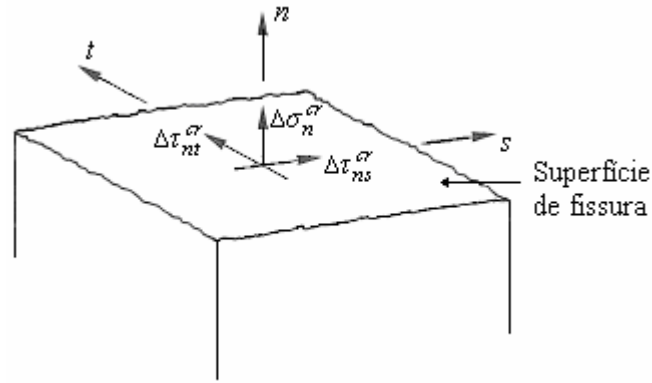
$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^{el}\} + \{\Delta\varepsilon^{cr}\} \quad (29)$$

A Equação (29) é referente ao sistema de coordenadas global. Para uma configuração tridimensional o vetor de incrementos de deformação de fissura global é definido por

$$\{\Delta\varepsilon^{cr}\} = \left[ \Delta\varepsilon_x^{cr} \quad \Delta\varepsilon_y^{cr} \quad \Delta\varepsilon_z^{cr} \quad \Delta\gamma_{xy}^{cr} \quad \Delta\gamma_{yz}^{cr} \quad \Delta\gamma_{zx}^{cr} \right]^T \quad (30)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  referem-se aos eixos de coordenadas globais.

Por conveniência, considera-se um sistema de coordenadas local, com eixos  $n$ ,  $s$  e  $t$  na superfície de fissura, como mostrado na Figura 28. Com isso, pode ser definido, no sistema local, o vetor de incrementos de deformação de fissura local  $\{\Delta\varepsilon^{cr}\}$ , estabelecido pela Equação (31).



**Figura 28** Sistema de coordenadas local e tensões locais atuantes na superfície de fissura (ROTS, 1988).

$$\{\Delta e^{cr}\} = [\Delta \varepsilon_n^{cr} \quad \Delta \gamma_{ns}^{cr} \quad \Delta \gamma_{nt}^{cr}]^T \quad (31)$$

onde  $\Delta \varepsilon_n^{cr}$  é o incremento na deformação normal de fissura (modo I). Já  $\Delta \gamma_{ns}^{cr}$  e  $\Delta \gamma_{nt}^{cr}$  são os incrementos na deformação de cisalhamento de fissura no modo II e modo III, respectivamente. As outras três componentes do vetor de incrementos de deformação de fissura local não têm sentido físico e podem ser omitidas.

A relação entre os incrementos de deformação de fissura local e os incrementos de deformação de fissura global é determinada por

$$\{\Delta e^{cr}\} = [N] \{\Delta e^{cr}\} \quad (32)$$

onde a matriz de transformação  $[N]$ , para uma configuração tridimensional, é estabelecida como

$$[N] = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y & l_z l_x \\ m_x^2 & m_x m_y & m_z m_x \\ n_x^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x & l_z m_x + l_x m_z \\ 2m_x n_x & m_x n_y + m_y n_x & m_z n_x + m_x n_z \\ 2n_x l_x & n_x l_y + n_y l_x & n_z l_x + n_x l_z \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde  $l_x$ ,  $m_x$  e  $n_x$  são as componentes do vetor que indica a direção do eixo local  $n$  no sistema de coordenadas global. De forma análoga,  $l_y$ ,  $m_y$  e  $n_y$  formam o vetor que

indica a direção do eixo local  $s$  no sistema global e  $l_z$ ,  $m_z$  e  $n_z$  formam o vetor que indica a direção do eixo local  $t$  no sistema global.

No sistema de coordenadas local, o vetor de incrementos de tensão de fissura  $\{\Delta t^{cr}\}$  é definido por

$$\{\Delta t^{cr}\} = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_n^{cr} & \Delta \tau_{ns}^{cr} & \Delta \tau_{nt}^{cr} \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

onde  $\Delta \sigma_n^{cr}$  é o incremento na tensão normal de fissura (modo I), Os parâmetros  $\Delta \tau_{ns}^{cr}$  e  $\Delta \tau_{nt}^{cr}$  são os incrementos na tensão de cisalhamento de fissura no modo II e modo III, respectivamente, como mostrado na Figura 28. A relação entre os incrementos de tensão de fissura local e os incrementos de tensão global  $\{\Delta \sigma\}$  é definida pela Equação (35).

$$\{\Delta t^{cr}\} = [N]^T \{\Delta \sigma\} \quad (35)$$

Para que o sistema de equações fique completo, devem ser determinados o modelo constitutivo para o concreto íntegro e a relação tensão-deformação para as fissuras distribuídas. Para o concreto íntegro, o modelo constitutivo é estabelecido pela expressão

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \{\Delta \varepsilon^{el}\} \quad (36)$$

na qual  $[D]$  é a matriz constitutiva elástica, definida como

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (37)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do concreto e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. De maneira similar, a relação entre os incrementos de deformação de fissura e os incrementos de tensão de fissura, no sistema local, é estabelecida por

$$\{\Delta t^{cr}\} = [D^{cr}] \{\Delta e^{cr}\} \quad (38)$$

onde a matriz  $[D^{cr}]$  é definida de forma geral por

$$[D^{cr}] = \begin{bmatrix} D^I & 0 & 0 \\ 0 & D^{II} & 0 \\ 0 & 0 & D^{III} \end{bmatrix} \quad (39)$$

na qual o coeficiente  $D^I$  representa a rigidez secante na direção normal (modo I) e  $D^{II}$  e  $D^{III}$  são os módulos secantes nas direções tangenciais.

Substituindo-se a Equação (32) na Equação (29), e em seguida a Equação (29) na Equação (36), obtém-se a Equação (40).

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \left( \{\Delta \varepsilon\} - [N] \{\Delta e^{cr}\} \right) \quad (40)$$

Multiplicando-se a Equação (40) por  $[N]^T$  e substituindo-se no lado esquerdo da equação resultante as Equações (35) e (38), encontra-se a Equação (41).

$$\{\Delta e^{cr}\} = \left( [D^{cr}] + [N]^T [D] [N] \right)^{-1} [N]^T [D] \{\Delta \varepsilon\} \quad (41)$$

Por fim, substituindo-se a Equação (41) na Equação (40), encontra-se a relação entre os incrementos de tensão e os de deformação total no sistema de coordenadas global expressa pela Equação (42).

$$\{\Delta \sigma\} = \left( [D] - [D] [N] \left( [D^{cr}] + [N]^T [D] [N] \right)^{-1} [N]^T [D] \right) \{\Delta \varepsilon\} \quad (42)$$

Para o estado plano de tensões, as matrizes  $[D]$  e  $[D^{cr}]$  são determinadas por

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$[D^{cr}] = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{1-\mu} E & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{1-\beta} G \end{bmatrix} \quad (44)$$

onde  $G = E/(2(1+\nu))$ . O parâmetro  $\mu$  representa o fator de redução da rigidez longitudinal e  $\beta$  é o fator de redução da rigidez transversal ou fator de retenção do cisalhamento. O valor de  $\beta$  pode assumir valores entre 0 e 1. Para o sistema de coordenadas local alinhado com o sistema global, a matriz  $[N]$  é definida pela Equação (45).

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Aplicando-se as Equações (43), (44) e (45) na Equação (42), obtém-se a Equação (46).

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ \frac{\mu\nu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta E}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (46)$$

### 2.3.1.1.2 Modelo Multidirecional de Fissuração Distribuída

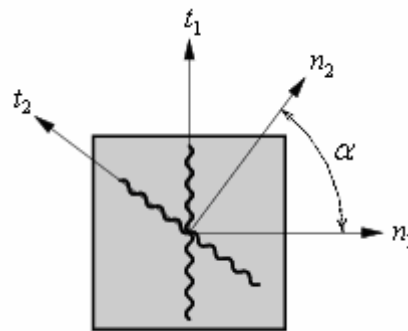
Segundo Rots (1988), uma vantagem da decomposição da deformação total em deformação elástica e deformação de fissura, conforme a Equação (29), é a possibilidade de subdivisão da deformação de fissura para se obter as contribuições

separadas de um número de fissuras multidirecionais que simultaneamente ocorrem em um ponto. Assim, o vetor de incrementos de deformação de fissura torna-se

$$\{\Delta\epsilon^{cr}\} = \{\Delta\epsilon_1^{cr}\} + \{\Delta\epsilon_2^{cr}\} + \dots \quad (47)$$

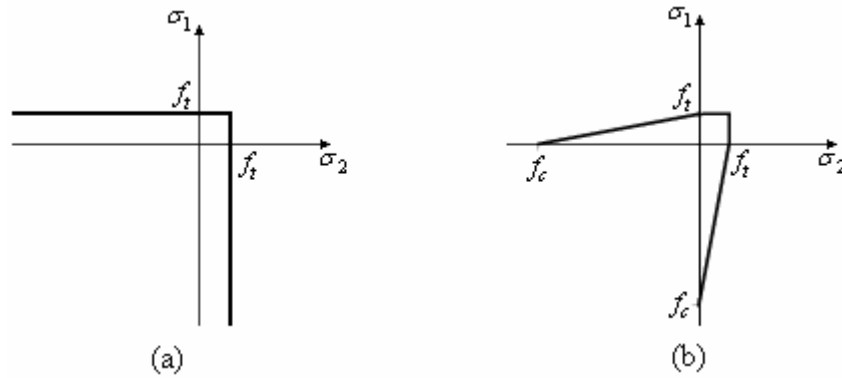
onde  $\{\Delta\epsilon_1^{cr}\}$  é o vetor de incrementos de deformação de fissura global devido à fissura primária,  $\{\Delta\epsilon_2^{cr}\}$  é devido à fissura secundária e assim por diante.

Para a formação de fissuras subseqüentes (Figura 29), duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente: a tensão principal de tração deve ultrapassar o valor máximo estabelecido e o ângulo entre o eixo normal à fissura existente e a tensão principal de tração deve exceder o angulo limite (*threshold angle*)  $\alpha$  definido previamente (ROTS, 1988). No *software* DIANA<sup>®</sup>, o valor padrão para o ângulo limite é  $60^\circ$  e a definição da tensão principal de tração máxima pode ser feita usando-se o critério constante ou o linear (Figura 30). No critério constante (Figura 30a), a abertura de fissura ocorre se a máxima tensão principal de tração exceder a resistência à tração do material ( $f_t$ ). Para o critério linear (Figura 30b), a abertura de fissura ocorre se a máxima tensão principal de tração exceder o valor mínimo entre  $f_t$  e  $f_t(1 + \sigma_{lateral}/f_c)$ , sendo que  $\sigma_{lateral}$  é a tensão principal lateral.



**Figura 29** Modelo multidirecional de fissuração (DIANA, 2005).





**Figura 30** Critérios de abertura de fissura para o modelo multidirecional: (a) constante; (b) linear (DIANA, 2005).

Cada fissura tem orientação fixa e possui seu próprio sistema de coordenadas local, conseqüentemente possui seu próprio vetor de incrementos de deformação de fissura  $\{\Delta e_i^{cr}\}$  e de tensão de fissura  $\{\Delta t_i^{cr}\}$ , bem como sua própria matriz de transformação  $[N_i]$ . Por conveniência, esses vetores e matrizes são reunidos de maneira expressa nas Equações (48), (49) e (50).

$$\{\Delta \hat{e}^{cr}\} = \left[ \{\Delta e_1^{cr}\} \quad \{\Delta e_2^{cr}\} \quad \dots \right]^T \quad (48)$$

$$\{\Delta \hat{t}^{cr}\} = \left[ \{\Delta t_1^{cr}\} \quad \{\Delta t_2^{cr}\} \quad \dots \right]^T \quad (49)$$

$$[\hat{N}] = \left[ [N_1] \quad [N_2] \quad \dots \right] \quad (50)$$

onde  $\{\Delta \hat{e}^{cr}\}$  e  $\{\Delta \hat{t}^{cr}\}$  reúnem os vetores com os incrementos de deformação e tensão de fissura local, respectivamente, e  $[\hat{N}]$  reúne as matrizes de transformação associadas a cada fissura. Assim, os incrementos de deformação de fissura global podem ser definidos pela Equação (51).

$$\{\Delta e^{cr}\} = [\hat{N}] \{\Delta \hat{e}^{cr}\} \quad (51)$$

A relação entre os incrementos de tensão e de deformação de fissura no sistema de coordenadas local de cada fissura é estabelecida, analogamente à Equação (38), pela expressão

$$\{\Delta \hat{t}^{cr}\} = [\hat{D}^{cr}] \{\Delta \hat{\epsilon}^{cr}\} \quad (52)$$

que pode ser escrita na forma

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta t_1^{cr}\} \\ \{\Delta t_2^{cr}\} \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_{11}^{cr}] & [D_{12}^{cr}] & \cdots \\ [D_{21}^{cr}] & [D_{22}^{cr}] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta e_1^{cr}\} \\ \{\Delta e_2^{cr}\} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (53)$$

a qual é uma relação muito geral, pois permite a interação entre as fissuras por meio das submatrizes fora da diagonal da matriz  $[\hat{D}^{cr}]$ .

A partir do procedimento realizado na seção anterior que resultou na Equação (42), obtém-se, de forma análoga, para concretos com fissuras multidirecionais, a relação entre os incrementos de tensão e os de deformação total no sistema de coordenadas global, a qual é definida pela Equação (54).

$$\{\Delta \sigma\} = \left( [D] - [D] [\hat{N}] \left( [\hat{D}^{cr}] + [\hat{N}]^T [D] [\hat{N}] \right)^{-1} [\hat{N}]^T [D] \right) \{\Delta \epsilon\} \quad (54)$$

### 2.3.1.1.3 Modelo rotacional de Fissuração Distribuída

No modelo rotacional, durante a propagação da fissura, os eixos principais de ortotropia rotacionam coaxialmente com as deformações principais (FEENSTRA *et al.*, 1991). Além disso, também é imposta a coaxialidade entre as deformações e as tensões principais, o que pode ser feito, segundo Rots (1988), utilizando-se o círculo de Mohr. Para uma configuração bidimensional em que os eixos principais (1 e 2) de deformação e tensão estejam inicialmente alinhados com os eixos de ortotropia do material, observa-se, no círculo de deformações de Mohr, que um pequeno incremento de deformação de cisalhamento  $\Delta \gamma_{12}$  causa a rotação dos eixos principais de deformação por um ângulo  $\Delta \theta_\epsilon$  definido por

$$\Delta \theta_\epsilon = \frac{\Delta \gamma_{12}}{2(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})} \quad (55)$$

para  $|\Delta\gamma_{12}| \ll |\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}|$ , onde  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{22}$  são as deformações principais iniciais. De forma similar, o círculo de tensões de Mohr indica que um pequeno incremento de tensão de cisalhamento  $\Delta\tau_{12}$  causa a rotação dos eixos principais de tensão por um ângulo  $\Delta\theta_\sigma$  definido por

$$\Delta\theta_\sigma = \frac{\Delta\tau_{12}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})} \quad (56)$$

para  $|\Delta\tau_{12}| \ll |\sigma_{11} - \sigma_{22}|$ , onde  $\sigma_{11}$  e  $\sigma_{22}$  são as tensões principais iniciais. A coaxialidade entre as deformações e as tensões principais é mantida fazendo-se  $\Delta\theta_\varepsilon = \Delta\theta_\sigma$ . Com isso, obtém-se

$$\Delta\tau_{12} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})} \Delta\gamma_{12} = G_{12} \Delta\gamma_{12} \quad (57)$$

onde  $G_{12} = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) / (2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}))$  é o módulo de cisalhamento tangencial. Assim, a relação tensão-deformação tangencial no sistema de coordenadas global, para uma configuração bidimensional, pode ser expressa por

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{Bmatrix} = [M]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\varepsilon_{22}} & 0 \\ \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{11}} & \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\varepsilon_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})} \end{bmatrix} [M] \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

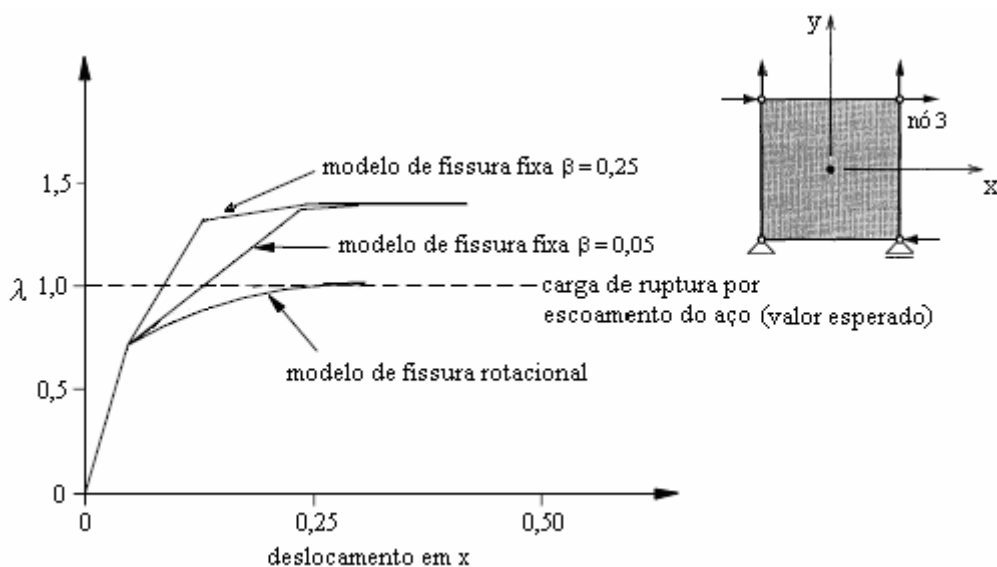
onde  $[M]$  é matriz de transformação de deformação. Segundo Rots (1988), nesta expressão, as derivadas parciais podem ser inseridas diretamente, uma vez que o termo associado ao cisalhamento garante a coaxialidade entre as deformações e as tensões principais.

#### 2.3.1.1.4 Considerações sobre os Modelos de Fissuração Distribuída

No modelo multidirecional, variando-se o valor do ângulo limite  $\alpha$  podem ser obtidos o modelo fixo e o modelo rotacional. Para  $\alpha = 0$ , a orientação da fissura será

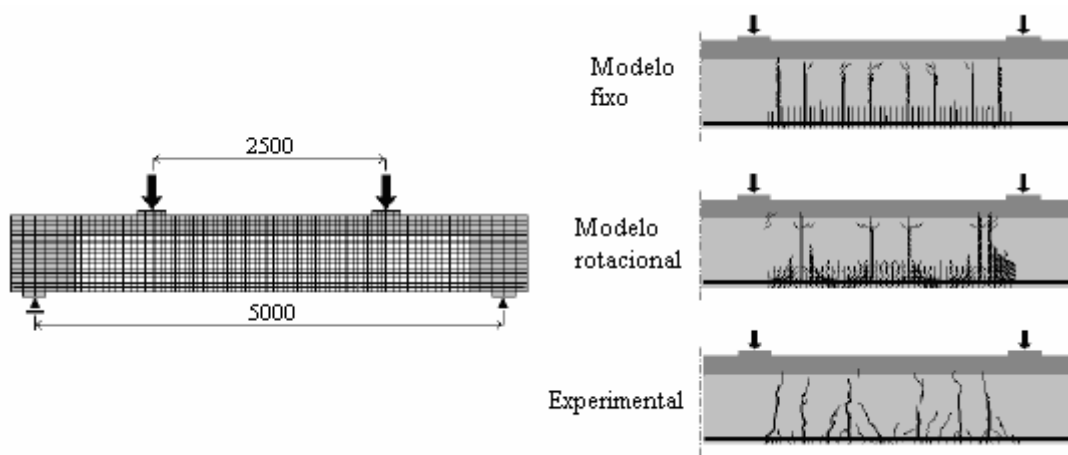
alterada sempre que houver mudança na direção da tensão principal de tração, como verificado no modelo rotacional. Por outro lado, para  $\alpha = 90^\circ$ , não ocorrerá mudanças na orientação da fissura, resultando no modelo fixo (ROTS, 1988; MENIN *et al.*, 2009).

Feenstra e de Borst (1995) realizaram uma comparação entre os modelos fixo e rotacional, por meio da análise do comportamento de um painel idealizado de concreto armado submetido a tensões de cisalhamento e tensões normais biaxiais (Figura 31). O deslocamento foi medido no nó 3 e o parâmetro  $\lambda$  representa a carga de ruptura. Observa-se que os resultados obtidos com o modelo de fissura fixa superestimaram a carga de ruptura do painel, enquanto que o resultado obtido com o modelo rotacional apresentou excelente precisão com relação ao valor esperado. Segundo Gamino (2007), o modelo fixo, por não permitir a mudança na direção das fissuras, pode contribuir para resultados numéricos com cargas de ruptura maiores que as de ensaios experimentais.



**Figura 31** Comportamento do painel de concreto armado para modelos de fissuração distribuída. (FEENSTRA; DE BORST, 1995)

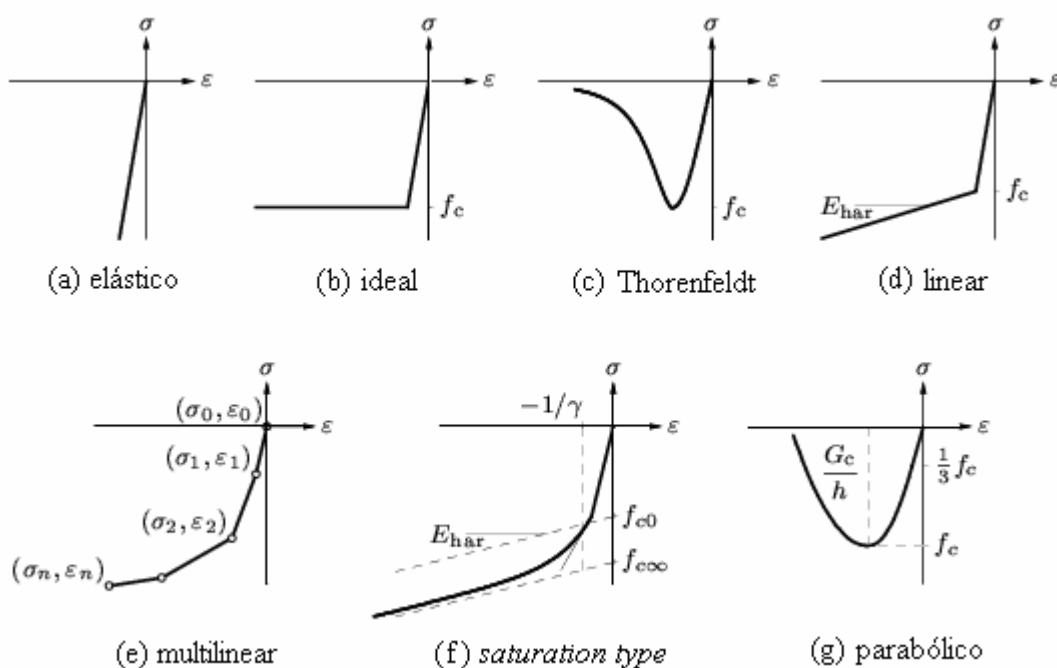
Com relação ao padrão de fissuras gerado pelos modelos de fissuração distribuídas, pode-se citar o trabalho realizado por Cervenka e Cervenka (1996 *apud* GAMINO, 2007). Tais autores utilizaram os modelos fixo e rotacional para a modelagem de uma viga de concreto armado, cujos resultados para o padrão de fissuras são comparados com o experimental na Figura 32. Observa-se que o modelo de fissura fixa foi o que gerou maior quantidade de fissuras. Já o modelo rotacional gerou um padrão de fissuras que se aproximou satisfatoriamente do experimental.



**Figura 32** Padrões de fissura obtidos com os modelos fixo e rotacional (CERVENKA; CERVENKA, 1996 *apud* GAMINO, 2007).

### 2.3.2 Modelos de Comportamento do Concreto na Compressão

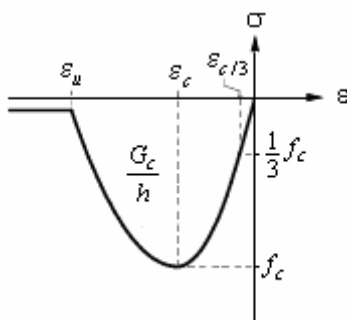
Diversos modelos constitutivos para compressão do concreto têm sido apresentados ao longo dos anos, como exemplos podem ser citados os modelos propostos por Sargin (1971), Wang *et al.* (*apud* NATARAJA *et al.*, 1999), Carreira e Chu (1985), Feenstra (1993) e Wee *et al.* (*apud* NATARAJA *et al.*, 1999). Neste trabalho, serão destacados os modelos de comportamento do concreto na compressão disponíveis no *software* DIANA<sup>®</sup>, os quais são mostrados na Figura 33.



**Figura 33** Modelos de comportamento do concreto sob compressão (DIANA, 2005).

O modelo de comportamento elástico (Figura 33a) não apresenta a fase plástica e depende apenas do módulo de elasticidade do material. Já o modelo ideal (Figura 33b) é também conhecido como elastoplástico perfeito por apresentar comportamento ora puramente elástico, ora puramente plástico. O modelo de Thorenfeldt (Figura 33c), recomendado para concretos com elevada resistência. O modelo linear (Figura 33d) apresenta uma fase elástica e outra com endurecimento representado por uma função linear, cuja inclinação ( $E_{har}$ ) é denominada de módulo de endurecimento constante. Este parâmetro também é comum ao modelo *saturation type* (Figura 33f), no qual a curva de endurecimento é não-linear. O modelo multilinear (Figura 33e) possibilita a utilização de modelos externos ao programa ou dados de resultados obtidos de ensaios experimentais.

O modelo parabólico (Figura 33g) é o único que se baseia no conceito de energia de fratura à compressão ( $G_c$ ), cujo valor experimental, de acordo com Feenstra (1993) é equivalente à área sob a curva tensão-deslocamento em ensaios de compressão uniaxial e varia de 10 a 25 KN/m, sendo 50 a 100 vezes maior que a energia de fratura na tração. Para a aplicação deste modelo, além da energia de fratura à compressão, são necessários mais três parâmetros: resistência à compressão, módulo de elasticidade e a largura da banda de fissura ( $h$ ). A Figura 34 mostra o gráfico detalhado e a expressão matemática que o define é a Equação (59).



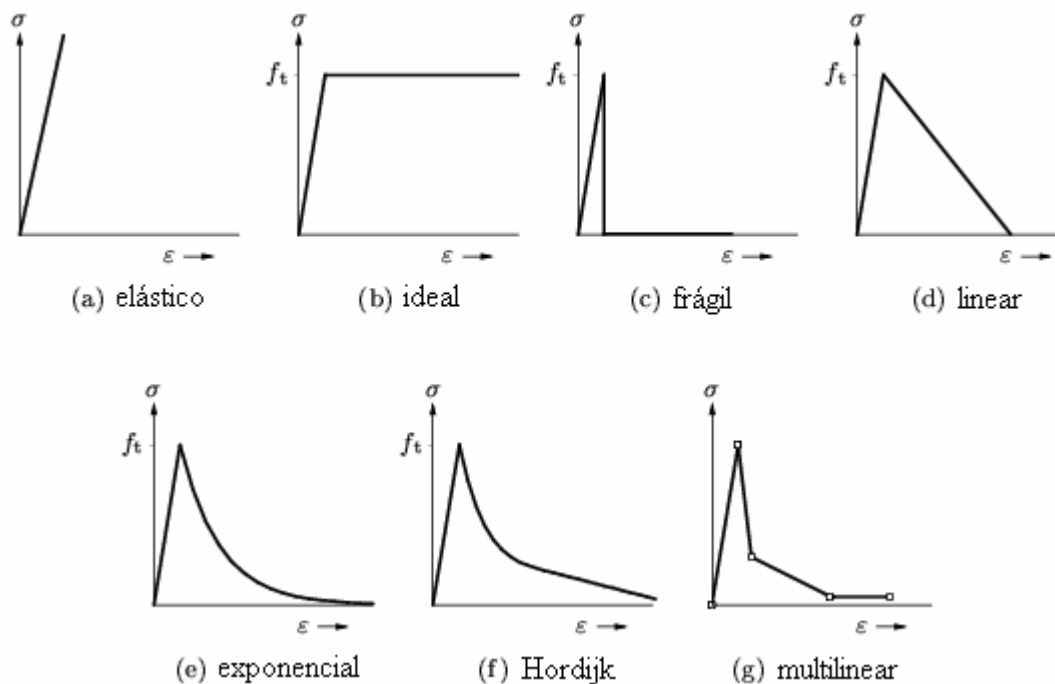
**Figura 34** Modelo parabólico de compressão (DIANA, 2005).

$$\sigma = \begin{cases} -f_c \frac{1}{3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c/3}} & \rightarrow 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{c/3} \\ -f_c \frac{1}{3} \left( 1 + 4 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_{c/3}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{c/3}} \right) - 2 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_{c/3}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{c/3}} \right)^2 \right) & \rightarrow \varepsilon_{c/3} \leq \varepsilon < \varepsilon_c \\ -f_c \left( 1 - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_c}{\varepsilon_u - \varepsilon_c} \right)^2 \right) & \rightarrow \varepsilon_c \leq \varepsilon < \varepsilon_u \\ 0 & \rightarrow \varepsilon_c \geq \varepsilon_u \end{cases} \quad (59)$$

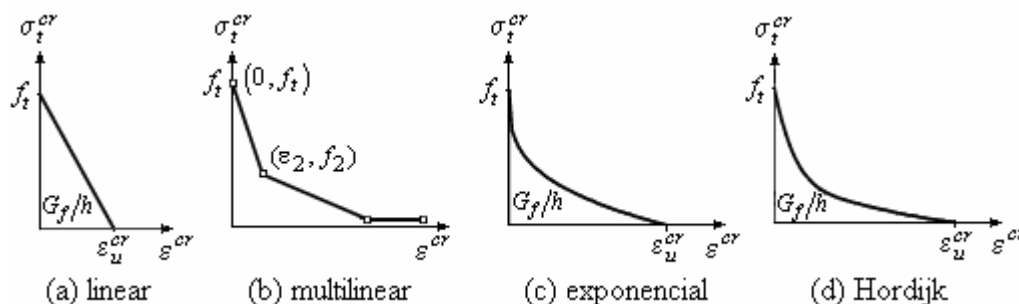
sendo que  $\varepsilon_{c/3}$  é a deformação associada à tensão equivalente a um terço da resistência à compressão e é definida por  $\varepsilon_{c/3} = -f_c/(3E)$ ,  $\varepsilon_c$  representa a deformação de pico, obtida por  $\varepsilon_c = -4f_c/(3E)$  e  $\varepsilon_u$  é a deformação última do concreto, calculada por  $\varepsilon_u = \varepsilon_c - [3G_c/(2hf_c)]$ .

### 2.3.3 Modelos de Comportamento do Concreto na Tração

Para o comportamento do concreto sob tração, o *software* DIANA<sup>®</sup> possibilita a aplicação direta dos modelos apresentados na Figura 35. O ramo ascendente de todos os modelos é linear elástico. No modelo elástico (Figura 35a), não há a formação de fissuras, por isso este depende apenas do módulo de elasticidade do material. No modelo ideal (Figura 35b), o material é considerado elastoplástico perfeito. No modelo frágil (Figura 35c), considera-se que o material apresenta ruptura brusca na tração. O ramo descendente, ou curva de amolecimento, dos demais modelos são apresentados na Figura 36.



**Figura 35** Modelos de comportamento do concreto sob tração (DIANA, 2005).



**Figura 36** Modelos de amolecimento disponíveis no DIANA (DIANA, 2005).

Observa-se na Figura 36, que, exceto o multilinear, todos os modelos são baseados em critérios energéticos, para os quais a área sob a curva é equivalente à energia necessária para abrir uma unidade de fissura na tração, determinada por meio da relação  $(G_f/h)$ , onde  $G_f$  é a energia de fratura na tração e  $h$  é a largura de banda de fissura. O modelo de amolecimento linear (Figura 36a) é representado por uma função linear decrescente até a deformação última de fissura ( $\epsilon_u^{cr}$ ). No modelo multilinear (Figura 36b), podem ser utilizados modelos de amolecimento externos ao programa ou mesmo dados obtidos de ensaios experimentais. O modelo de amolecimento exponencial (Figura 36c), proposto por Reinhardt (1984), é definido por uma curva exponencial decrescente até a deformação última de fissura.



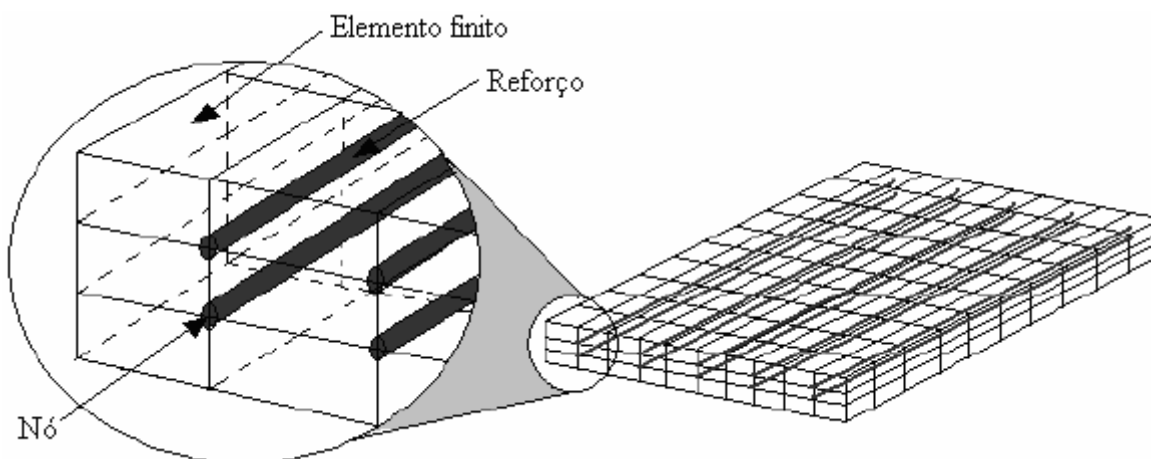
No modelo de amolecimento Hordijk (Figura 36d), proposto por Hordijk (1991), o amolecimento do concreto é representado pela Equação (60). Este modelo possui dois parâmetros adimensionais de ajuste,  $c_1$  e  $c_2$ , cujos valores adotados pelo *software* DIANA<sup>®</sup> são, respectivamente, 3 e 6,93.

$$\frac{\sigma_t^{cr}}{f_t} = \begin{cases} \left(1 + \left(c_1 \frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_u^{cr}}\right)^3\right) \exp\left(-c_1 \frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_u^{cr}}\right) - \frac{\epsilon^{cr}}{\epsilon_u^{cr}} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) & \rightarrow 0 < \epsilon^{cr} < \epsilon_u^{cr} \\ 0 & \rightarrow \epsilon_u^{cr} < \epsilon^{cr} < \infty \end{cases} \quad (60)$$

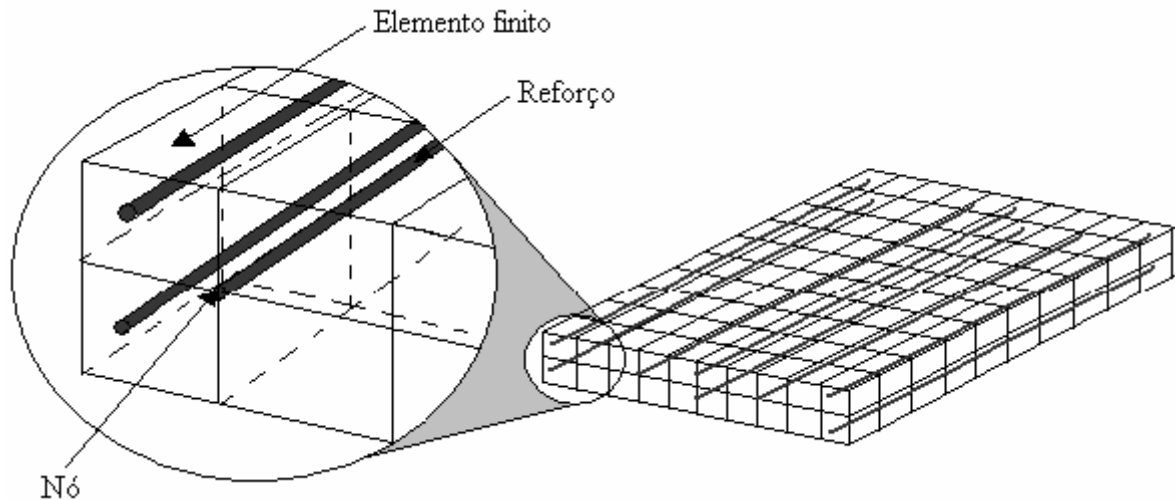
### 2.3.4 Representação da Armadura

Segundo Gamino (2007) existem, de maneira geral, quatro formas de representação das armaduras por meio do método dos elementos finitos: discreta, incorporada, distribuída e axissimétrica. Todas estas de possível utilização no *software* DIANA<sup>®</sup>.

Na representação discreta (Figura 37), as armaduras são posicionadas necessariamente sobre as arestas dos elementos finitos da malha, o que faz com que o posicionamento das armaduras seja dependente da configuração da malha, podendo causar alguns problemas, como dificuldades na redefinição da malha ou mudança da mesma para modelos que possuem trechos com malhas diferentes. Por outro lado, na representação incorporada (Figura 38), o reforço pode transpor os elementos finitos da malha, conseqüentemente o posicionamento das armaduras não depende da malha utilizada.



**Figura 37** Forma discreta de representação das armaduras (LIMA, 2009)

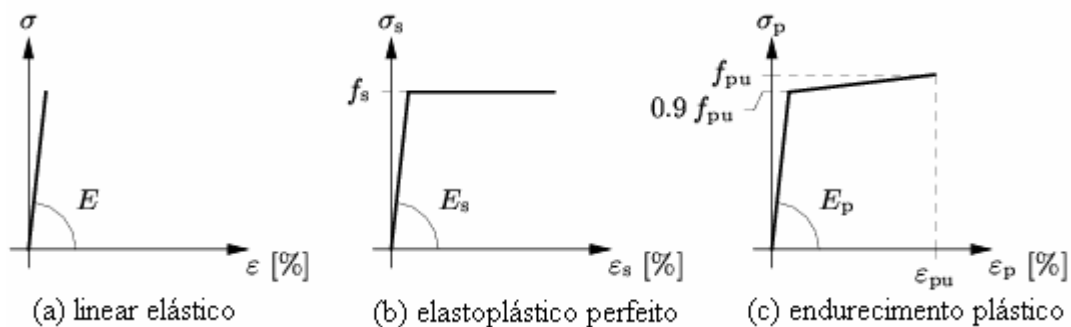


**Figura 38** Forma incorporada de representação das armaduras (LIMA, 2009)

A forma de representação distribuída apresenta as mesmas características da representação incorporada, porém com taxas de armaduras constantes, conforme o eixo de orientação da estrutura. Segundo Gamino (2007), esta forma de representação possibilita o aumento de produtividade no lançamento de armaduras lajes e estribos de vigas, bem como em outras estruturas que possuam armaduras com espaçamento constante.

Na representação axissimétrica, as armaduras podem ser modeladas por meio de elementos finitos axissimétricos pontuais, o que faz desta a representação adequada para estribos circulares ou em espiral (GAMINO, 2007). Nesta forma de representação, assim como a representação discreta, as armaduras são diretamente inseridas sobre os nós da malha de elementos finitos.

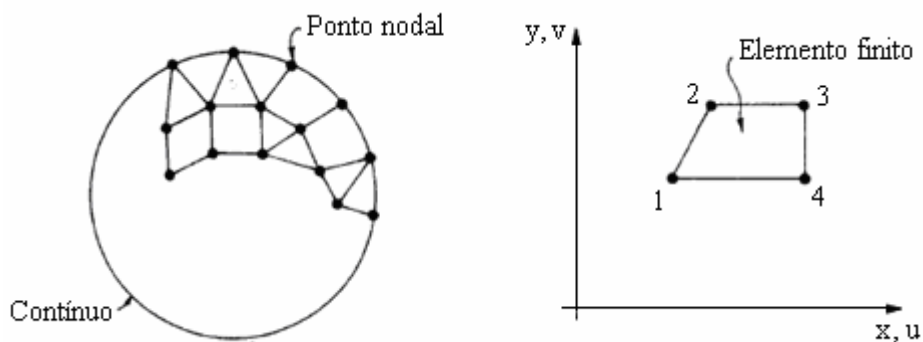
Quanto ao modelo constitutivo do comportamento mecânico das armaduras de aço, o programa DIANA<sup>®</sup> possibilita a utilização de modelos pré-definidos adotados pela norma holandesa NEN 6720/1995 (apud DIANA, 2005), os quais podem ser observados na Figura 39. Além desses, o DIANA<sup>®</sup> ainda permite, para a simulação do comportamento do reforço, a utilização dos modelos plásticos de Von Mises e o uso de modelos de comportamento externos ao programa.



**Figura 39** Modelos constitutivos pré-definidos para o comportamento do aço (DIANA, 2005)

### 2.3.5 Método dos Elementos Finitos com Procedimentos Iterativos

O método dos elementos finitos, utilizado para modelagem numérica de estruturas, consiste na divisão, ou discretização, da estrutura em vários elementos de menor dimensão, denominados elementos finitos, conectados entre si por pontos discretos denominados nós. As cargas concentradas ou distribuídas na estrutura são aplicadas nos nós do modelo. A estrutura é analisada de forma local em cada elemento, somando-se, em seguida, a contribuição das partes para a descrição do comportamento do sistema completo (COOK *et al.*, 2002). A Figura 40 ilustra o procedimento de discretização para um caso bidimensional.



**Figura 40** Discretização em elementos finitos (PROENÇA, 1988).

A partir da discretização, o vetor deslocamento  $\{u\}$  e o vetor deformação  $\{\varepsilon\}$  dentro de determinado elemento podem ser determinados como funções dos deslocamentos nodais do elemento  $\{p\}^{elem}$  por meio das expressões

$$\{u\} = [N]\{p\}^{elem} \quad (61)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{p\}^{elem} \quad (62)$$

onde  $[N]$  é a matriz que reúne as funções de interpolação que descrevem o comportamento de cada nó do elemento e a matriz  $[B]$  é composta pelas derivadas dessas funções.

Para ser estabelecida a condição de equilíbrio da estrutura discretizada, pode ser feita a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Como resultado, considerando-se uma estrutura com volume  $V$ , obtém-se a expressão

$$\int_V [B]^T \{\sigma\} dV - \{R\} = 0 \quad (63)$$

na qual  $\int_V [B]^T \{\sigma\} dV$  é o vetor de forças nodais obtido da contribuição dos esforços internos e  $\{R\}$  é o vetor que reúne os carregamentos externos aplicados aos nós. Para aplicações em casos de elasticidade linear, na qual a relação constitutiva é  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ , a Equação (63) torna-se

$$\left( \int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{p\} = [K]\{p\} = \{R\} \quad (64)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva elástica do material,  $[K]$  representa a matriz de rigidez global da estrutura, que reúne as matrizes de rigidez de cada elemento, e  $\{p\}$  é o vetor que reúne todos os graus de liberdade nodais da estrutura.

Para um material de comportamento elastoplástico, a relação constitutiva é linear apenas em nível diferencial, ou seja,  $\{d\sigma\} = [D^{ep}]\{d\varepsilon\}$ . Portanto, para análises que envolvem esses materiais, o procedimento exato consiste em considerar os deslocamentos e deformações em um nível diferencial. Com estas considerações, após aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, obtém-se a expressão

$$\{dR\} = \left( \int_V [B]^T [D^{ep}] [B] dV \right) \{dp\} = [K^{ep}] \{dp\} \quad (65)$$

onde  $\{dR\}$  e  $\{dp\}$  são as matrizes compostas por incrementos infinitesimais de carga e deslocamento, respectivamente, e  $[K^{ep}]$  é a matriz de rigidez global elastoplástica, formada a partir das contribuições de cada elemento.

Entretanto, na utilização prática da formulação para análise elastoplástica, é preciso observar que, em simulação computacional, apenas é possível aplicar incrementos finitos de carga  $\{\Delta R\}$ . Nessas condições, a matriz de rigidez da estrutura, que varia continuamente com incrementos infinitesimais de carga, é substituída pela matriz de rigidez tangente  $[K_t]$ , que possui valor constante no incremento, resultando em um erro de aproximação, com a Equação (65) sendo substituída pela Equação (66).

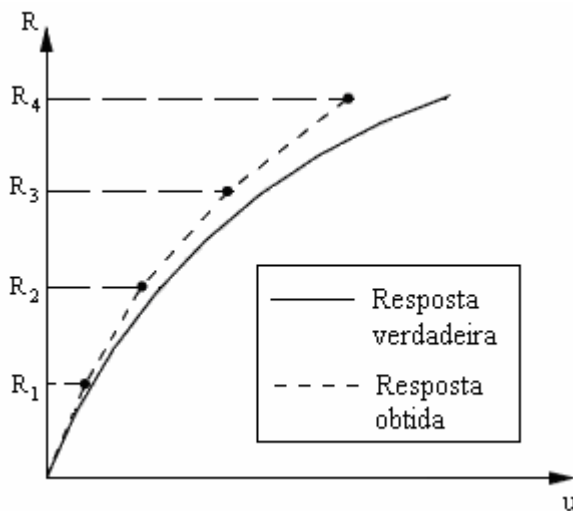
$$\{\Delta R\} = [K_t] \{\Delta p\} \quad (66)$$

Utilizando-se a Equação (66), para cada incremento deslocamento  $\{\Delta p\}$  aplicado, surgem, nos elementos, deformações  $\{\Delta \varepsilon\}$  a partir das quais são determinadas tensões elásticas  $\{\Delta \sigma\}$  que são corrigidas pela verificação da relação constitutiva do material elastoplástico, para o mesmo nível de deformação. Esta correção causa uma distribuição de tensões que não mais está em equilíbrio com as cargas aplicadas. Este desequilíbrio origina uma força residual  $\{\Psi\}$ , calculada como a diferença entre cargas aplicadas e esforços internos, conforme a Equação (67).

$$\{\Psi\} = \{R_{ext}\} - \int_V [B]^T \{\sigma^*\} dV \quad (67)$$

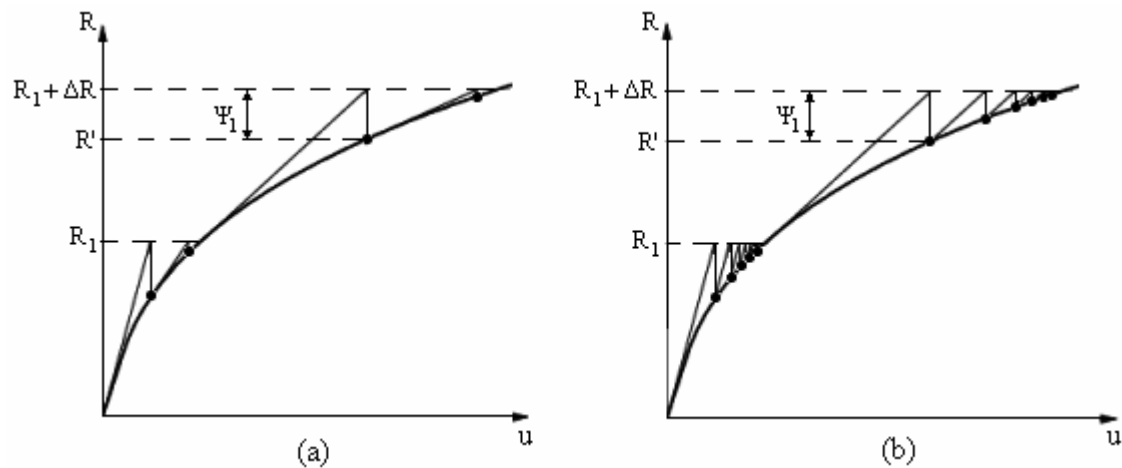
onde  $\{R_{ext}\}$  é o nível atual de carga externa aplicada e  $\{\sigma^*\}$  é o nível atual de tensões, já corrigido pela verificação modelo constitutivo do material. Caso esta força residual seja ignorada durante a aplicação dos incrementos, dependendo-se do grau de não-linearidade física da análise, poderá ser verificada considerável diferença entre a resposta obtida e a resposta verdadeira, conforme ilustrado na Figura 41. Para que esta

diferença seja minimizada, em cada incremento de carga são realizados procedimentos iterativos que possibilitam diminuir, até um valor pré-definido suficientemente pequeno, a força residual  $\{\Psi\}$ , restabelecendo, desta forma, o equilíbrio (PROENÇA, 1988).

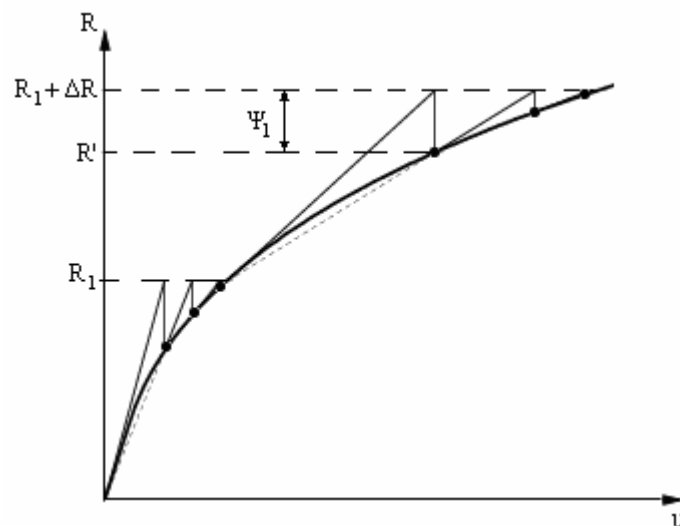


**Figura 41** Resposta carga-deslocamento para um problema unidimensional sem uso de procedimento iterativos de correção.

Para a realização de procedimentos iterativos, destacam-se os métodos Newton-Raphson regular, Newton-Raphson modificado e Quasi-Newton. No método Newton-Raphson regular (Figura 42a), uma nova matriz de rigidez é calculada para cada iteração, por isso este método necessita de poucas iterações, porém com esforço computacional relativamente elevado. Por outro lado, no Newton-Raphson modificado (Figura 42b), a matriz de rigidez apenas é calculada na primeira iteração, sendo mantida constante nas outras, o que faz este método necessitar de mais iterações, porém com cada iteração ocorrendo de forma mais rápida que no Newton-Raphson regular. No método Quasi-Newton (Figura 43), também denominado de método da secante, utiliza-se uma matriz de rigidez tangente apenas para a primeira iteração do incremento, para as outras este método utiliza essencialmente informações da iteração anterior para obter uma melhor aproximação a partir de uma matriz de rigidez secante.



**Figura 42** Resposta carga-deslocamento para um problema unidimensional com uso do método Newton-Raphson: (a) regular; (b) modificado.



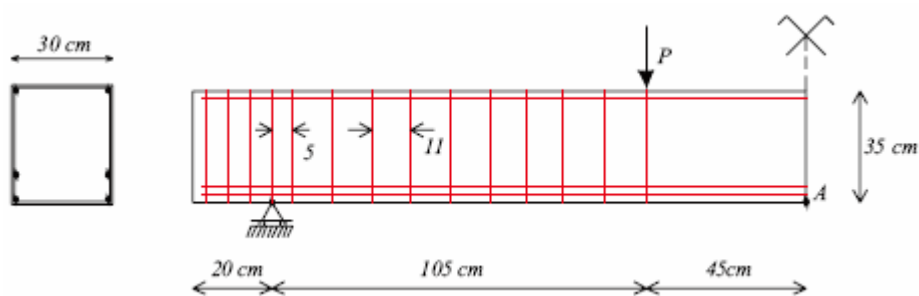
**Figura 43** Resposta carga-deslocamento para um problema unidimensional com uso do método Quasi-Newton.

### 2.3.6 Análise Numérica de Vigas de Concreto Convencional Armado

Na literatura, podem ser encontrados diversos trabalhos nos quais foram realizadas modelagens numéricas, em elementos finitos, do comportamento de vigas de concreto armado. Como exemplos podem ser citadas as pesquisas desenvolvidas por Proença (1988), Rabczuk *et al.* (2005), Yang e Chen (2005), Machado *et al.* (2007), Menin *et al.* (2009), Araújo *et al.* (2010) e Nogueira *et al.* (2010). Neste trabalho, serão

destacados os procedimentos de modelagem utilizados por Menin *et al.* (2009) e Araújo *et al.* (2010), os quais também utilizaram como ferramenta computacional o programa DIANA<sup>®</sup>.

Menin *et al.* (2009) modelaram numericamente o comportamento de vigas de concreto armado ensaiadas experimentalmente por Leonhardt e Walther (1962 *apud* MENIN *et al.*, 2009). Foi utilizado o modelo multidirecional, empregando-se as regras de amolecimento disponíveis no *software* DIANA<sup>®</sup> (frágil, linear, exponencial e Hordijk) e o critério de plasticidade de Von Mises. Uma das vigas modeladas apresenta a configuração e condições de ensaio observadas na Figura 44. A resistência à compressão e a resistência à tração do concreto adotadas nos modelos foram, respectivamente, 22,8 MPa e 1,57 MPa. Para todos os modelos, foi utilizado o valor de 0,2 para o fator de retenção do cisalhamento ( $\beta$ ). A regra de amolecimento linear foi baseada na deformação última do material, para a qual foi adotado o valor de 0,0003337. Para os modelos exponencial e Hordijk, os valores adotados para a largura da banda de fissuração ( $h$ ) e energia de fratura na tração ( $G_f$ ) foram:  $h = 17,32$  cm e  $G_f = 68$  N/m. Foi gerada uma malha de elementos finitos com 341 nós e 300 elementos retangulares. Em relação às armaduras, optou-se pela representação incorporada e o comportamento elastoplástico perfeito. Realizou-se ainda a consideração de aderência perfeita entre armadura e concreto.

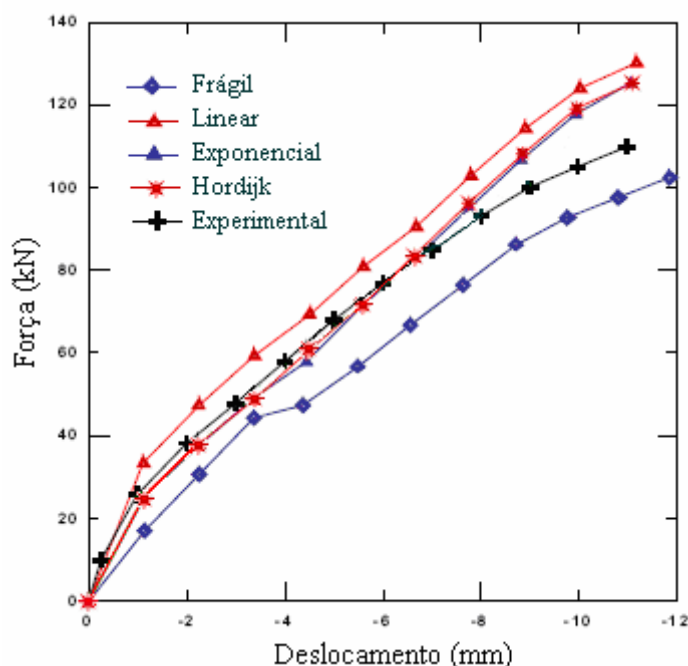


**Figura 44** Viga modelada por Menin *et al.* (2009).

Depois de realizada a simulação computacional do ensaio experimental da viga de concreto armado apresentada na Figura 44, as deflexões no meio do vão (Ponto A) foram associadas aos respectivos níveis de carregamento por meio da curva carga-deflexão observada na Figura 45. Observa-se que os modelos numéricos, exceto o obtido com o modelo frágil, apresentaram uma rigidez maior que a da curva experimental. Segundo Menin *et al.* (2009), essa rigidez adicional está associada à



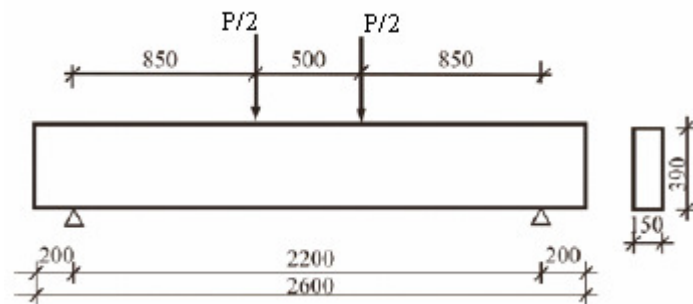
consideração de aderência perfeita e à contribuição do concreto entre fissuras e é mais significativa para vigas com baixas taxas de armaduras. Verifica-se ainda que o comportamento dos modelos que utilizaram as regras de amolecimento exponencial e Hordijk foram semelhantes entre si e próximo, até determinado nível de carregamento, do resultado experimental, indicando boas perspectivas para o uso dessas regras de amolecimento. No modelo frágil, a consideração de ruptura brusca causou a maior redução na rigidez da viga, enquanto que no modelo com regra de amolecimento linear a contribuição do concreto entre fissuras foi superestimada, originando a maior rigidez em relação aos outros modelos.



**Figura 45** Curvas carga-deslocamento obtidas a partir da modelagem numérica e do ensaio experimental (MENIN *et al.*, 2009).

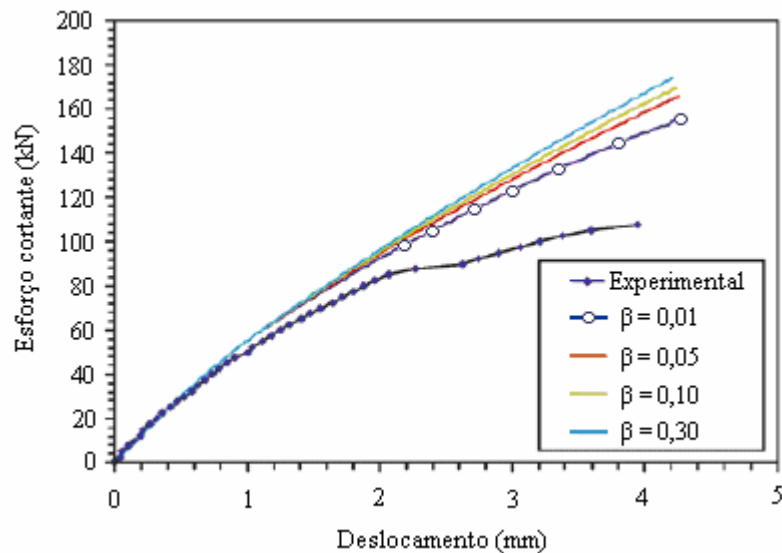
No trabalho realizado por Araújo *et al.* (2010), modelou-se numericamente o comportamento de vigas de concreto armado, com e sem fibras de aço, ensaiadas experimentalmente por Nunes (apud ARAÚJO *et al.*, 2010). Com o intuito de avaliar a influência do fator de retenção do cisalhamento  $\beta$  na modelagem, foram obtidos modelos com diferentes valores para este parâmetro. As dimensões e condições de apoio e carregamento das vigas de concreto armado modeladas são apresentadas na Figura 46. Das vigas modeladas, duas vigas não possuíam fibras de aço, das quais uma não apresentava armadura transversal e a outra possuía uma taxa de armadura transversal igual a 0,21%. Serão apresentados neste trabalho apenas os resultados

referentes a estas vigas, as quais foram modeladas tridimensionalmente, usando-se o elemento finito sólido isoparamétrico HX24L, de 8 nós. Para a modelagem da propagação das fissuras, os autores adotaram o modelo fixo. Para representação do concreto sob compressão, foi utilizado o modelo parabólico. Para a tração, adotou-se o modelo constitutivo com amolecimento linear. As armaduras transversais e longitudinais foram representadas da forma incorporada, com consideração de aderência perfeita com o concreto. Para a viga que não possuía armaduras transversais, os valores adotados para a resistência à compressão, resistência à tração e energia de fratura na tração do concreto foram, respectivamente: 46,30 MPa , 3,92 MPa e 121 N/m. Já para a viga que continha armaduras transversais, os valores adotados para estes parâmetros foram, respectivamente: 47,23 MPa , 3,36 MPa e 121 N/m.

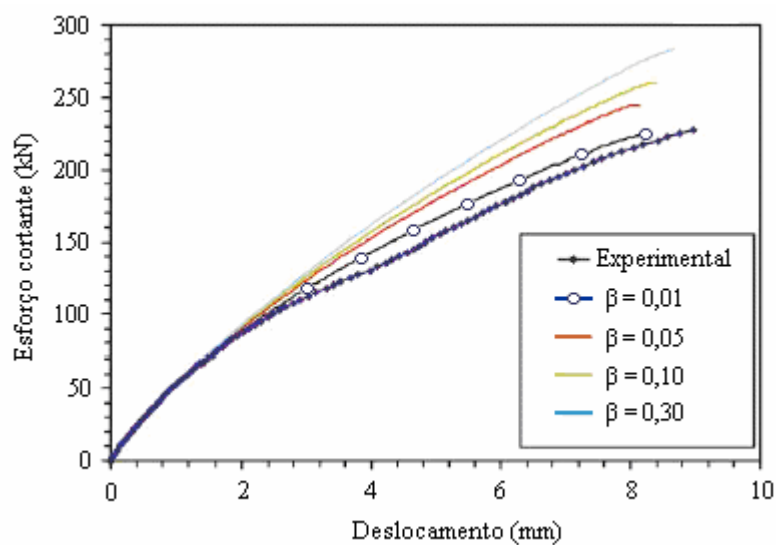


**Figura 46** Dimensões, em milímetros, e condições de apoio e carregamento das vigas modeladas por Araújo *et al.* (2010) (ARAÚJO *et al.*, 2010).

A partir da modelagem numérica, foram obtidas curvas carga-deflexão para as vigas analisadas. A Figura 47 mostra a curva experimental e as curvas obtidas com os modelos numéricos da viga confeccionada sem armaduras transversais, enquanto a Figura 48 apresenta esses resultados para a viga produzida com armaduras transversais.



**Figura 47** Resultados numéricos e experimental para vigas produzidas sem armadura transversal (ARAÚJO *et al.*, 2010).



**Figura 48** Resultados numéricos e experimental para vigas produzidas com armadura transversal (ARAÚJO *et al.*, 2010).

Verifica-se nos resultados obtidos por Araújo *et al.* (2010) que os modelos cuja resposta carga-deslocamento mais se aproximou da experimental, para as duas vigas analisadas, foram os que utilizaram o valor de 0,01 para o fator de redução do cisalhamento. Observa-se também que, com o aumento deste fator, aumentou-se a rigidez e resistência última dos modelos numéricos, embora, para baixos níveis de carregamento, todos os modelos tenham apresentado comportamento semelhante ao experimental. A maior discrepância entre valores numéricos e experimentais foi

verificada na modelagem da viga de concreto armado sem armaduras transversais. Isso é justificado, segundo o autor, pelo fato de a ruptura desta viga, nos ensaios experimentais, ter ocorrido devido à formação de uma única fissura diagonal de cisalhamento, comportamento este não simulado adequadamente por modelos de fissuração distribuída, os quais se mostram mais adequados na representação de múltiplas fissuras.

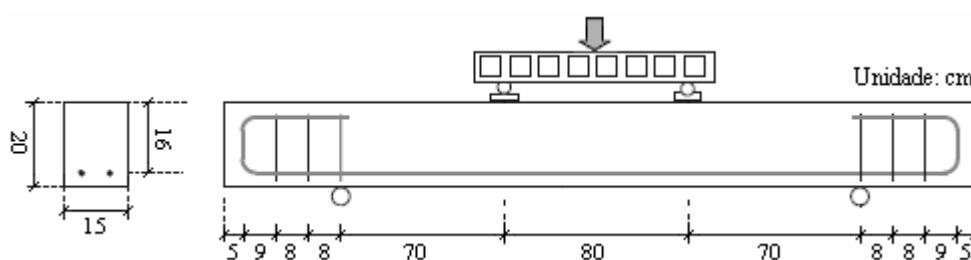
### 3 FORMULAÇÃO DE MODELO NUMÉRICO PARA VIGAS DE CONCRETO RECICLADO ARMADO

No presente trabalho, foram desenvolvidos modelos numéricos para vigas ensaiadas experimentalmente por Maruyama et al. (2004), Sato *et al.* (2007), Larrañaga (2004) e Carneiro (2011). A licença para uso do *software* DIANA<sup>®</sup> 9.0 utilizado nas simulações foi cedida pelo Programa de Engenharia Civil da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEC-COPPE/UFRJ) por meio do Projeto de Cooperação Acadêmica da CAPES (PROCAD/CAPES) intitulado Experimentação e Modelagem Numérica de Materiais e Estruturas de Baixo Impacto Ambiental.

#### 3.1 PARÂMETROS EXPERIMENTAIS REFERENTES ÀS VIGAS ANALISADAS

##### 3.1.1 Vigas Ensaizadas por Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007)

Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007) realizaram o mesmo programa experimental, porém apresentaram abordagens diferentes a respeito dos resultados. A Figura 49 mostra a geometria, posicionamento das armaduras e condições de ensaio de vigas produzidas por tais autores. Durante os ensaios, as deflexões foram medidas na seção central das vigas.



**Figura 49** Geometria, posicionamento das armaduras e condições de carregamento das vigas ensaiadas por Sato *et al.* (2007) e Maruyama *et al.* (2004).

Na Tabela 3, são apresentados o fator  $a/c$ , resistência à compressão, módulo de elasticidade e resistência à tração por compressão diametral ( $f_{tD}$ ) de concretos utilizados nas vigas. A letra “V” está associada a concretos de referência, produzidos com agregados naturais, “CR” representa concretos com 100% de agregados graúdos reciclados e agregados miúdos naturais, e “CFR” representa concretos com 100% de

agregados graúdos e miúdos reciclados. Os agregados reciclados foram produzidos a partir de resíduos de concreto. A terminologia “EX” refere-se a concretos produzidos com aditivo expansor. Os dados experimentais referentes às duas primeiras vigas (V-01-13WB e CFR-01-13WB) foram apresentados no trabalho de Sato *et al.* (2007), enquanto que para as demais vigas foram utilizados os dados apresentados no trabalho de Maruyama *et al.* (2004).

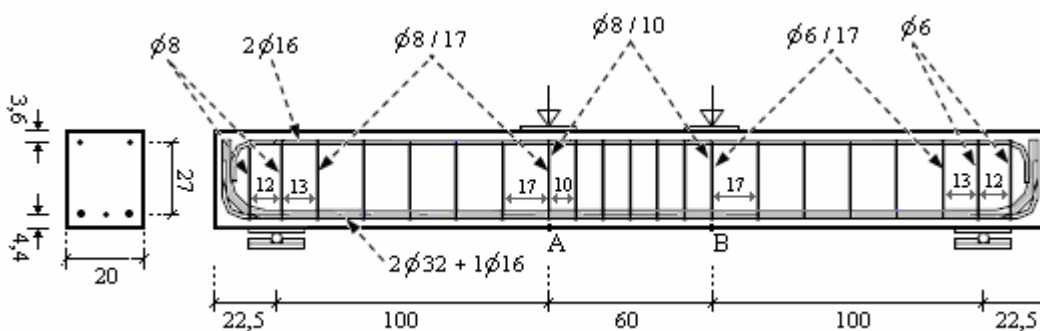
**Tabela 3** Fator  $a/c$  e propriedades mecânicas de concretos utilizados nas vigas produzidas por Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007).

CONCRETO	$a/c$	$f_c$ (MPa)	E (GPa)	$f_{tD}$ (MPa)
V-01-13WB	0,60	30,6	23,4	2,9
CFR-01-13WB	0,60	23,5	20,5	2,3
VC30	0,30	106,4	42,5	6,3
CRC30	0,30	69,0	33,0	3,9
CFRC30	0,30	53,8	25,4	3,7
VC45	0,45	57,0	36,5	3,0
CRC45	0,45	46,5	28,1	3,0
CFRC45	0,45	35,5	22,8	2,6
VC-EX45	0,45	55,3	36,0	3,6
CRC-EX45	0,45	46,6	28,1	3,4
CFRC-EX45	0,45	35,2	21,2	2,5
VC60	0,60	40,2	31,7	3,5
CRC60	0,60	32,9	25,5	2,7
CFRC60	0,60	29,2	19,6	2,3

A armadura longitudinal foi composta por duas barras de aço com diâmetro de 13 mm. O módulo de elasticidade e tensão de escoamento do aço utilizado nas vigas V-01-13WB e CFR-01-13WB foram, respectivamente, 193,2 GPa e 353 MPa. Para as demais vigas, os valores desses parâmetros foram iguais a 187 GPa e 331 MPa, respectivamente.

### 3.1.2 Vigas Ensaçadas por Larrañaga (2004)

Larrañaga (2004) realizou ensaios de flexão em quatro pontos em vigas produzidas com concreto contendo agregados graúdos reciclados de concreto. A Figura 50 apresenta a geometria e condições de ensaio das vigas, bem como o posicionamento e dimensões das armaduras. Durante os ensaios, que foram realizados com controle de deslocamento, foram medidos os deslocamentos verticais nos pontos A e B. Para a armadura transversal, foram utilizados estribos feitos com barras de aço com diâmetros de 6 e 8 mm e tensões de escoamento iguais a 544 MPa e 556 MPa, respectivamente. Os estribos foram distribuídos de modo a se garantir falha por cisalhamento. A armadura longitudinal foi composta por três barras com diâmetro de 16 mm e duas barras com diâmetro igual a 32 mm, todas com tensão de escoamento característica de 500 MPa.



**Figura 50** Geometria, posicionamento das armaduras e condições de carregamento de vigas ensaiadas por Larrañaga (2004) (dimensões em cm).

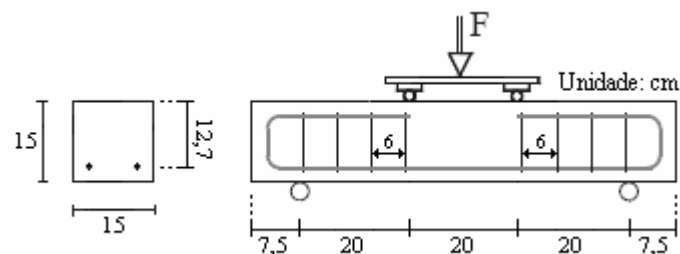
A Tabela 4 mostra a resistência à compressão, módulo de elasticidade e resistência à tração por compressão diametral dos concretos utilizados nas vigas produzidas por Larrañaga (2004). Os teores de substituição de agregados graúdos naturais por agregados graúdos reciclados foram 0% (HC-3), 25% (HR25-3), 50% (HR50-3) e 100% (HR100-3). Os concretos foram produzidos de maneira a apresentarem aproximadamente a mesma resistência à compressão.

**Tabela 4** Propriedades mecânicas dos concretos utilizados por Larrañaga (2004).

CONCRETO	$f_c$ (MPa)	E (MPa)	$f_{tD}$ (MPa)
HC-3	41,91	33727,5	2,64
HR25-3	42,38	33233,0	3,13
HR50-3	41,34	31805,0	3,22
HR100-3	39,74	25391,3	3,28

### 3.1.3 Vigas Ensaçadas por Carneiro (2011)

A Figura 51 apresenta a geometria, posicionamento das armaduras e condições de ensaio das vigas produzidas por Carneiro (2011). Os ensaios foram realizados com medição da deflexão na seção central das vigas. Na armadura transversal, foram utilizadas barras de aço classe CA-50 de diâmetro igual a 6,3 mm. Já na armadura longitudinal, foram utilizadas barras de aço classe CA-50 com diâmetro de 12,5 mm. Em ensaio de tração nas barras de aço longitudinais, estas apresentaram módulo de elasticidade e tensão de escoamento iguais a 220 GPa e 603 MPa, respectivamente.

**Figura 51** Geometria, posicionamento das armaduras e condições de carregamento das vigas ensaiadas por Carneiro (2011).

Carneiro (2011) utilizou agregados graúdos e miúdos reciclados de RCD de composição variada (Figura 1). A Tabela 5 mostra a resistência à compressão, módulo de elasticidade, resistência à tração na flexão ( $f_{tF}$ ) e coeficiente de Poisson referentes aos concretos utilizados nas vigas. A terminologia REF representa o concreto de referência, produzido com agregados naturais, AMR simboliza o concreto produzido com 25% de agregados miúdos reciclados, AGR refere-se ao concreto com 25% de



agregados graúdos reciclados e AMGR representa o concreto com 25% de agregados graúdos e miúdos reciclados.

**Tabela 5** Propriedades mecânicas dos concretos utilizados por Carneiro (2011).

CONCRETO	$f_c$ (Mpa)	E (GPa)	$f_{tF}$ (MPa)	$\nu$
REF	37,7	31,1	3,90	0,16
AMR	40,0	31,0	3,92	0,18
AGR	35,9	32,1	3,34	0,16
AMGR	37,3	29,2	4,09	0,16

### 3.2 PROCEDIMENTOS DE MODELAGEM

A fim de se identificar o modelo de fissuração mais adequado na previsão do comportamento das vigas de cada programa experimental, foram realizadas simulações com vigas de referência usando-se os três modelos de fissuração distribuída disponíveis no software DIANA<sup>®</sup>: fixo, rotacional e multidirecional. Para as vigas de concreto reciclado, foi utilizado o modelo de fissuração que melhor se ajustou aos resultados das vigas de referência.

O modelo de comportamento na tração utilizado nas análises foi o modelo de Hodijk (Figura 35f e Figura 36d), por este gerar resultados satisfatórios em modelagens de vigas sob flexão (MENIN *et al.*, 2009). Na compressão, para simulações realizadas com os modelos fixo e rotacional, o modelo de comportamento utilizado foi o parabólico (Figura 33g e Figura 34). Dessa forma, foi necessário estimar a resistência à tração direta, energia de fratura à tração e energia de fratura na compressão dos concretos utilizados nas vigas.

A partir da resistência à tração por compressão diametral de concretos produzidos nos programas experimentais de Maruyama *et al.* (2004), Sato *et al.* (2007) e Larrañaga (2004), bem como da resistência à tração na flexão dos concretos utilizados no trabalho de Carneiro (2011), foi determinada a resistência à tração direta ( $f_t$ ) por meio das Equações (68) e (69), recomendadas pelo Código Modelo CEB-FIP de 1990 (CEB-FIP, 1991) para concreto convencional.

$$f_t = 0,9 f_{tD} \quad (68)$$

$$f_t = f_{tF} \frac{1,5(h_1/h_0)^{0,7}}{1+1,5(h_1/h_0)^{0,7}} \quad (69)$$

onde  $h_1$  é a altura da viga utilizada no ensaio de tração na flexão e  $h_0 = 100$  mm. Carneiro (2011) realizou ensaio de tração na flexão com corpos de prova com as mesmas dimensões das vigas de concreto armado (Figura 51), portanto foi considerado  $h_1 = 150$  mm.

Para a determinação da energia de fratura na tração, foi utilizada a Equação (25). O diâmetro máximo dos agregados utilizados nos trabalhos de Larrañaga (2004) e Carneiro (2011) foi 2,5 cm, valor este também adotado para os agregados utilizados por Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007).

A energia de fratura na compressão ( $G_c$ ) foi estimada a partir da área sob a curva tensão-deformação do modelo constitutivo proposto por Xiao *et al.* (2005) para concretos reciclados, definido pela Equação (3) e ilustrado na Figura 3a. No cálculo da área, a deformação última considerada foi  $6800 \mu\epsilon$ , valor até o qual Xiao *et al.* (2005) realizaram medições. Para o cálculo de  $G_c$ , considerou-se o fato de que o comprimento do trecho no qual foram medidas as deformações foi 100 mm. O modelo proposto por González-Fonteboa *et al.* (2011), mostrado na Figura 3b, não foi utilizado porque neste a deformação última definida para concreto convencional é  $3500 \mu\epsilon$ , enquanto que para concreto reciclado a deformação última máxima é  $4270 \mu\epsilon$ , valores estes significativamente menores que o considerado no modelo proposto por Xiao *et al.* (2005).

Na Tabela 6, podem ser observados os valores calculados para a resistência à tração direta, energia de fratura à tração e energia de fratura na compressão para os concretos obtidos em cada programa experimental. É importante destacar que Maruyama *et al.* (2004), Sato *et al.* (2007) e Larrañaga (2004) não realizaram ensaios para determinação do coeficiente de Poisson dos concretos, por isso, seguindo-se recomendações do Código Modelo CEB-FIP de 1990 (CEB-FIP, 1991), foi adotado  $\nu = 0,2$  para os concretos utilizados em vigas ensaiadas por esses autores.

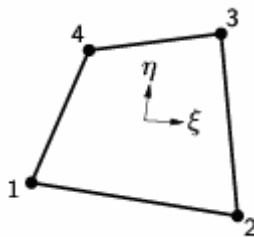
**Tabela 6** Resistência à tração direta, energia de fratura na tração e energia de fratura na compressão estimadas para os concretos utilizados nas vigas analisadas.

PROGRAMA EXPERIMENTAL	VIGA	$f_t$ (MPa)	$G_f$ (N/m)	$G_c$ (KN/m)
Maruyama <i>et al.</i> (2004) e Sato <i>et al.</i> (2007)	V-01-13WB	2,61	116,7	13,8
	CFR-01-13WB	2,07	101,3	6,4
	VC30	5,65	249,7	55,4
	CRC30	3,51	189,3	25,6
	CFRC30	3,32	162,3	18,7
	VC45	2,70	168,1	28,1
	CRC45	2,70	148,6	15,5
	CFRC45	2,33	126,9	10,9
	VC-EX45	3,24	165,0	27,1
	CRC-EX45	3,05	148,8	15,5
	CFRC-EX45	2,24	126,3	10,8
	VC60	3,15	136,4	18,9
	CRC60	2,42	121,6	9,9
	CFRC60	2,07	113,8	8,5
Larrañaga (2004)	HC-3	2,38	139,7	19,8
	HR25-3	2,82	140,7	16,1
	HR50-3	2,90	138,6	14,0
	HR100-3	2,95	135,5	12,7
Carneiro (2011)	REF	2,60	115,2	17,6
	AMR	2,61	124,0	18,8
	AGR	2,22	120,9	13,1
	AMGR	2,72	131,4	13,8

Nas simulações realizadas com o modelo fixo, foi utilizado o fator de retenção do cisalhamento  $\beta$  igual a 0,01, devido ao fato de resultados obtidos com este valor apresentarem-se coerentes com resultados experimentais (ARAÚJO *et al.*, 2010). Para simulações com o modelo multidirecional, utilizou-se  $\beta = 0,2$ , conforme recomendações encontradas na literatura (MENIN *et al.*, 2009), porém também foram realizadas variações neste parâmetro a fim de se determinar o valor com o qual se obtém

resultados mais próximos dos experimentais. Para este modelo de fissuração, a consideração da resistência à compressão dos concretos foi feita com a adoção do critério de abertura de fissura linear (Figura 30b) e o valor adotado para o ângulo limite  $\alpha$  foi  $60^\circ$  (valor padrão utilizado pelo software DIANA<sup>®</sup>).

Os ensaios de flexão em quatro pontos foram simulados computacionalmente por meio de análise estrutural estática bidimensional com controle de deslocamento. O elemento finito utilizado nas análises foi o Q8MEM (Figura 52), que é um elemento isoparamétrico quadrilateral com quatro nós, associado ao estado plano de tensão, baseado em interpolação linear e integração de Gauss. A função de interpolação deste elemento é definida pela Equação (70). O procedimento iterativo utilizado em cada incremento de deslocamento foi realizado com o método Newton-Raphson regular (Figura 42a). Em análises numéricas prévias realizadas com os métodos Newton-Raphson modificado (Figura 42b) e Quasi-Newton (Figura 43) não foi verificada diferença apreciável no tempo de convergência da solução final.



**Figura 52** Elemento finito Q8MEM utilizado nas análises.

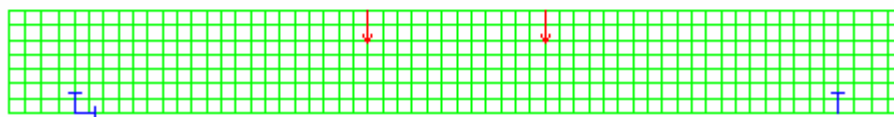
$$u_i(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \quad (70)$$

A Figura 53 apresenta a malha de elementos finitos e condições de contorno dos modelos numéricos das vigas analisadas. Para a determinação do tamanho dos elementos, considerou-se a pesquisa realizada por Bédard e Kotsovos (1986) na qual os autores constataram que a menor dimensão do elemento finito utilizado para representar o concreto fissurado deve ser maior que duas ou três vezes o diâmetro máximo dos agregados. Com o intuito de favorecer a maior discretização possível, a menor dimensão do elemento finito foi definida como duas vezes o tamanho do maior agregado. Com isso, considerando-se que o diâmetro máximo dos agregados foi 2,5 cm, a menor dimensão do elemento finito foi igual a 5 cm. Assim, a discretização da malha do modelo numérico das vigas produzidas por Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007)

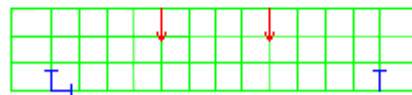
foi  $56 \times 4$  elementos (Figura 53a). Para as vigas ensaiadas por Larrañaga (2004), a discretização foi  $60 \times 7$  elementos (Figura 53b). Já no modelo numérico das vigas produzidas por Carneiro (2011), utilizou-se a discretização de  $14 \times 3$  elementos (Figura 53c).



(a)



(b)



(c)

**Figura 53** Malha de elementos finitos e condições de contorno utilizadas nas análises das vigas produzidas por: (a) Maruyama et al.(2004) e Sato et al. (2007); (b) Larrañaga (2004); (c) Carneiro (2011).

Para a largura da banda de fissura  $h$ , adotou-se o valor igual à menor dimensão do elemento finito utilizado na malha, conforme recomendações feitas por Bažant e Oh (1983) e Shah *et al.* (1995). Dessa forma, considerou-se  $h = 5 \text{ cm}$ .

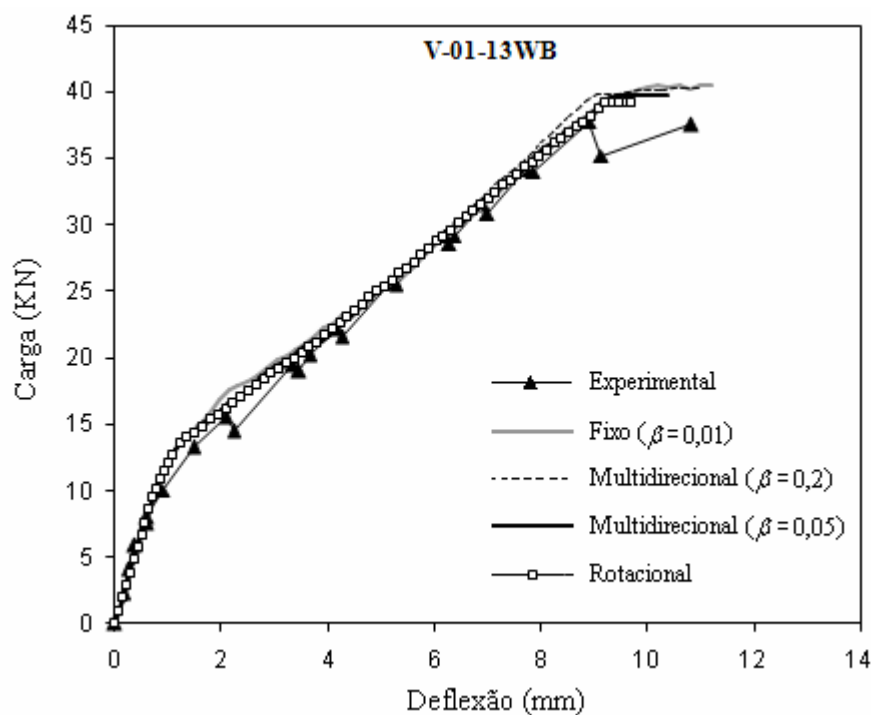
Com relação às armaduras, adotou-se o comportamento elastoplástico perfeito (Figura 39b) com a consideração de aderência perfeita entre aço e concreto. Na pesquisa realizada por Larrañaga (2004), não foi obtido o módulo de elasticidade das barras de aço utilizadas. Também não foi indicado o módulo de elasticidade do aço utilizado nos estribos das vigas produzidas por Maruyama *et al.* (2004), Sato *et al.* (2007) e Carneiro (2011). Para esses casos, o módulo de elasticidade adotado foi 200GPa, valor recomendado pelo Código Modelo CEB-FIP de 1990 (CEB-FIP, 1991).

## 4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

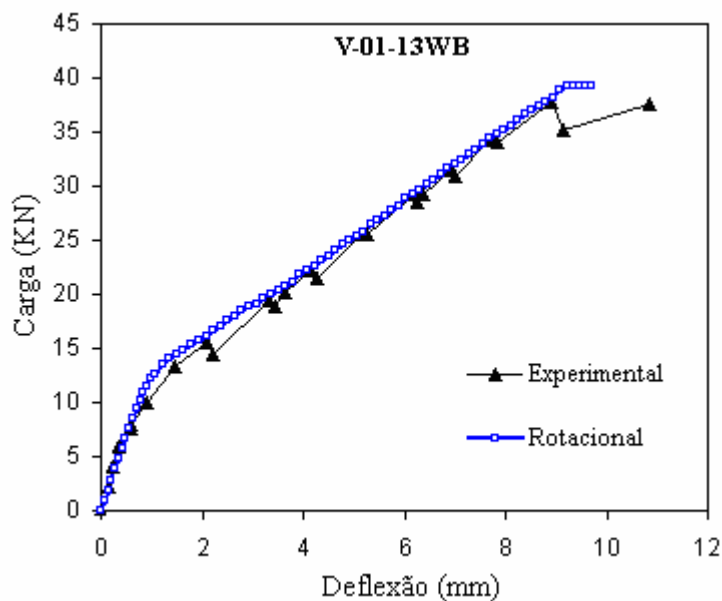
Nesta seção, os resultados numéricos são comparados com o obtidos experimentalmente por Maruyama *et al.* (2004), Sato *et al.* (2007), Larrañaga (2004) e Carneiro (2011).

### 4.1 RESULTADOS PARA VIGAS ENSAIADAS POR MARUYAMA *et al.* (2004) E SATO *et al.* (2007)

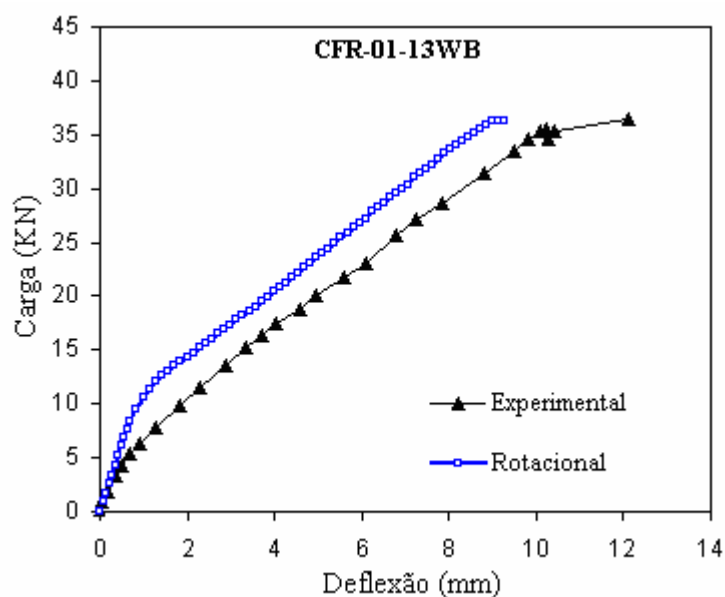
A partir da modelagem da viga de referência V-01-13WB com os modelos de fissuração distribuída disponíveis no software DIANA<sup>®</sup>, foram obtidos os resultados apresentados na Figura 54, referente ao diagrama carga total *versus* deflexão central da viga. Pode-se observar que todos os modelos forneceram resultados com grande precisão. O modelo multidirecional, inicialmente aplicado com  $\beta = 0,2$ , obteve melhor ajuste em relação ao resultado experimental com  $\beta = 0,05$ . Na definição do modelo mais adequado para a simulação das demais vigas, utilizou-se como critério a carga associada ao escoamento do aço, a qual foi prevista com maior precisão usando-se o modelo rotacional. Na Figura 55 e Figura 56, são destacadas as respostas carga-deflexão para as vigas V-01-13WB e CFR-01-13WB adotando-se o modelo rotacional.



**Figura 54** Resposta carga-deflexão para a viga V-01-13WB usando-se diferentes modelos de fissuração.



**Figura 55** Diagrama carga-deflexão obtida para a viga V-01-13WB adotando-se o modelo rotacional de fissuração distribuída.



**Figura 56** Resposta carga-deflexão obtida para a viga CFR-01-13WB usando-se o modelo rotacional.

Observa-se na Figura 56 que, apesar de sua rigidez inicial ter sido bem reproduzida pelo modelo numérico, a viga CFR-01-13WB apresentou fissuração e conseqüente perda de rigidez a um nível de carga consideravelmente menor que o verificado no início da fissuração do modelo numérico. Como Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007) não apresentaram outros diagramas carga-deflexão com possível

utilização neste trabalho, a avaliação do modelo numérico obtido foi realizada tendo-se como critérios o momento fletor de primeira fissura ( $M_{cr}$ ), o momento fletor associado ao escoamento do aço ( $M_y$ ) e a deflexão relativa a este momento ( $\delta_y$ ). Os momentos  $M_{cr}$  e  $M_y$  foram obtidos a partir da Equação (71) e Equação (72).

$$M_{cr} = \frac{F_{cr}}{2} a \quad (71)$$

$$M_y = \frac{F_y}{2} a \quad (72)$$

onde  $F_{cr}$  é a carga para a qual ocorre a primeira fissura,  $F_y$  é a carga relativa ao escoamento do aço e  $a$  é distância entre o ponto de aplicação da carga e o apoio mais próximo. Para as vigas em questão,  $a = 70$  cm (Figura 49)

Para o momento de primeira fissura, estão apresentados na Tabela 7 os resultados experimentais (Exp.), os valores calculados pelos autores por meio da resistência à tração por compressão diametral e módulo de elasticidade dos concretos (Cal.), bem como os resultados obtidos a partir de simulações numéricas realizadas com o modelo rotacional de fissuração (Num.) e as discrepâncias ( $\Delta$ ) relativas aos resultados experimentais. Nesta tabela, nota-se que a maior discrepância observada tanto no cálculo realizado pelos autores quanto nas simulações numéricas foi referente à viga CFR-01-13WB, cuja simulação está apresentada na Figura 56. Analisando-se, na Tabela 3, as propriedades mecânicas dos concretos utilizados nas vigas, observa-se que o concreto da viga CFRC60 teve módulo de elasticidade bem próximo e a mesma resistência à tração por compressão diametral do concreto da viga CFR-01-13WB. Com isso, esperava-se que estas vigas apresentassem valores de momento de primeira fissura próximos entre si, o que não foi observado nos resultados experimentais, uma vez que o valor deste parâmetro para a viga CFRC60 foi 60% maior que o verificado para a viga CFR-01-13WB. Também se esperava que a viga CFRC45, para a qual também foi observada grande discrepância no momento de primeira fissura obtido com o modelo numérico, apresentasse para este parâmetro valor superior ao da viga CFRC60, o que não foi verificado experimentalmente, com a viga CFRC45 tendo momento de primeira fissura 13% menor que o da viga CFRC60. De acordo com os autores, é possível que esses resultados inesperados tenham sido causados pela



ocorrência de excessiva retração dos concretos utilizados nas vigas. Por outro lado, considerando as propriedades mecânicas dos concretos, o modelo numérico mostrou-se coerente, pois estimou para as vigas CFR-01-13WB e CFRC60 o mesmo momento de primeira fissura e estimou, para a viga CFRC45, um momento de primeira fissura 10% maior que o da viga CFRC60.

**Tabela 7** Resultados experimentais, valores calculados por Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007) e os obtidos com o modelo numérico para o momento de primeira fissura de vigas ensaiadas por esses autores.

VIGA	$M_{cr}$				
	Exp. (KNm)	Cal. (KNm)	$\Delta$ (%)	Num. (KNm)	$\Delta$ (%)
V-01-13WB	3,6	3,1	-14	3,3	-8
CFR-01-13WB	1,5	2,7	80	2,6	76
VC30	7,2	4,6	-36	7,0	-3
CRC30	4,5	4,3	-4	4,2	-6
CFRC30	3,7	3,6	-3	4,1	10
VC45	4,3	4,8	12	3,8	-12
CRC45	3,5	3,8	9	3,3	-5
CFRC45	2,1	2,5	19	2,9	39
VC-EX45	4,5	5,0	11	4,0	-12
CRC-EX45	4,5	4,4	-2	3,9	-13
CFRC-EX45	3,6	4,3	19	2,9	-19
VC60	3,3	4,1	24	3,8	15
CRC60	2,7	2,9	7	3,0	12
CFRC60	2,4	2,9	21	2,6	10

Para as vigas nas quais foi utilizado o aditivo expensor (VC-EX45, CRC-EX45 e CFRC-EX45), percebe-se experimentalmente que ocorreu melhorias em propriedades do concreto, pois houve um aumento no momento de primeira fissura em comparação com as respectivas vigas de referência (VC-45, CRC45 e CFRC45). Tais melhorias são mais facilmente visíveis para as vigas VC-EX45 e CRC-EX45, no concreto das quais se observou um aumento da resistência à tração por compressão diametral sem variação significativa no módulo de elasticidade (Tabela 3). Embora o aumento no momento de primeira fissura das vigas nas quais foi utilizado o aditivo expensor também tenha sido

verificado nos resultados numéricos, os mesmos foram inferiores aos observados experimentalmente, principalmente para a viga CFRC-EX45.

Sem considerar os resultados das vigas CFR-01-13WB, CFRC45 e CFRC-EX45, o momento de primeira fissura das vigas foi previsto pelo modelo numérico com erro máximo de 15%, resultado este que pode ser considerado satisfatório, uma vez que os mecanismos que controlam a fissuração de materiais quase-frágeis, como o concreto, são complexos (Figura 19) e com grande variação em ensaios experimentais (SHAH *et al.*, 1995).

Na Tabela 8, são mostrados os resultados experimentais e os obtidos nas simulações numéricas para o momento e a deflexão associados ao início do escoamento do aço.

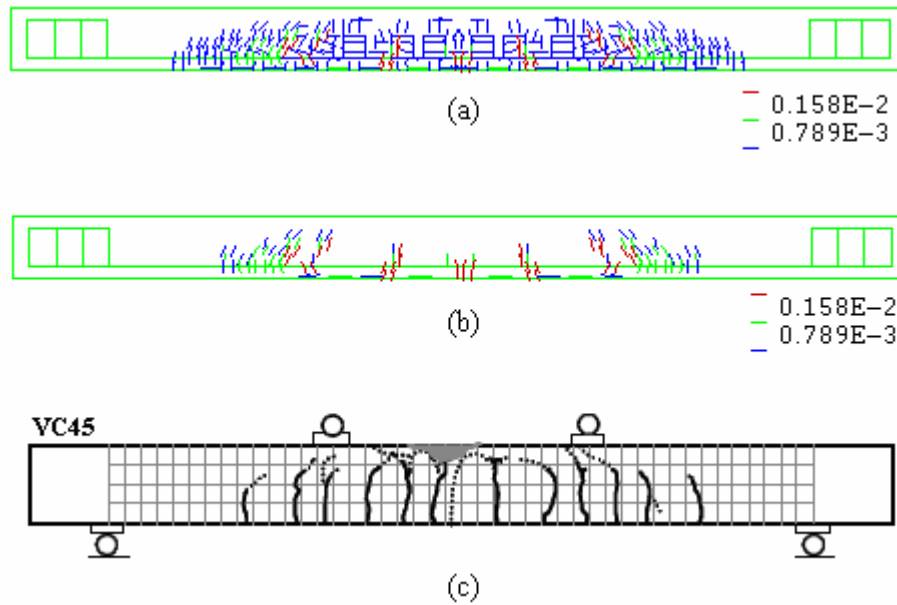
**Tabela 8** Resultados experimentais e os obtidos a partir do modelo numérico para o momento e a deflexão associados ao início do escoamento do aço para vigas ensaiadas por Maruyama *et al.* (2004) e Sato *et al.* (2007).

VIGA	$M_y$			$\delta_y$		
	Exp. (KNm)	Num. (KNm)	$\Delta$ (%)	Exp. (mm)	Num. (mm)	$\Delta$ (%)
V-01-13WB	13,5	13,7	1,6	8,9	9,3	4,5
CFR-01-13WB	12,4	12,7	1,8	10,4	9,1	-12,5
VC30	13,2	14,4	9,1	6,9	6,9	-0,4
CRC30	12,5	13,7	9,8	7,5	8,0	6,7
CFRC30	13,0	13,4	3,4	8,2	8,6	4,9
VC45	12,9	13,7	6,2	7,4	7,9	7,0
CRC45	13,2	13,4	1,8	7,7	8,5	10,1
CFRC45	12,6	13,2	4,8	9,5	9,6	0,5
VC-EX45	12,9	13,6	5,4	7,4	7,8	5,4
CRC-EX45	13,0	13,6	4,5	7,4	8,4	13,1
CFRC-EX45	11,8	13,2	12,1	8,6	9,2	7,0
VC60	11,9	13,4	12,4	7,1	8,2	15,5
CRC60	12,8	13,1	2,3	9,2	8,6	-6,4
CFRC60	12,2	12,9	5,6	9,2	9,4	2,5

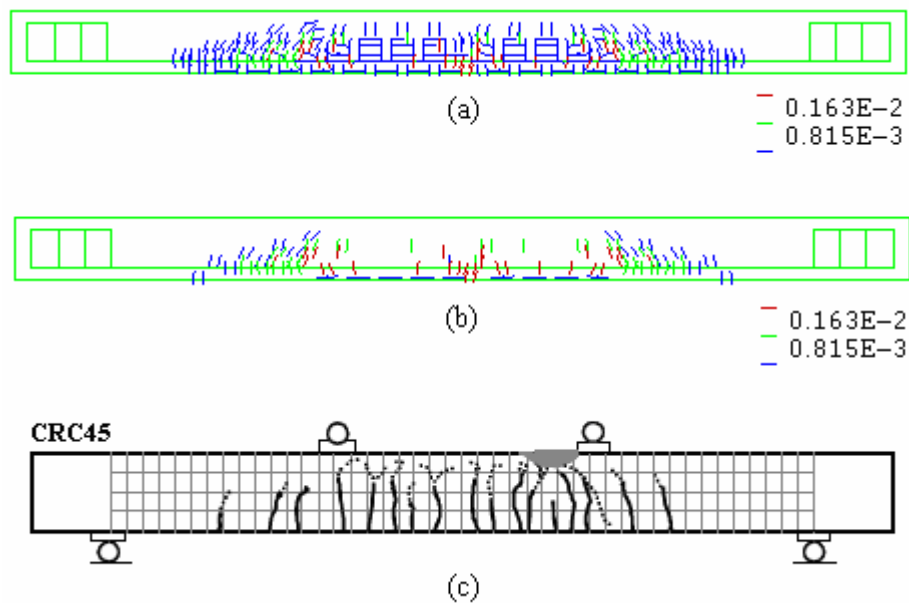
Verifica-se na Tabela 8 que, para o momento de escoamento do aço, os resultados estimados pelo modelo numérico, para todas as vigas analisadas, foram maiores que os experimentais, sem a ocorrência de grandes discrepâncias. Para este parâmetro, a discrepância média obtida com as simulações computacionais foi igual a 5,8%, sendo que a máxima discrepância foi de 12,4%. Para a deflexão associada ao momento de escoamento do aço, nota-se que em 10 das 14 vigas analisadas a discrepância da predição numérica foi inferior ou igual a 7,0%. A discrepância absoluta média para este parâmetro foi igual a 6,9%.

Observa-se nos resultados experimentais mostrados na Tabela 7 e Tabela 8 que os efeitos mais perceptíveis da substituição de agregados naturais por agregados reciclados no desempenho estrutural das vigas analisadas foram a redução do momento de primeira fissura e o aumento da deflexão relativa ao momento de escoamento do aço. Esses efeitos foram mais acentuados para as vigas que utilizaram concretos com 100% de agregados graúdos e miúdos reciclados. De modo geral, nas predições realizadas com o modelo numérico tais efeitos também podem ser observados. A única exceção refere-se à deflexão de escoamento do aço para a viga CFR-01-13WB, que foi 2% menor que a da viga de referência V-01-13WB, enquanto que nos ensaios experimentais este resultado foi 17% maior que o da viga de referência.

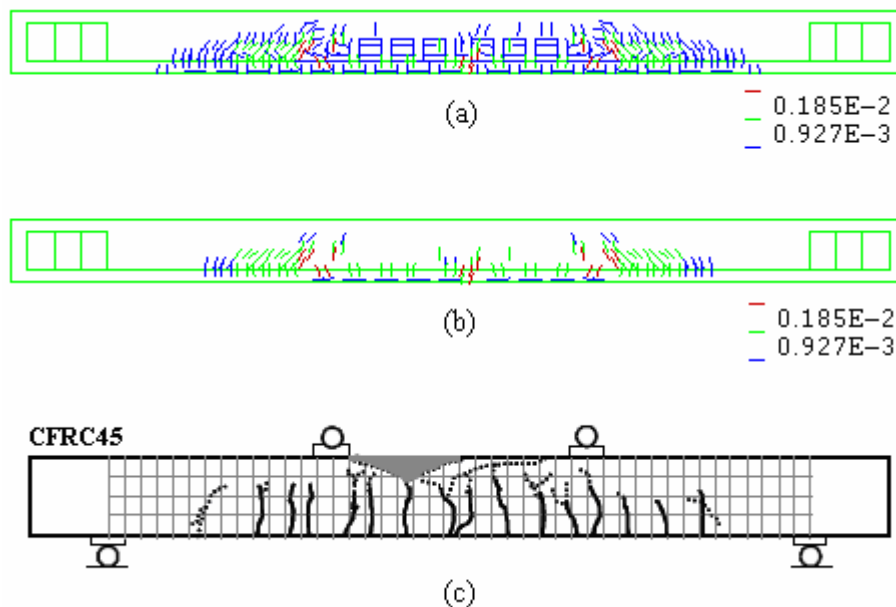
Na Figura 57, Figura 58 e Figura 59, o padrão de fissuração dos modelos numéricos obtidos para as vigas com fator  $a/c$  igual a 0,45 (VC45, CRC45 e CFRC45) é comparado com o padrão de fissuração dessas vigas verificado nos ensaios experimentais. O padrão de fissuração completo gerado em simulações realizadas com modelos de fissuração distribuída apresenta grande número de fissuras que seriam imperceptíveis durante o mapeamento visual realizado em ensaios experimentais. Além disso, a aplicação do modelo de banda de fissura tende, naturalmente, a superestimar a quantidade de fissuras (BAŽANT e OH, 1983; SHAH *et al.*, 1995). Por isso, para favorecer uma comparação mais adequada, são mostrados, juntamente com os padrões de fissuração completos, os padrões nos quais as fissuras mostradas possuem deformação maior que 0,0005. Utilizando-se a Equação (27), verifica-se que este valor de deformação de fissura equivale a uma abertura de fissura igual a 25  $\mu\text{m}$ . Com a realização deste procedimento, destacou-se a localização das principais fissuras que contribuíram para a ruptura do modelo numérico.



**Figura 57** Padrão de fissuração da viga VC45: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a  $25\ \mu\text{m}$ ; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.



**Figura 58** Padrão de fissuração para a viga CRC45: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a  $25\ \mu\text{m}$ ; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.



**Figura 59** Padrão de fissuração para a viga CFRC45: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25  $\mu\text{m}$ ; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.

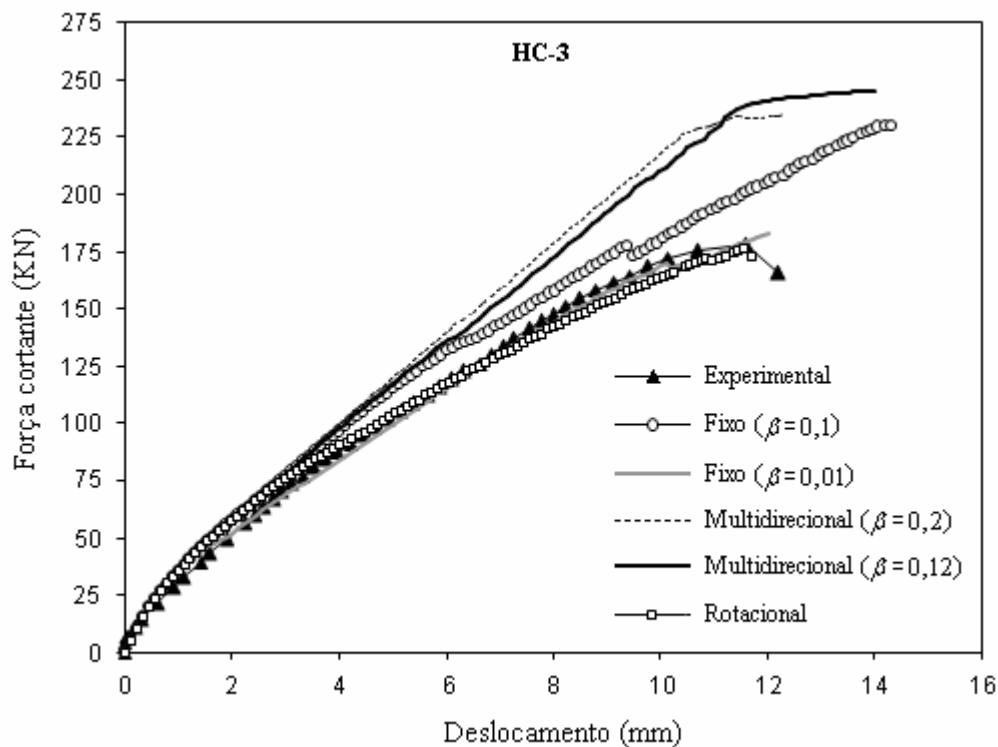
A partir da análise dos padrões de fissuração obtidos nos ensaios experimentais, mostrados na Figura 57c, Figura 58c e Figura 59c, observa-se que nas vigas produzidas com concreto reciclado foi desenvolvida maior quantidade de fissuras. Além disso, nota-se também que o trecho fissurado é maior para essas vigas. Os modelos numéricos mostraram-se capazes de prever satisfatoriamente essas características, pois se percebe que a quantidade de fissuras com largura superior a 25  $\mu\text{m}$  e o trecho no qual estas fissuras se localizaram (Figura 57b, Figura 58b e Figura 59b) também foram maiores para as vigas de concreto reciclado. Este comportamento é reproduzido nos modelos numéricos principalmente pelo fato de o módulo de elasticidade dos concretos reciclados ser menor que o do concreto de referência, isto favorece a fissuração a um nível de carga mais baixo, com o concreto entre fissuras apresentando menor rigidez, propiciando a formação de novas fissuras. Com isso, uma vez que a resistência à tração do concreto reciclado das vigas CRC 45 e CFRC45 não foi superior ao do concreto de referência da viga VC45, esperava-se que a abertura de fissura observada no padrão de fissuração dos modelos numéricos fosse maior para as vigas de concreto reciclado e esta expectativa foi confirmada, conforme pode ser verificado na Tabela 9.

**Tabela 9** Deformação e abertura de fissura máximas observadas no padrão de fissuração dos modelos numéricos das vigas VC45, CRC45 e CFRC45, juntamente com o módulo de elasticidade e resistência à tração por compressão diametral dos concretos.

VIGA	E (GPa)	$f_{tD}$ (MPa)	$\varepsilon_{\max}^{cr}$	$w_{\max}$ ( $\mu\text{m}$ )
VC45	36,50	3,0	0,00236	118
CRC45	28,10	3,0	0,00244	122
CFRC45	22,80	2,6	0,00278	139

#### 4.2 RESULTADOS PARA VIGAS PRODUZIDAS POR LARRAÑAGA (2004)

As vigas ensaiadas por Larrañaga (2004) foram projetadas de modo que a falha ocorresse por cisalhamento, o que motivou a verificação do fator de retenção de cisalhamento tanto para as simulações realizadas com o modelo multidirecional quanto para as realizadas com o modelo fixo de fissuração distribuída. Na Figura 60, estão apresentadas as respostas força cortante-deslocamento obtidas em simulações numéricas realizadas com os modelos fixo, rotacional e multidirecional para a viga de referência HC-3. A Tabela 10 auxilia a comparação dos resultados mostrando os valores obtidos para a força cortante ( $V_R$ ) e deslocamento vertical ( $\delta_{V_R}$ ) associados ao início da ruptura da viga, juntamente com as discrepâncias relativas aos valores experimentais, que foram iguais a 177 kN e 10,9 mm, respectivamente.



**Figura 60** Respostas força cortante-deslocamento obtidas numericamente com diferentes modelos de fissuração distribuída para a viga de referência HC-3 em comparação com a resposta experimental.

**Tabela 10** Resultados numéricos para força cortante e deslocamento vertical associados ao início da ruptura de vigas produzidas por Larrañaga (2004), usando-se diferentes modelos de fissuração, juntamente com as discrepâncias relativas aos valores experimentais.

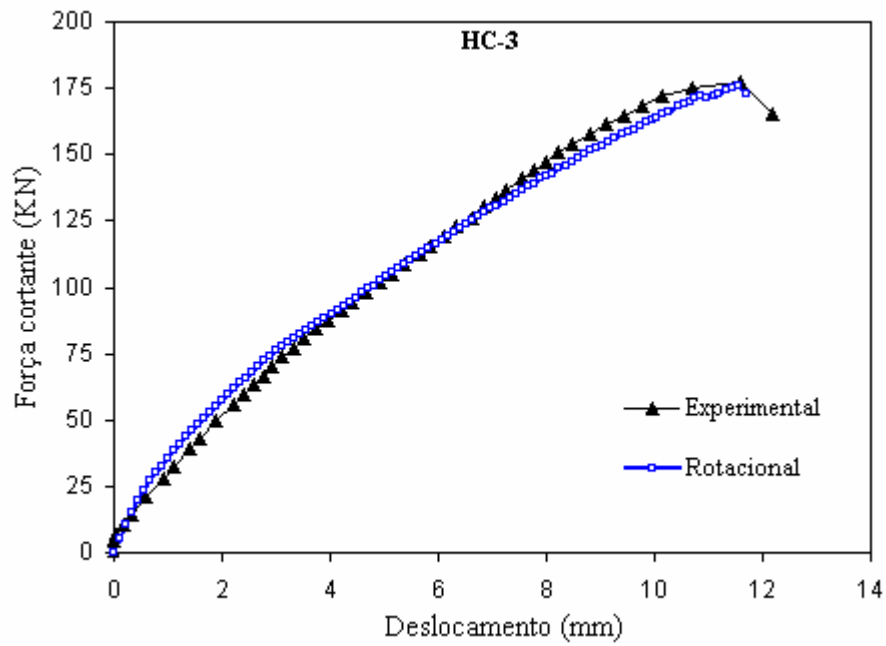
MODELO DE FISSURAÇÃO	$V_R$ (kN)	$\Delta$ (%)	$\delta_{V_R}$ (mm)	$\Delta$ (%)
Multidirecional ( $\beta = 0,2$ )	230	29,9	10,9	-5,2
Multidirecional ( $\beta = 0,12$ )	240	35,6	11,7	1,7
Fixo ( $\beta = 0,1$ )	230	29,9	14,2	23,5
Fixo ( $\beta = 0,01$ )	183	3,4	12	4,3
Rotacional	176	-0,6	11,55	0,4

Verifica-se nos resultados apresentados na Figura 60 e Tabela 10 que as simulações realizadas com o modelo multidirecional superestimaram significativamente o valor do parâmetro  $V_R$  tanto para  $\beta = 0,2$  quanto para  $\beta = 0,12$ , sendo este o valor mínimo com o qual se obteve convergência satisfatória da solução do modelo numérico.

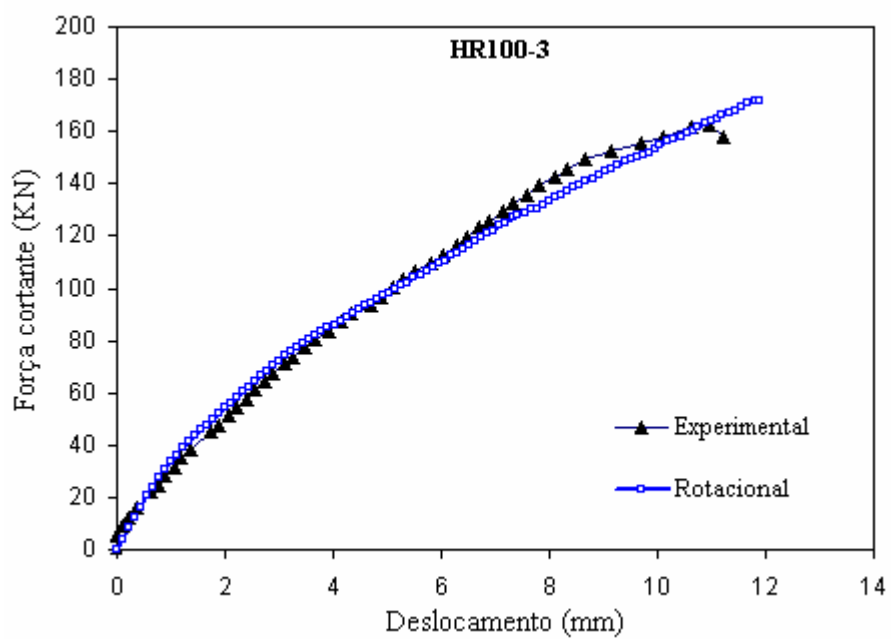
Observa-se ainda que a aplicação deste modelo de fissuração não favoreceu a perda de rigidez detectada experimentalmente, o que o torna inadequado para a simulação das vigas produzidas por Larrañaga (2004). Nas simulações desenvolvidas com o modelo fixo, percebe-se como a variação do parâmetro  $\beta$  pode influenciar os resultados numéricos obtidos. Para  $\beta = 0,1$  neste modelo, a rigidez imposta ao cisalhamento foi relativamente elevada, conseqüentemente os valores de  $V_R$  e  $\delta_{V_R}$  foram consideravelmente superestimados pelo modelo numérico. Por outro lado, para  $\beta = 0,01$  a predição numérica apresentou bom ajuste com relação ao resultado experimental.

Com relação à resposta força cortante-deslocamento obtida com o modelo rotacional para a viga HC-3, nota-se, na Figura 60 e Figura 61, boa correlação com o resultado experimental. Observa-se na Tabela 10 que com este modelo os valores de  $V_R$  e  $\delta_{V_R}$  foram estimados com excelente precisão, apresentando as menores discrepâncias, ambas inferiores a 1%. Por isso, este modelo foi considerado o mais adequado para a simulação das demais vigas. A Figura 62 mostra o comportamento à flexão do modelo numérico da viga HR100-3 comparado com o resultado experimental. Também se verifica para esta viga satisfatória predição numérica do comportamento observado no ensaio experimental. A Tabela 11 apresenta, para as quatro vigas analisadas, os resultados experimentais e numéricos referentes à força cortante máxima ( $V_{max}$ ) e ao deslocamento vertical associado à mesma ( $\delta_{V_{max}}$ ), bem como as discrepâncias dos resultados numéricos com relação aos valores experimentais para cada parâmetro. É importante observar que, tanto nas curvas experimentais quanto nas obtidas numericamente com o modelo rotacional,  $V_{max}$  e  $V_R$ , assim como  $\delta_{V_{max}}$  e  $\delta_{V_R}$ , são equivalentes.





**Figura 61** Diagrama força cortante-deslocamento do modelo numérico desenvolvido com o modelo rotacional para a viga de referência HC-3.



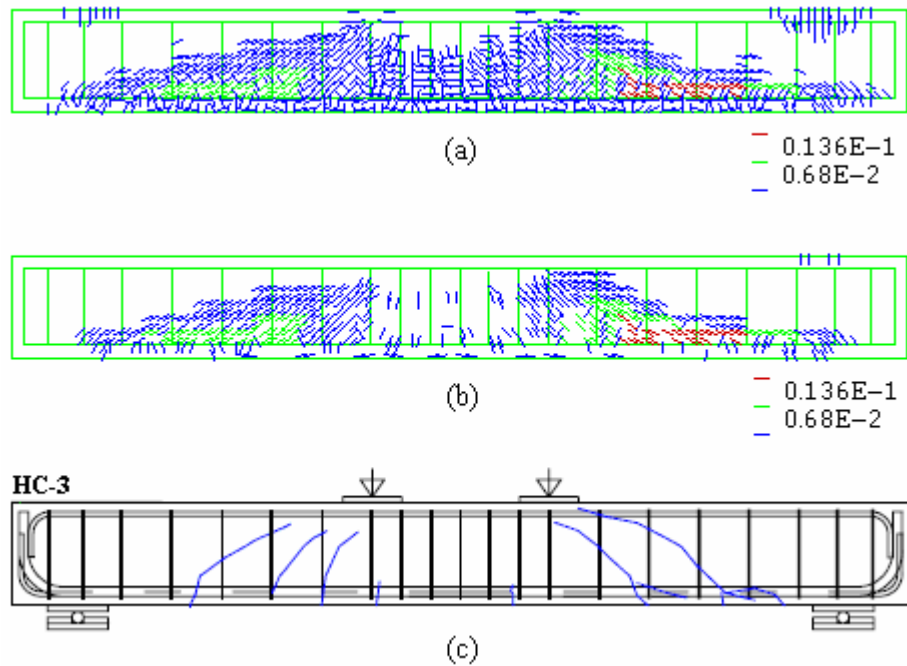
**Figura 62** Diagrama carga-deslocamento do modelo numérico desenvolvido com o modelo rotacional para a viga HR100-3.

**Tabela 11** Resultados experimentais e numéricos para força cortante e deslocamento vertical relativos ao início da ruptura de vigas ensaiadas por Larrañaga (2004).

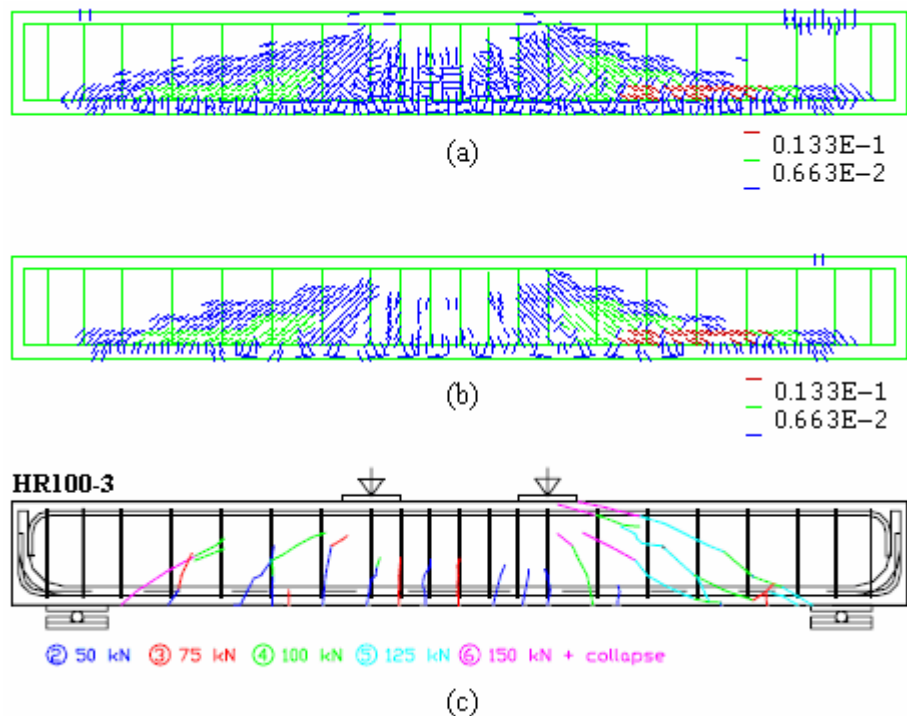
VIGA	$V_{\max}$			$\delta_{V_{\max}}$		
	Exp. (KN)	Num. (KN)	$\Delta$ (%)	Exp. (mm)	Num. (mm)	$\Delta$ (%)
HC-3	177	176	-0,6	11,5	11,55	0,4
HR25-3	169	180	6,5	11,3	11,5	1,8
HR50-3	176	179	1,7	11,0	11,6	5,5
HR100-3	163	171,5	5,2	10,8	11,8	9,3

Analisando-se os resultados mostrados na Tabela 11, constata-se que a força cortante máxima das vigas analisadas foi satisfatoriamente estimada pelo modelo numérico desenvolvido com o modelo rotacional de fissuração, uma vez que a máxima variação com relação ao resultado experimental foi 6,5%. Para o deslocamento vertical associado à força cortante máxima, a maior discrepância foi 9,3% (viga HR100-3), com as demais variações inferiores a 6%.

A Figura 63 e a Figura 64 mostram o padrão de fissuração obtido numericamente para as vigas HC-3 e HR100-3 em comparação com o verificado experimentalmente. No mapeamento realizado durante os ensaios experimentais (Figura 63c e Figura 64c), percebe-se que foram detectadas grandes fissuras na região de cisalhamento, sendo que as maiores ocorreram, como era esperado, no trecho da viga em que as barras de aço dos estribos tiveram menor diâmetro (Figura 50). De modo geral, observa-se que os padrões de fissuração obtidos numericamente podem ser considerados coerentes, uma vez que nestes também ocorreram grandes fissuras na região de cisalhamento, com as maiores ocorrendo no trecho cujos estribos foram produzidos com barras de aço de menor diâmetro. Considerando-se apenas fissuras com largura maior que 25  $\mu\text{m}$  (Figura 63b e Figura 64b), nota-se, principalmente no trecho compreendido entre os pontos de aplicação de carga, que o modelo numérico da viga H100-3 apresentou quantidade de fissuras maior que a observada no modelo numérico da viga HC-3, analogamente ao que foi visto nos ensaios experimentais. Essa variação no padrão de fissuração se justifica pelo fato de o módulo de elasticidade do concreto reciclado utilizado na viga HR100-3 ter sido menor que o do concreto de referência utilizado na viga HC-3 (Tabela 4).



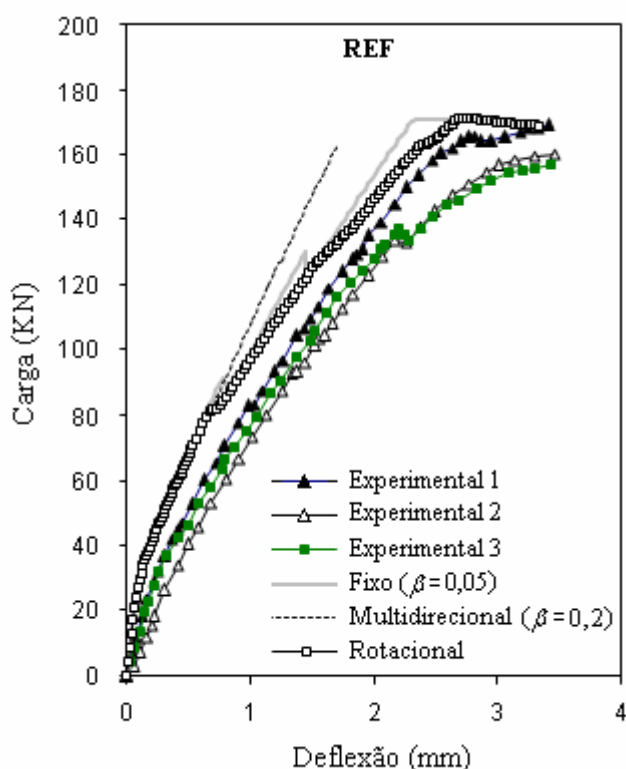
**Figura 63** Padrão de fissuração para a viga HC-3: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25  $\mu\text{m}$ ; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.



**Figura 64** Padrão de fissuração para a viga HR100-3: (a) padrão completo do modelo numérico; (b) padrão do modelo numérico com fissuras que possuem largura superior a 25  $\mu\text{m}$ ; (c) padrão verificado nos ensaios experimentais.

### 4.3 RESULTADOS PARA VIGAS ENSAIADAS POR CARNEIRO (2011)

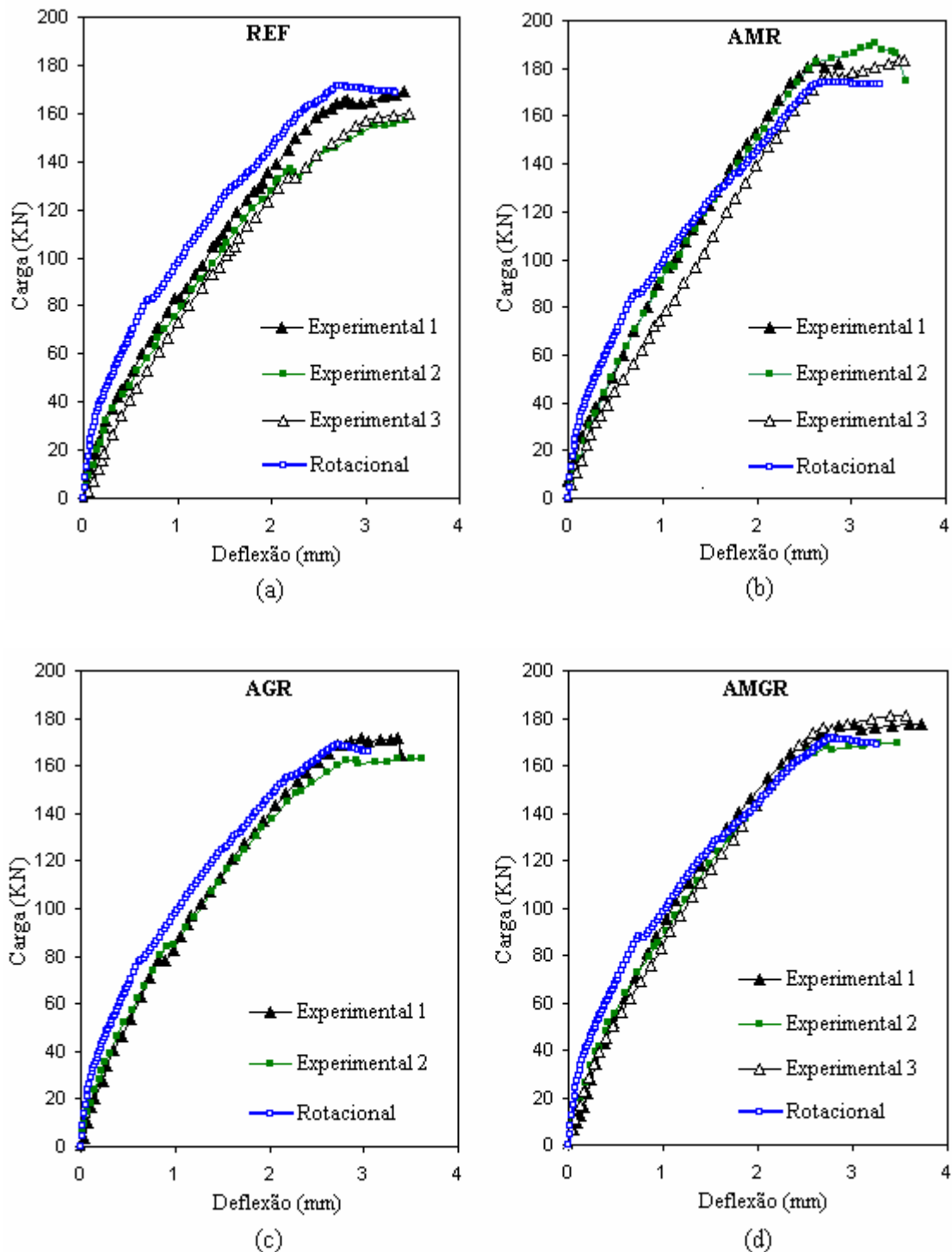
As respostas carga-deflexão obtidas experimental e numericamente para a viga de referência (REF) ensaiada por Carneiro (2011) podem ser observadas na Figura 65. Percebe-se que para esta viga, de modo geral, não houve boa correlação entre os resultados numéricos e os experimentais. A rigidez inicial dos modelos numéricos foi maior que a verificada nos ensaios experimentais, o que pode ser ter sido causado, de acordo com Shah *et al.* (1995), por um baixo valor da velocidade de carregamento nestes ensaios.



**Figura 65** Respostas carga-deflexão obtidas numericamente para a viga de referência REF, usando-se diferentes modelos de fissuração distribuída.

Adotando-se o modelo multidirecional de fissuração, o melhor resultado foi obtido com  $\beta = 0,2$ . Com este modelo de fissuração, a rigidez final do modelo numérico mostrou-se sensivelmente maior que a observada com os outros modelos de fissuração utilizados. Usando-se o modelo fixo de fissuração com  $\beta = 0,01$ , não se obteve convergência satisfatória da solução numérica, esta foi obtida apenas para valores de  $\beta$  superiores ou igual a 0,05, valor com o qual foi obtido resultado mais próximo do experimental. Com utilização do modelo rotacional de fissuração, verificou-

se na resposta carga-deflexão obtida numericamente o comportamento mais próximo do observado experimentalmente. Assim, o modelo rotacional de fissuração foi considerado o mais adequado para a modelagem das demais vigas. Os resultados são apresentados na Figura 66.



**Figura 66** Respostas carga-deflexão obtida numericamente com o modelo rotacional de fissuração em comparação com as obtidas experimentalmente para as vigas ensaiadas por Carneiro (2011): (a) viga REF; (b) Viga AMR; (c) viga AGR; (d) viga AMGR.

Observa-se na Figura 66 que, de modo geral, a resposta carga-deflexão obtida numericamente apresentou melhores ajustes para os resultados experimentais das vigas produzidas com concreto reciclado. Nota-se também que a perda de rigidez do modelo numérico, exceto para a viga AMR, foi análoga à detectada experimentalmente durante todo o carregamento da estrutura. A Tabela 12 mostra os resultados numéricos e experimentais relativos à carga associada ao início de escoamento do aço das armaduras longitudinais ( $F_y$ ) para as vigas analisadas, bem como as discrepâncias entre os valores obtidos numericamente e os valores experimentais médios.

**Tabela 12** Resultados numéricos e experimentais referentes à carga de início de escoamento do aço das armaduras longitudinais (coeficiente de variação percentual entre parênteses).

VIGA	$F_y$		
	Exp. (KN)	Num. (KN)	$\Delta$ (%)
REF	159,0 (3)	171	7,5
AMR	180,8 (3)	174	-3,8
AGR	166,6 (4)	169	1,4
AMGR	175,2 (5)	171	-2,4

Analisando-se esta tabela, pode-se afirmar que o valor de  $F_y$  foi satisfatoriamente estimado pelo modelo numérico, uma vez que o módulo da maior discrepância observada foi igual a 7,5%, referente à viga de referência. Para as vigas produzidas com concreto reciclado, o módulo da discrepância foi inferior a 4%.

## 5 CONCLUSÕES

A fim de contribuir para os estudos sobre predição numérica do comportamento de elementos construtivos produzidos com concreto reciclado, o objetivo deste trabalho foi modelar o comportamento à flexão de vigas de concreto reciclado armado, usando-se como ferramenta computacional o *software* DIANA<sup>®</sup>.

Ao longo da pesquisa, foram utilizados resultados de três programas experimentais encontrados na literatura. Foram realizadas simulações numéricas com os modelos de fissuração distribuída disponíveis no programa DIANA<sup>®</sup>: fixo, rotacional e multidirecional. Para o comportamento na tração, foi adotado o modelo de Hordijk (Figura 35f), com determinação da energia de fratura na tração ( $G_f$ ) a partir da Equação (25), proposta pelo Código Modelo CEB-FIP de 1990. Na compressão, para as simulações realizadas com os modelos fixo e rotacional, foi adotado o modelo de comportamento parabólico (Figura 33g), com a energia de fratura na compressão ( $G_c$ ) sendo estimada por meio da curva tensão-deformação proposta por Xiao *et al.* (2005) (Equação (3) e Figura 3a). Nas modelagens realizadas com o modelo multidirecional de fissuração, a consideração da resistência à compressão dos concretos foi feita adotando-se o critério de abertura de fissura linear (Figura 30b).

O modelo de fissuração distribuída considerado como o mais adequado para a modelagem das vigas dos três programas experimentais foi o rotacional. Observou-se que o modelo fixo também pode ser considerado adequado para a modelagem de vigas do programa experimental desenvolvido por Maruyama *et al.* (2004), Sato *et al.* (2007) e Larrañaga (2004). Entretanto, com este modelo de fissuração, os resultados numéricos para a carga e deflexão associadas ao início da ruptura apresentaram discrepâncias relativas aos valores experimentais superiores às verificadas com a utilização do modelo rotacional. O modelo multidirecional de fissuração, com ângulo limite  $\alpha$  igual a 60° (valor padrão sugerido pelo *software* DIANA<sup>®</sup>), foi o que se mostrou mais inadequado para a modelagem de vigas dos três programas experimentais.

Com o modelo rotacional de fissuração, obtiveram-se, para as vigas de concreto reciclado armado, resultados numéricos coerentes e, de modo geral, satisfatórios, com destaque para os valores previstos para a carga associada ao início da ruptura dos espécimes. Dentre as 22 vigas analisadas, o valor máximo, em módulo, da discrepância entre os resultados numéricos e os valores experimentais deste parâmetro

foi igual 12,4%, sendo que para 17 vigas a discrepância foi inferior a 7%, indicando que este parâmetro pode ser predito pelo modelo numérico.

O padrão de fissuração obtido numericamente com o modelo rotacional mostrou-se coerente com o padrão de fissuração verificado experimentalmente, tanto para vigas de referência quanto para vigas de concreto reciclado armado. De maneira geral, o modelo numérico foi capaz de prever a localização das maiores fissuras. Observou-se ainda que, assim como o que ocorreu nos ensaios experimentais, o padrão de fissuração dos modelos numéricos das vigas de concreto reciclado apresentou quantidade de fissuras maior que a detectada no padrão das vigas de referência. Isso indica que a tendência de as vigas produzidas com concreto reciclado apresentarem maior número de fissuras pode ser satisfatoriamente representada com a redução que geralmente ocorre no módulo de elasticidade desse concreto.

Assim, diante do que foi exposto, pode-se concluir que o objetivo deste trabalho foi satisfatoriamente alcançado. Embora os agregados reciclados causem alterações em importantes propriedades mecânicas do concreto, constatou-se que é possível prever de forma aceitável o comportamento de vigas de concreto reciclado armado com procedimentos de modelagem similares aos adotados para vigas de concreto convencional armado.



## REFERÊNCIAS

ANGULO, S. C. **Caracterização de agregados de resíduos de construção e demolição reciclados e a influência de suas características no comportamento de concretos**. Tese (Doutorado). São Paulo. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2005. 164 p.

ARAGÃO, H. G. **Análise estrutural de lajes pré-moldadas produzidas com concreto reciclado de construção e demolição**. Dissertação (Mestrado). Maceió. Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Alagoas, 2007. 109 p.

ARAÚJO, D. L.; CARMO, L. C.; NUNES, F. G. T.; TOLEDO FILHO, R. D. Modelagem computacional de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço submetidas a cisalhamento. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 3, n. 1, p. 68-94, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 10.004: Resíduos sólidos: classificação. Rio de Janeiro, 2004a.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004b.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 15116: Agregados de resíduos sólidos da construção civil: utilização em pavimentação e preparo de concreto sem função estrutural - Requisitos. Rio de Janeiro, 2004c.

BAIRAGI, N. K.; RAVANDE, K.; PAREEK, V. K. Behaviour of concrete with different proportions of natural and recycled aggregates. **Resources, Conservation and Recycling**, v. 9, p. 109-126, 1993.

BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures**, 16 (93), p. 155-177, 1983.

BÉDARD, C.; KOTSOVOS, M. D. Fracture processes of concrete for NLFEA methods. **Journal of Structural Engineering**, v. 112, 573-587, 1986.

BIANCHINI, G.; MARROCCHINO, E.; TASSINARI, R.; VACCARO, C. Recycling of construction and demolition waste materials: a chemical-mineralogical appraisal. **Waste Management**, v. 25, p.149-159, 2005.

BRITO, J.; PEREIRA, A. S.; CORREIA, J. R. Mechanical behaviour of non-structural concrete made with recycled ceramic aggregates. **Cement & Concrete Composites**, v. 27, p. 429-433, 2005.

CABRAL, A. E. B. **Modelagem de propriedades mecânicas e de durabilidade de concretos produzidos com agregados reciclados, considerando-se a variabilidade da composição do RCD**. Tese (Doutorado). São Carlos. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007. 280 p.

CABRAL, A. E. B.; SCHALCH, V.; MOLIN, D. C. C. D.; RIBEIRO, J. L. D. Mechanical properties modeling of recycled aggregate concrete. **Construction and Building Materials**, v. 24, p. 421-430, 2010.

CAMPIONE, G.; MANGIAVILLANO, M. L. Fibrous reinforced concrete beams in flexure: Experimental investigation, analytical modeling and design considerations. **Engineering Structures**, v. 30, p. 2970-2980, 2008.

CARNEIRO, J. A. Comunicação pessoal. Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Estadual de Feira de Santana, 2011.

CARREIRA, D. J.; CHU K. H.; Stress-strain relationship for plain concrete in compression. **ACI Journal**, p.797-804, 1985.

COMMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON (CEB) & FEDERATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAITE (FIP). Model Code 1990 – Design Code, Lausanne: Thomas Telford Services Ltd, 1991.

CONSELHO NACIONAL DO MEIO AMBIENTE (CONAMA). Brasília. 2002. Resolução nº 307, de 5 de Julho de 2002. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/port/conama/res/res02/res30702>.

COOK R. D.; MALKUS D. S.; PLESHA M. E.; WITT R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. University of Wisconsin – Madison; John Wiley & Sons, Inc; Fourth Edition, 2002.

CORINALDESI, V. Mechanical and elastic behaviour of concretes made of recycled-concrete coarse aggregates. **Construction and Building Materials**, v. 24, p.1616-1620, 2010.

D'AVILA, V. M. R. **Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos**. Tese (Doutorado). Porto Alegre. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2003. 259 p.

DE BORST, R. **Non-linear analysis of frictional materials**. PhD Thesis. Delft University of Technology, 1986. 137 p.

DIANA, 2005. User's Manual - Release 9. Last modified Fri Apr 29 13:34:17 CEST 2005.

EVANGELISTA, B.; BRITO, J. Mechanical behaviour of concrete made with fine recycled concrete aggregates. **Cement & Concrete Composites**, v. 29, p. 397-401, 2007.

EUROCODE 2. Design of concrete structures. Part 1: general rules and rules for buildings, 1992.

FEENSTRA, P. H. **Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete**. PhD Thesis. Delft University of Technology, 1993. 148 p.

FEENSTRA, P. H.; de BORST, R. Constitutive model for reinforced concrete. Journal of **Engineering Mechanics**, v. 121, n. 5, p. 587-595, 1995.

FEENSTRA, P. H.; de BORST, R.; ROTS, J. G. A comparison of different crack models applied to plain and reinforced concrete. **Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics**, p. 629-638, 1991.

GAMINO, A. L. **Modelagem física e computacional de estruturas de concreto reforçadas com CFRP**. Tese (Doutorado). São Paulo. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2007. 259 p.

GÓMES-SABERÓN, J. M. V. Porosity of concrete with substitution of recycled concrete aggregate: an experimental study. **Cement and Concrete Research**, v. 32, p. 1301-1311, 2002.

GONZÁLEZ-FONTEBOA, B.; MARTÍNEZ-ABELLA, F.; CARRO, D. L.; SEARA-PAZ, S. Stress-strain relationship in axial compression for concrete using recycled saturated coarse aggregate. **Construction and Building Materials**, v. 25, p. 2335-2342, 2011.

HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, p. 773-782, 1976.

HORDIJK, D. A. **Local Approach to Fatigue of Concrete**. PhD Thesis. Delft University of Technology, 1991. 206 p.

KHATIB, J. M. Properties of concrete incorporating fine recycled aggregate. **Cement and Concrete Research**, v. 35, p. 763-769, 2005.

KUMUTHA, R.; VIJAI, K. Strength of concrete incorporating aggregates recycled from demolition waste. **ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences**, v. 5, n. 5, p. 64-71, 2010.

KWAK, H. G.; FILIPPOU, F. C. **Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads**. Report on research. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1990. 120 p.

LARRAÑAGA, M. E. **Experimental study on microstructure and structural behaviour of recycled aggregate concrete**. Doctoral Thesis. Barcelona. Universitat Politècnica de Catalunya, 2004. 230 p.

LEITE, M. B. **Avaliação de propriedades mecânicas de concretos produzidos com agregados reciclados de resíduos de construção e demolição**. Tese (Doutorado). Porto Alegre. Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001. 270 p.

LI, X. Recycling and reuse of waste concrete in China part 1: material behaviour of recycled aggregate concrete. **Resources, Conservation and Recycling**, v. 53, p. 36-44, 2008.

LIMA, J. C. A. **Modelagem computacional de placas de matriz cimentícia reforçadas com fibras de sisal**. Dissertação (Mestrado). Feira de Santana. Universidade Estadual de Feira de Santana, 2009, 124 p.

MACHADO, M. A. S.; TRAUTWEIN, L. M.; FILHO, A. C.; BITTENCOURT, T. N. Modelos de fissuração em estruturas de concreto armado via método dos elementos finites. In **CMNE/CILAMCE 2007**, 13 a 15 de junho, 2007, Porto, Portugal.

MARUYAMA, I.; MASSARU, S.; SOGAPE, T.; SATO, R.; KAWAI, K. Flexural properties of reinforced recycled concrete beams. In **International Rilem Conference on the use of Recycled Materials in Buildings and Structures**, 8-11 November 2004, Barcelona, Spain.

MENIN, R.C. G.; TRAUTWEIN, L.M., BITTENCOURT; T.N. Modelos de Fissuração Distribuída em Vigas de Concreto Armado pelo Método dos Elementos Finitos. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, v. 2, n. 2, p. 166-200, 2009.

MIRANDA, L. F. R.; ANGULO, S. C.; CARELI, E. D. A reciclagem de resíduos de construção e demolição no Brasil: 1986-2008. **Ambiente Construído**, v. 9, n. 1, p. 57-71, 2009.

NATARAJA, M. C.; DHANG, N.; GUPTA, A. P. Stress-strain curves for steel-fiber reinforced concrete under compression. **Cement & Concrete Composites**, v. 21, p. 383-390, 1999.

NOGUEIRA, C. G.; LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. Modelos para análise não-linear de estruturas em concreto armado usando o método dos elementos finitos. **Nono Simpósio de Mecânica Computacional**, 26 a 28 de maio, 2010, Universidade Federal de São João Del-Rei – MG.

POON, C. S.; YU, A. T. W.; NG, L. H. On-site sorting of construction and demolition waste in Hong Kong. **Resources, Conservation and Recycling**, v. 32, p. 157-172, 2001.

PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**. São Carlos. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1988. 329 p.

RABCZUK, T.; AKKERMANN, J.; EIBL, J. A numerical model for reinforced concrete structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, 1327-1354, 2005.

RAHAL, K. Mechanical properties of concrete with recycled coarse aggregate. **Building and Environment**, v. 42, p. 407-415, 2007.

RAVINDRARAJAH, R. S.; TAM, C. T. Recycling concrete as fine aggregate in concrete. **The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete**, v. 9, n. 4, p. 235-241, 1987.

REINHARDT, H. W. Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete. **Heron**, v. 29, n. 2, p. 1-42, 1984.

REIS, C. N. S. **Influência da utilização de agregado miúdo de RCD na aderência aço-concreto reciclado**. Dissertação (Mestrado). Feira de Santana. Universidade Estadual de Feira de Santana, 2009. 151 p.

ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. PhD Thesis. Delft University of Technology, 1988. 141 p.

ROTS, J. G.; BLAAUWENDRAAD, J. Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? **Heron**, v. 34, n. 1, p. 1-59, 1989.

SANTIAGO, E. Q. R. **Utilização de agregados de EVA e RCD para a obtenção de concretos leves**. Dissertação (Mestrado). Feira de Santana. Universidade Estadual de Feira de Santana, 2008. 168 p.

SANTOS, E. C. G. **Aplicação de resíduos de construção de demolição reciclados (RCD-R) em estruturas de solo reforçado**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007. 173 p.

SATO, R.; MARUYAMA, I.; SOGAPE, T.; SOGO, M. Flexural behavior of reinforced recycled concrete beams. **Journal of Advanced Concrete Technology**, v. 5, n. 5, p. 43-61, 2007.

SARGIN, M. **Stress-strain relationship for concrete and the analysis of structural concrete sections**. Study N.4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canadá, 1971.

SHAH, S. P.; SWARTZ, S. E.; OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics do Concrete, Rock or Other Quasi-Brittle Materials**. New York, John Wiley & Sons inc, 1995.

SOUZA, M. B. S. **Modelagem numérica de vigas de concreto reforçado com fibras de aço. Goiânia**. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, 2006. 183 p.

ULSEN, C. **Caracterização tecnológica de resíduos de construção e demolição**. São Paulo. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006. 171 p.

XIAO, J.; FALKNER, H.; Bond behaviour between recycled aggregate concrete and steel rebars. **Construction and Building Materials**, v. 21, p. 395-401, 2007.

XIAO, J.; LI, J.; ZHANG, C. Mechanical properties of recycled aggregate concrete under aniaxial loading. **Cement and Concrete Research**, v. 35, p. 1187-1194, 2005.

XIAO, J. Z.; TAWANA, M. M.; ZHU, X. H. Study on recycled aggregate concrete frame joints with method of nonlinear finite element. **Key Engineering Materials**, v. 417-418, p. 745-748, 2009.

YANG, J.; DU, Q.; BAO, Y. Concrete with recycled aggregate and crushed clay bricks. **Construction and Building Materials**, v. 25, p. 1935-1945, 2011.

YANG, Z. J.; CHEN, J. Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 72, 2280-2297, 2005.